Exame de Qualificação

Mestrado em Estatística

Prova de Probabilidade

16 de Agosto de 2024

Instruções:

- *A prova é composta de 5 questões.*
- *A duração da prova é de 4 horas.*
- *Não é permitido consulta.*
- *Inicie a resolução de cada questão em uma nova folha.*
- *Escreva seu nome completo e seu RA em cada folha utilizada.*
- *Escreva de maneira clara e organizada.*
- *Justifique suas respostas.*

Boa prova!

Questão 1: (*2 pontos*)

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias.

(a) Demonstre que se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > n) < \infty$, então $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_n|}{n} \le 1$ quase certamente.

(b) Se as X_n são identicamente distribuídas e integráveis, demonstre que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_n|}{n} \le 1 \quad \text{quase certamente.}$$

Questão 2: (*2 pontos*)

Sejam $X_1, X_2, \cdots$ variáveis aleatórias independentes tais que

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = (1 - 2^{-n})/2$$
$$P(X_n = 2^n) = P(X_n = -2^n) = 2^{-(n+1)}.$$

Considere

$$Y_n = X_n \mathbb{I}(|X_n| = 1),$$

em que $\mathbb{I}(A)$ é a função indicadora no conjunto A. A sequência $Y_1, Y_2, \cdots$ satisfaz a Lei Forte dos Grandes Números? E a Lei Fraca? Se sim em pelo menos algum caso, mostre e enuncie a lei neste caso.

Questão 3: (*2 pontos*)

Sejam Y e $\{U_r : r \ge 1\}$ variáveis aleatórias independentes, onde:

$$P(Y = y) = \frac{1}{(e-1)y!}, \quad \text{para } y = 1, 2, \ldots,$$

e as U_r são uniformemente distribuídas no intervalo $[0, 1]$. Seja

$$M = \max\left\{U_1, U_2, \ldots, U_Y\right\}.$$

Determine a distribuição de M.

Questão 4: (*2 pontos*)

Sejam $A_1, A_2, \ldots$ eventos independentes em um espaço de probabilidade. Mostre que:

(a) $P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \geq 1 - \exp\Big\{ - \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\Big\}$.

Dica: Use o fato de que $1 - x \leq e^{-x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty \implies P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = 1$.

Questão 5: (*2 pontos*)

Prove se for verdadeira ou apresente um contra-exemplo caso seja falsa a seguinte afirmação: sejam $X_1, X_2, \cdots$ e X variáveis aleatórias. Se $X_n \to X$ em distribuição então $X_n \to X$ em probabilidade.