Exame de Qualificação

Mestrado em Estatística

Prova de Probabilidade

11 de Agosto de 2023

Instruções:

- *A prova é composta de 5 questões.*
- *A duração da prova é de 4 horas.*
- *Não é permitido consulta.*
- *Inicie a resolução de cada questão em uma nova folha.*
- *Escreva seu nome completo e seu RA em cada folha utilizada.*
- *Escreva de maneira clara e organizada.*
- *Justifique suas respostas.*

Boa prova!

Questão 1: (*2 pontos*)

Sejam $A_1, A_2, \ldots$ eventos aleatórios em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathbb{A}, P)$. Definam-se

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Se

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = A,$$

chamamos o evento A de $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ (limite de A_n). Demonstre que se $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$, então $P(A_n) \to P(A)$ quando $n \to \infty$.

Questão 2: (*2 pontos*)

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias tais que X_n assume valores em

$$\left\{0\,,\, \frac{1}{n}\,,\, \frac{2}{n}\,,\, \ldots\,,\, \frac{n-1}{n}\,,\, 1\right\},$$

com

$$P\Big(X_n = \frac{j}{n}\Big) = \frac{1}{n+1}\,, \quad \text{para } j = 0, 1, \ldots, n.$$

Mostre que $X_n \xrightarrow{D} U(0,1)$, ou seja, X_n converge em distribuição para uma variável aleatória que possui distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$.

Questão 3: (*2 pontos*)

Sejam T_1 e T_2 duas variáveis aleatórias independentes com distribuição comum exponencial com parâmetro λ, onde $\lambda > 0$. Sejam

$$X = \min(T_1, T_2) \quad \text{e} \quad Y = \max(T_1, T_2).$$

Para $x > 0$, determine:

(a) A distribuição condicional de Y dado que $X = x$.

(b) A distribuição condicional de $Y - X$ dado que $X = x$.

Questão 4: (*2 pontos*)

Sejam $X_2, X_3, \ldots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição exponencial com parâmetro 1. Para $n \geq 2$, seja

$$Y_n = \frac{X_n}{\log n}.$$

(a) Mostre que $Y_n \xrightarrow{P} 0$, ou seja, Y_n converge para 0 em probabilidade.

(b) Prove que Y_n não converge para 0 quase certamente.

Questão 5: (*2 pontos*)

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes tais que X_n tem densidade

$$f_n(x) = \frac{1}{2n} e^{-|x|/n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Seja $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Demonstre que

$$\frac{S_n - \mathrm{E} S_n}{\sqrt{\mathrm{Var}\, S_n}} \xrightarrow{D} N(0,1),$$

ou seja, $\dfrac{S_n - \mathrm{E} S_n}{\sqrt{\mathrm{Var}\, S_n}}$ converge em distribuição para uma variável aleatória que possui distribuição $N(0,1)$.

Observação: Para $\lambda > 0$, $\dfrac{1}{n^{\lambda+1}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{\lambda} \to \dfrac{1}{\lambda+1}$ quando $n \to \infty$.