Exame de qualificação
MT401

Prof. Christian Rodrigues e
Prof. Yuri Bozhkov

06 de março de 2023

Nome: ____

RA: ____

Questões	Notas
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
Total	

- **Desligue o celular.**
- **NÃO retire o grampo da prova nem destaque páginas da prova.**
- **Respostas sem justificativas NÃO serão consideradas.**

Justifique suas respostas!

Q1. Mostre que $B[a, b]$, o espaço das funções limitadas no intervalo $[a, b]$, com $a < b$ não é separável.

Q2. Sejam $(X, ||\cdot||)$ e $(Y, ||\cdot||_0)$ espaços normados. Mostre que:

a) $||\cdot||_s : X \times Y \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, dada por $||(x,y)||_s = \max\{||x||, ||y||_0\}$ é uma norma em $X \times Y$.

b) se X e Y forem espaços de Banach, então $(X \times Y, ||\cdot||_s)$ será espaço de Banach.

Q3. Seja (X, d) e considere $T : X \to X$. Mostre que se T for contração, então T^n é contração para $n > 1$, mas se T^n for contração para algum $n > 1$, então T não necessariamente é contração.

Q4. Mostre que:

a) se E é espaço reflexivo, então E' é reflexivo.

b) de um modo geral, todo espaço de Hilbert H é isomorfo ao seu bidual $H'' = (H')'$.

Q5. Sejam E um espaço normado e F um subespaço de E. Mostre que existe uma aplicação $T : F' \to E'$ injetora tal que $||T(\varphi)|| = ||\varphi||$ para todo funcional $\varphi \in F'$.

Rascunho

Rascunho

Rascunho

MATRIZES - 08/03/23

Resolva somente quatro dos seis exercícios abaixo.

1. Desenvolva a decomposição $A = LU$ onde L é triangular inferior unitária e U é triangular superior. Enuncie em que condições o método funciona. Explique o que pode ser feito para obter uma decomposição LU para qualquer matriz não singular.

2. Considere a matriz $Q = I - 2uu^t$, $\|u\|_2 = 1$, um refletor de Householder. Calcule os autovalores e o determinante de Q.

3. Considere o sistema linear $Ax = b$, $A : m \times n$, $m > n$ e a solução de quadrados mínimos para este sistema, $\hat{x}$. Se multiplicarmos a equação j por $\alpha \neq 0$, obtendo assim o sistema $Bx = d$, a solução de quadrados mínimos permanece a mesma?

4. Considere o método QR com *shift* σ^k, aplicado à matriz H^k na iteração k. Mostre que $\displaystyle\prod_{k=1}^{j} Q^k \prod_{k=j}^{1} R^k = \prod_{k=1}^{j}(H - \sigma^k I)$, onde $H = H^0$ é a matriz original.

5. Conidere uma matriz não nula $A \in \mathcal{R}^{m\times n}$; posto$(A) = r$ e sua decomposição SVD: $A = U\Sigma V^t$.

   (a) Mostre que $A = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^t$ (*forma condensada da SVD*), onde $\hat{U} \in \mathcal{R}^{m\times r}$, $\hat{V} \in \mathcal{R}^{n\times r}$, tais que $\hat{U}$ e $\hat{V}$ são isometrias e $\hat{\Sigma} \in \mathcal{R}^{r\times r}$ é diagonal com elementos na diagonal $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$.

   (b) Mostre que A pode ser escrita na forma: $A = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \sigma_j u_j v_j^t$.

6. Considere a decomposição SVD de $A = UDV^t$ e a definição da pseudoinversa $A^\dagger = VD^\dagger U^t$. Mostre que se A tem dimensão $m \times n$ com $m \geq n$ e posto completo, então $A^\dagger = (A^tA)^{-1}A^t$.

MT403, Análise Numérica I
IMECC-UNICAMP
10/03/2023

Exame de Qualificação – 1s/2023

O Exame é composto por 4 questões obrigatórias a seguir:

1. Determine uma fórmula de diferenças finitas para aproximar $u''(x)$, que denota a derivada segunda da função $u(x)$, de maior ordem de convergência possível, fazendo uso somente dos seguintes valores $u(x)$, $u(x+h)$, $u(x-h)$ e $u(x+2h)$, com $h>0$ e depois responda:

   a) Qual é o erro de truncamento local? Qual é a ordem da aproximação atingida?

   b) Qual seria a limitação numérica no caso de se utilizar malhas não uniformes na procura de uma fórmula de alta ordem para aproximar $u''(x)$, usando somente os seguintes valores $u(x)$, $u(x+h_1)$, $u(x-h_1)$ e $u(x+h_1+h_2)$, considerando $h_1 \neq h_2$, $h_1 > 0$ e $h_2 > 0$?

2. Considere o problema estacionário com condições de contorno (PVC) a seguir, sendo $u = u(x)$:

$$\begin{cases} u'' = x^2, \quad a < x < b, \\ u(a) = \alpha, \\ u(b) = \beta. \end{cases}$$

   Após definir os conceitos fundamentais de análise numérica: consistência, estabilidade e convergência, para um método de diferenças finitas no escopo desse problema, pede-se:

   a) Um método convergente de aproximação por diferenças finitas para o PVC acima e que seja de segunda ordem de precisão.

   b) Considerando o método do item (a), determine um método de sua livre escolha e que seja de alta ordem, obrigatoriamente com ordem maior do que dois.

3. Considere o seguinte problema diferencial associado a equação do calor

$$\begin{cases} u_t = cu_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \qquad c > 0, \\ u(x,0) = \eta(x), & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = g_0(t), & t \geq 0, \\ u(1,t) = g_1(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

   Diante do exposto, responda com todas as justificativas:

   a) Qual são as condições de compatibilidade entre as quantidades η, g_0 e g_1 para se ter existência e unicidade da solução do problema acima?

   b) De sua livre escolha, descreva um método de diferenças finitas para aproximar numericamente o modelo diferencial acima.

   c) Faça uma discussão sobre como determinar as condições de estabilidade absoluta para método proposto no item (b).

4. Considere o problema hiperbólico linear de advecção, sendo $u = u(x,t)$

$$\begin{aligned} &u_t + cu_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in]-\alpha, \alpha[, \\ &u(x,0) = u_0(x). \end{aligned}$$

sendo $\alpha > 0$ e $c \neq 0$, um número real não nulo qualquer. Agora responda:

a) Prove que se $c < 0$ então a solução do problema descreve um dado inicial $u_0(x)$ que tem um comportamento de uma onda que viaja com velocidade em valor absoluto $|c|$ da direita para à esquerda.

b) Prove que o método FTCS (Forward in Time and Centered in Space) não é estável para quaisquer valores dos parâmetros de malha $\Delta x > 0$ e $\Delta t > 0$. Além disso, dê um exemplo de um método numérico estável para o tratamento numérico deste problema de valor inicial, mostrado sua condição de estabilidade CFL.

c) Utilize uma análise via o método das curvas características para mostrar sobre quais condições os métodos da classe upwind são estáveis, quando aplicados ao problema hiperbólico linear de advecção posto acima.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
MT571 – Aprendizado de Máquinas: Aspectos Teóricos e Práticos

ALUNO	RA

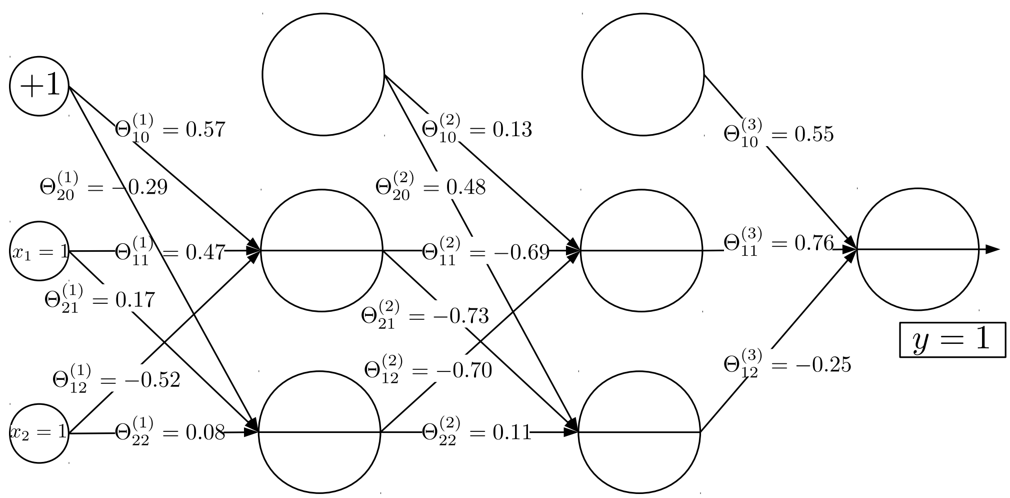
MT571 – Aprendizado de Máquinas: Aspectos Teóricos e Práticos

Exame de Qualificação – 10/03/2023

INSTRUÇÕES

SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

Questão 1. Considere a rede neural representada na figura abaixo, cuja função de ativação é a sigmoide logística



Nessa figura, x_1 e x_2 são as entradas, $+1$ é a unidade de *bias* e y é a saída esperada.

(a) Faça uma atualização dos parâmetros $\Theta_{ij}^{(k)}$ usando o *backpropagation* padrão, cuja iteração do gradiente descendente é expressa por

$$\Theta_{ij}^{(k)} \leftarrow \Theta_{ij}^{(k)} - \alpha \frac{\partial J(\Theta)}{\partial \Theta_{ij}^{(k)}},$$

em que α é a taxa de aprendizado (constante) e $J(\Theta)$ é a função de custo *cross-entropy* binária:

$$J(\Theta) = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} [y^{(i)} \log(h_\Theta(\boldsymbol{x}^{(i)})) + (1 - y^{(i)}) \log(1 - h_\Theta(\boldsymbol{x}^{(i)}))],$$

em que $(\boldsymbol{x}^{(i)}, y^{(i)})$ são os m pares de entrada e saída no treinamento e $h_\Theta(\boldsymbol{x})$ é a função de hipótese sigmoide logística. Use $\alpha = 1$ e mostre todos os cálculos intermediários.

(b) Mostre o pseudo-código do *backpropagation* descrito acima.

Questão 2. Apresente, usando pseudo-código e fórmulas matemáticas, os passos do algoritmo de análise de componentes principais (PCA), tanto para projeção quanto reconstrução.

Questão 3.

(a) Explique porque a acurácia não é uma boa medida em problemas com classes desbalanceadas.

(b) Descreva matematicamente (fórmula) e conceitualmente (significado intuitivo) o conceito de *precision*.

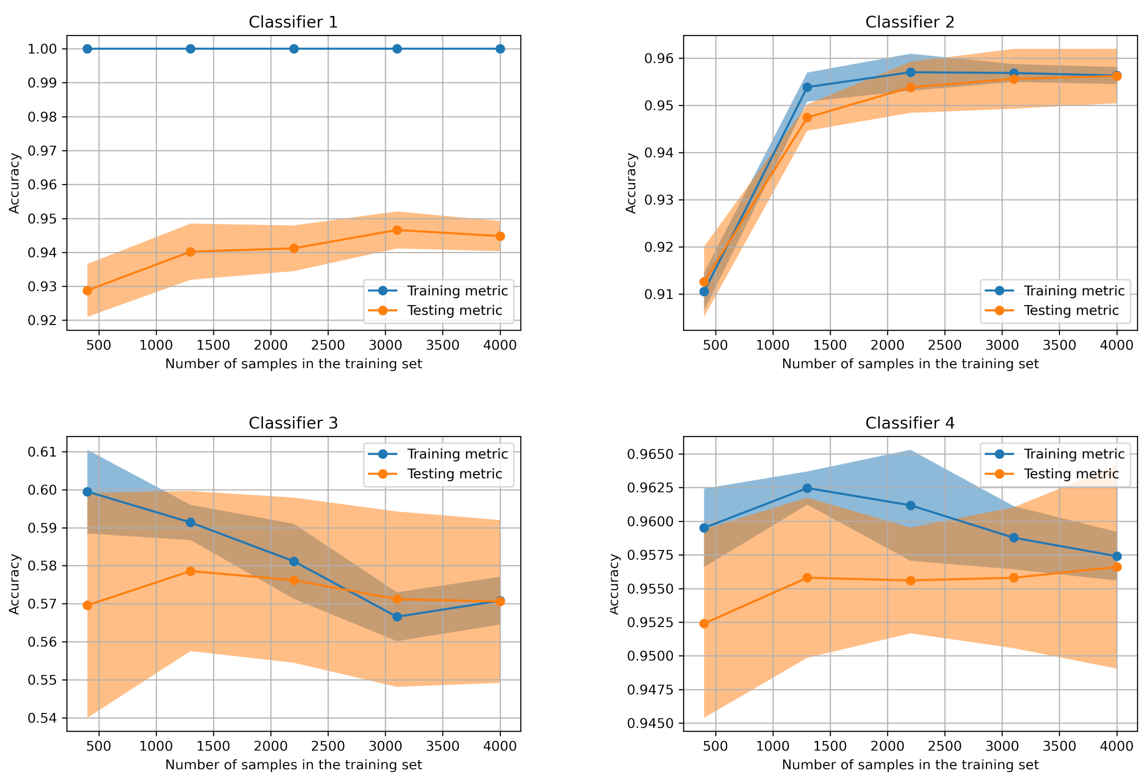
(c) Descreva matematicamente (fórmula) e conceitualmente (significado intuitivo) o conceito de *recall*.

(d) Descreva como é construída e qual a utilidade de uma cuva de *precision*/*recall*.

(e) Defina matematicamente o F_1-*score* e explique sua importância.

Questão 4. Qual a ideia fundamental por trás de uma máquina de suporte vetorial (SVM, *support vector machine*)? Como ela pode se beneficiar de um *kernel*?

Questão 5. Para avaliar a complexidade de quatro classificadores, um conjunto de dados com 5.000 amostras foi dividido em conjuntos de treino e teste com diferentes proporções. Os gráficos nas figuras abaixo resumem o resultado do experimento.



(a) Interprete os resultados obtidos em termos do dilema viés-variância (*bias-variance trade-off*).

(b) Qual dos três classificadores é o mais complexo e qual é o menos complexo? Na sua opinião, qual apresentou o melhor desempenho? Justifique sua resposta.

Questão 6. Foram propostas duas redes neurais para resolução de um problema de classificação binária. As duas redes foram treinadas usando o mesmo conjunto de treinamento $\mathcal{T} = \{(\boldsymbol{x}^{(i)}, t^{(i)}) : i = 1, \ldots, m\}$, em que $\boldsymbol{x}^{(i)} \in \mathbb{R}^n$ e $t^{(i)} \in \{\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1\}$. Além disso, as duas redes neurais possuem arquiteturas semelhantes diferindo apenas na camada de saída. Seguem a arquitetura, codificação dos dados e a função perda adotada para cada uma das duas redes:

1. A primeira rede possui um único neurônio com a função logística dada por

$$f(x) = 1/(1 + e^{-x}),$$

   na camada de saída. Portanto, a rede neural define uma função $\mathcal{N}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que representa a probabilidade de um dado pertencer a classe $\mathcal{C}_1$. Com efeito, um dado de entrada $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ é classificado como sendo da classe $\mathcal{C}_0$ se $\mathcal{N}_1(\boldsymbol{x}) < 0.5$ e é classificado como $\mathcal{C}_1$ caso contrário. As saídas desejadas usadas para o treinamento da primeira rede neural são codificadas como segue:

$$y_1^{(i)} = \begin{cases} 0, & t^{(i)} = \mathcal{C}_0, \\ 1, & t^{(i)} = \mathcal{C}_1. \end{cases}$$

   Finalmente, a rede $\mathcal{N}_1$ é treinada minizando a entropia cruzada binária (*binary cross-entropy*) dada por

$$J_1 = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left(y_1^{(i)} \log(\mathcal{N}_1(\boldsymbol{x}^{(i)}) + (1 - y_1^{(i)}) \log(1 - \mathcal{N}_1(\boldsymbol{x}^{(i)})) \right).$$

2. A segunda rede possui dois neurônios na camada de saída e utiliza a função *softmax* $\sigma : \mathbb{R}^d \to [0, 1]^d$ dada por $\boldsymbol{y} = \sigma(\boldsymbol{x})$ com

$$y_k = \frac{e^{x_k}}{\sum_{j=1}^{d} e^{x_j}},$$

   em que $\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_d]$ e $\boldsymbol{y} = [y_1, \ldots, y_d]$ denotam a entrada e a saída da função *softmax*, respectivamente. Dessa forma, a segunda rede neural define uma função $\mathcal{N}_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ e um dado de entrada $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ é classificado como sendo da classe $\mathcal{C}_0$ se $p_1 > p_2$ e é classificado como $\mathcal{C}_1$ caso contrário, em que $[p_1, p_2] = \mathcal{N}_2(\boldsymbol{x})$ é a saída da segunda rede. As saídas desejadas usadas para o treinamento da rede $\mathcal{N}_2$ são obtidas usando codificação *one-hot*, ou seja,

$$\boldsymbol{y}_2^{(i)} = \begin{cases} [1, 0], & t^{(i)} = \mathcal{C}_0 \\ [0, 1], & t^{(i)} = \mathcal{C}_1. \end{cases}$$

   Por fim, a segunda rede neural é treinada minimizando a entropia cruzada (*cross-entropy)* dada por

$$J_2 = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \langle \boldsymbol{y}_2^{(i)}, \log(\mathcal{N}_2(\boldsymbol{x}^{(i)})) \rangle,$$

   em que a função log é aplicada componente-a-componente e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno.

Estabeleça, se possível, uma relação entre as redes $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$. Justifique sua resposta.

Boa Prova!

MT601 – Métodos Computacionais de Otimização
EXAME DE QUALIFICAÇÃO Março/2023

Justifique todos os argumentos. Respostas sem justificativas **não** serão consideradas.

$\boxed{1}$ Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x_2 - x_1^2)^2 + x_1^5$. Prove que f possui um único ponto estacionário que não é maximizador nem minimizador.

$\boxed{2}$ Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \|x\|_2^3$. Dados $0 < t \in \mathbb{R}$ e $0 \neq x^0 \in \mathbb{R}^n$, considere o Método de Newton com passo constante,

Para $k = 0, 1, 2, \ldots$ faça $\quad x^{k+1} = x^k - t\,[\nabla^2 f(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k)$.

Determine os valores de t para os quais o método acima converge para o minimizador global de f e prove que a convergência, nesses casos, é linear.

$\boxed{3}$ Sejam $\beta_i \in \mathbb{R}_+, i = 1, \ldots, n$, quaisquer. Prove a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} \beta_i \right)^{1/n},$$

usando a solução do problema de otimização,

$$\text{Maximizar} \quad \prod_{i=1}^{n} x_i \quad \text{sujeita a} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

$\boxed{4}$ Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f, h \in C^1$, e considere o problema de otimização,

$$\text{Minimizar} \quad f(x) \quad \text{sujeita a} \quad h(x) = 0.$$

Prove que se $x^* \in \mathbb{R}^n$ é um minimizador local regular do problema acima, com multiplicadores de Lagrange associados não todos nulos, então para qualquer $\rho > 0$, x^* não é um minimizador local de $P(x, \rho) = f(x) + \rho\, \|h(x)\|_2^2$.

EXAME de QUALIFICAÇÃO - COMBINATÓRIA ENUMERATIVA - 10/03/23

Resolver 6 questões dentre as 10 dadas abaixo.

NOME:____RA:_________________

1- Provar, por argumentos combinatórios, que:

(a)
$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

(b)
$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

2- Resolver, usando funções geradoras, a seguinte relação de recorrência :

$a_0 = 2$ e para $n \geq 1$ $\quad a_n = 4a_{n-1} - 3.$

3-Dizemos que uma função é monotônica quando $x < y$ implica $f(x) \leq f(y)$. Encontrar o número de funções monotônicas de [n] em [n] onde [n]={1, 2, 3, ...n}.

4- A soma de 4 inteiros positivos é no máximo 10. Encontrar o número de possíveis escolhas para estes números.

5- Utilizando a operação de conjugação , provar a seguinte identidade:

p(n/partes são distintas) = p(n/ todo inteiro entre 1 e a maior parte aparece como parte).

6- De quantas maneiras diferentes podemos colorir as faces de um tetraedro regular usado c cores?

7-Quantos diferentes padrões podem ser formados ao colorirmos os vertices de um octaedro regular usando c cores?

8-Mostre que p(n) e´ ímpar se, e somente se, o número de partições de n cujas partes são ímpares e distintas´e´ ímpar.

9-Calcule o indice de ciclos dos grupos S_5 e S_6.

10- Quantos padrões diferentes podem ser formados ao colorirmos as faces de um cubo de maneira que se tenha 3 faces vermelhas, duas brancas e uma azul?