Exame de Qualificação – Análise Aplicada
$2.^o$ semestre de 2023 – 14/08/2023

Nome:____

RA:____

Escolha APENAS quatro questões para serem resolvidas. Boa Prova!

$1.^a$ Questão.

a) Prove que um subconjunto fechado M de um espaço métrico compacto X é compacto. (1,25 ponto)

b) Sejam X e Y espaços métricos, $f : X \longrightarrow Y$ uma função contínua e K um subconjunto compacto de X. Mostre que a imagem $f(K)$ é um subconjunto compacto em Y. (1,25 ponto)

2.^{a} Questão. Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ espaço normado. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X satisfaz a propriedade P se

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{1}{2^n}, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

a) Mostre que toda sequência que satisfaz a propriedade P é de Cauchy. (1,25 ponto)

b) Seja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em X. Mostre que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência que satisfaz a propriedade P. (1,25 ponto)

3.^{a} Questão. Seja $X = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{C},\ \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n| < \infty\}$.

a) Mostre que X é subespaço próprio de l^1. (1,25 ponto)

b) Mostre que X é denso em l^1. (1,25 ponto)

4.^{a} Questão.

a) Seja $M \subset l^2$ dado por
$$M = \{x = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2 : a_n = 0 \text{ quando } n \text{ é par}\}.$$
Mostre que M é fechado e encontre $M^\perp$. (1,25 ponto)

b) Seja $T : l^2 \longrightarrow l^2$ dado por
$$Tx = (a_2, a_4, a_6, \dots),\ x = (a_n)_{n\in\mathbb{N}},$$
Mostre que T é limitado e encontre T^*. (1,25 ponto)

5.^{a} Questão. Seja $f(x) \in C^2[a,b]$ e $\hat{x}$ um zero simples de $f(x)$ em (a,b). Mostre que

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

é uma contração em alguma vizinhança de $\hat{x}$ (1,25 ponto). Introduza um método interativo (a partir de $g(x)$) para encontrar $\hat{x}$. (1,25 ponto)

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

MT402 – MATRIZES

EXAME DE QUALIFICAÇÃO AGOSTO/2023

UNICAMP

Escolha **4** questões para resolver e **justifique** todos os argumentos usados. Respostas sem justificativas **não** serão consideradas.

$\boxed{1}$ Seja $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com colunas ortonormais. Prove que:

(a) $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) $\|Q^Tx\|_2 \leq \|x\|_2$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$.

$\boxed{2}$ Sejam $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, invertível, e sua fatoração LU, $A = LU$, onde L tem diagonal unitária.

(a) Encontre a fatoração LU de A^T, $A^T = \widetilde{L}\widetilde{U}$, onde $\widetilde{L}$ tem diagonal unitária.

(b) Sendo $b \in \mathbb{R}^n$ e k um número inteiro positivo, descreva como resolver o sistema linear $A^kx = b$.

$\boxed{3}$ Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com posto n, $b \in \mathbb{R}^m$ e considere o sistema linear

$$\begin{pmatrix} A & I \\ 0 & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Prove que esse sistema tem solução única e interprete esse resultado.

$\boxed{4}$ Seja H uma matriz Hessenberg superior e irredutível de ordem $n > 1$. Prove que em um passo do método QR com *shift* λ, onde λ é um autovalor de H, a nova matriz Hessenberg superior $\widetilde{H}$ é tal que $\widetilde{h}_{n,n-1} = 0$ e $\widetilde{h}_{n,n} = \lambda$.

$\boxed{5}$ Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e considere a matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix}$. Determine a relação entre os valores singulares de A e os autovalores de M.

ALUNO	RA

MT571 – Aprendizado de Máquinas: Aspectos Teóricos e Práticos

Exame de Qualificação – 18/08/2023

INSTRUÇÕES

SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

Questão 1. Descreva matematicamente o problema de otimização resolvido na SVM. Mostre como este problema de otimização implica em maximizar a margem de decisão do classificador.

Questão 2. Apresente matematicamente a função de custo da filtragem colaborativa em sistemas de recomendação. Justifique a expressão. Mostre os passos do algoritmo de filtragem colaborativa, incluindo a expressão do gradiente descendente.

Questão 3. A precisão (P) e a revocação (R) são dadas pelas equações

$$P = \frac{VP}{VP + FP} \quad \text{e} \quad R = \frac{VP}{VP + FN},$$

em que VP, FP e FN representam o número de "verdadeiro positivo", "falso positivo" e "falso negativo", respectivamente. Num problema de classificação binária com $y \in \{0, 1\}^m$, foram encontrados os valores $P = 75\%$ e $R = 75\%$ usando os comandos `100*precision_score(y,ypred)` e `100*recall_score(y,ypred))`, em que `ypred` denota a saída do classificador. Porém, invertendo as classes, foram encontrados os valores $P^c = 0\%$ e $R^c = 0\%$ usando os comandos `100*precision_score(1-y,1-ypred)` e `100*recall_score(1-y,1-ypred))` da biblioteca `scikit-learn`. Qual foi a acurácia do classificador?

Questão 4. Considere a função

$$\mathcal{L}(h_\theta, \mathcal{T}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \Big(1 - \exp\Big(-\exp\big(-y_i h_\theta(x_i)\big)\Big)\Big), \tag{1}$$

em que $\mathcal{T} = \{(x_i, y_i) : i = 1, \ldots, m\} \subset \mathbb{R}^n \times \{-1, +1\}$ é o conjunto de treino e h_θ é a função de decisão de um classificador binário $\mathcal{C}$ dado por $\mathcal{C} = f \circ h_\theta$, com

$$f(t) = \begin{cases} +1, & t \geq 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

Mostre que a função em (1) pode ser usada como função perda em problemas de classificação binária. Avalie a sensibilidade de $\mathcal{L}$ com respeito a ruído.

Boa Prova!

ALUNO	RA

BIOMATEMÁTICA-18/08/2023 (Faça 4 dentre as 5 questões)

Questão 1. O peso $p(t)$ de um peixe no instante de tempo t pode ser descrito pela equação de von Bertalanffy

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p^{2/3} - \beta p, \tag{1}$$

em que $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ são duas constantes.

(a) Qual das constantes representa o anabolismo (transformação de alimentos em substância incorporada nas células) e qual representa catabolismo (transformação de compostos orgânicos em resíduos com liberação de energia).

(b) Identifique os estados estacionários do modelo.

(c) O ponto de inflexão (t^*, p^*) sobre o gráfico do peso em função do tempo está associado com a época de desova do peixe. Uma política de pesca consiste em devolver o peixe ao *habitat* quando seu peso é menor que p^*. Determine p^* como função dos parâmetros α, β e do estado estacionário não-trivial $\bar{p}$.

(d) Sabendo que a tilápia-do-nilo na fase adulta pesa em média 2,4Kg, mostre que o período de desova inicia quando o peixe pesa em torno de 700g.

Questão 2. Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= ax + \alpha xy, \\ \frac{dy}{dt} &= by + \beta xy, \end{cases} . \tag{2}$$

em que x e y representam o número de indivíduos de populações interagindo e a, b, α, β são parâmetros.
Indique possíveis valores para os parâmetros a, b, α e β em cada caso, espcificando qual espécie é representada por cada vairável x e y:

(a) Mutualismo (duas espécies beneficiam-se mutuamente);

(b) Comensalismo (uma espécie se beneficia de outra enquanto que esta outra não é afetada pela primeira);

(c) Competição (duas espécies são prejudicadas pela coexistência);

(d) Presa-predação (uma das espécies se beneficia da coexistência ao prejudicar a outra);

(e) Hóspede-Hospedeiro (a espécie hóspede precisa se beneficiar prejudicando o hospedeiro).

Questão 3.
No exercicio anterior escolha um dos sistemas e estude:

i) Os estados estacionários NÃO TRIVIAIS do modelo escolhido.

ii) Estabilidade dos estados estacionários NÃO TRIVIAIS do modelo escolhido.

Questão 4. Apresente e comente as equações que descrevem os seguintes modelos epidemiológicos compartimentados:

i) SI (suscetíveis, infectados) **sem** dinâmica vital.

ii) SIS (suscetíveis, infectados e suscetíveis) **sem** dinâmica vital.

iii) SIR (suscetíveis, infectados e removidos) **sem** dinâmica vital.

iv) SIRS (suscetíveis, infectados, recuperados e suscetíveis novamente) **sem** dinâmica vital.

v) SIRS (suscetíveis, infectados, recuperados e suscetíveis novamente) **com** dinâmica vital.

vi) Qual(is) do(s) modelo(s) acima poderia ser usado para descrever a dinâmica da gripe? E de infecção por HIV? Justifique sua resposta.

vii) Qual(is) do(s) modelo(s) acima poderia ser usado para descrever a dinâmica da Covid? Justifique sua resposta.

Use diagramas quando for conveniente.

Questão 5. Apresente um tema importante de Bio 1 que as questões anteriores não abordaram.

Boa Prova!