



Questão 1 Dada $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, prove que

$$\min_{\text{posto de } B=r} \|A - B\|_2 = \sigma_{r+1}$$

em que σ_{r+1} é o valor singular $r + 1$ de A . Qual matriz B realiza este mínimo? Responda a mesma pergunta para a norma de Frobenius.

Questão 2 Descreva diferentes técnicas para Fatoração QR, indicando em que casos cada uma é usada.

Explique que tipo de fatoração QR completa e reduzida de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se obtém quando $m > n$ e quando $m = n$. Dê uma ideia da matriz R gerada em cada caso, levando em consideração o posto de A .

Questão 3 Sejam v_1, v_2, \dots, v_p vetores ortogonais linearmente independentes, de norma 1, pertencentes a um subespaço $V \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão p .

1. Mostre a matriz de projeção ortogonal sobre V .
2. Mostre sua fatoração QR.
3. Mostre sua fatoração SVD.

Questão 4 Descreva os diferentes métodos usados para se obter um autovalor e um autovetor, explicando o que se procura com cada um deles.

Exame Qualificação – Análise Numérica (MT403) – 2s/2022

Estudante:

RA:

• Escolha **somente 3 (três)** entre as questões abaixo apresentadas para a realização do seu **Exame de Análise Numérica (AN)**. Faça uma marcação a caneta, por exemplo, fazendo um círculo na questão para indicar aquelas escolhidas e também escreva aqui os números dessas questões:

• Para todas as questões escolhidas para a realização do seu **Exame de AN**, soluções “soltas” e/ou “desconexas” não serão consideradas. A correção do Exame de Análise Numérica será realizada levando em conta tanto a consistência como a organização lógica dos passos corretos, e teoricamente fundamentados, para a conclusão da resposta, e não resoluções meramente indicadas/comentadas e sem justificativas.

Questão 1

Seja o problema de Poisson em duas dimensões, sendo $u = u(x, y)$ e o **operador Laplaciano** dado por Δu ,

$$\Delta u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega = [0, 1] \times [0, 1], \quad (1)$$

sujeito a uma condição de contorno de Dirichlet,

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (2)$$

Considerando uma malha computacional igualmente espaçada ($\Delta x = \Delta y = h$) e aproximações de diferenças finitas centradas de segunda ordem para o operador Laplaciano,

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy},$$

pede-se discutir e demonstrar para o problema (1)-(2): **(a)** Erro de truncamento local, **(b)** Erro Global e **(c)** Convergência, considerando todos os passos em detalhes e destacando a norma empregada nesses itens.

Dicas: • $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$, onde ρ denota o raio espectral.

$$\bullet u_{ij}^{p,q} = \sin(p\pi ih) \sin(q\pi jh). \quad \bullet \lambda_{p,q} = \frac{2}{h^2} [(\cos(p\pi h) - 1) + (\cos(q\pi h) - 1)].$$

Questão 2

Seja $f(u) : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ uma função Lipschitz contínua associada ao Problema de Valor Inicial (PVI) autônomo

$$u' = f(u), \quad 0 < t \leq T, \quad u(0) = \eta. \quad (3)$$

Considerando que um método linear de r passos para a aproximação do PVI (3) pode ser escrito na forma seguinte (com $\alpha_r = 1$):

$$\sum_{j=0}^r \alpha_j U^{n+j} = \Delta t \sum_{j=0}^r \beta_j f(U^{n+j}), \quad (4)$$

pede-se os seguintes itens com as devidas justificativas:

(a) Defina estabilidade zero para o método (4) e mostre que o mesmo será consistente com o PVI (3) se

$$\sum_{j=0}^r \alpha_j = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=0}^r j\alpha_j = \sum_{j=0}^r \beta_j.$$

(b) Dado (4), dê exemplos de **dois** métodos explícitos e **dois** métodos implícitos para resolução do PVI (3).

(c) Em cada caso do item (b), explique qual é a condição para que um método numérico dado por (4) seja ou explícito ou implícito?

Questão 3

Considere o problema de valor inicial (PVI) formado pela equação diferencial parcial (EDP) de evolução linear, sendo $u = u(x, t)$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathfrak{R}, \quad t > 0, \quad (5)$$

com a condição inicial,

$$u(x, t_0) = \eta(x), \quad x \in \mathfrak{R}, \quad t_0 = 0, \quad (6)$$

sendo a constante, $a \in \mathfrak{R}$ e $a \neq 0$. A equação de advecção linear (5) é o exemplo mais simples de uma equação hiperbólica (em sua forma forte), cuja solução exata é dada por,

$$u(x, t) = \eta(x - at). \quad (7)$$

A Eq. (7) revela que o dado inicial (6) é transladado de forma inalterada, e com velocidade a para a direita (se $a > 0$), ou para a esquerda (se $a < 0$). Para $a = 0$ a solução é $u(x, t) = \eta(x)$, $\forall t > 0$. Mais do que isso, a solução $u(x, t)$ em (7) para o PVI (5)-(6) é constante ao longo de cada curva característica $x - at = x_0$, sendo x_0 (em t_0) o domínio de dependência do ponto (x, t) .

Nesse contexto, considerando agora uma discretização no espaço-tempo como segue,

$$t_n = nk, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad x_j = jh, \quad j = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

onde $k = \Delta t$ denota o passo de tempo e $h = \Delta x$ denota o espaçamento da malha, temos então neste caso que sobre um único passo de tempo resulta:

$$u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j - ak, t_n). \quad (9)$$

Mais ainda, traçando a curva característica como em (9) de volta no tempo por um único passo de tempo k , a partir do ponto da malha x_j , resulta na interpretação geométrica indicada na Figura 1. Adicionalmente, se a condição $0 < ak/h < 1$ for verificada então o ponto $x_j - ak$ ficará entre os pontos x_{j-1} e x_j ,

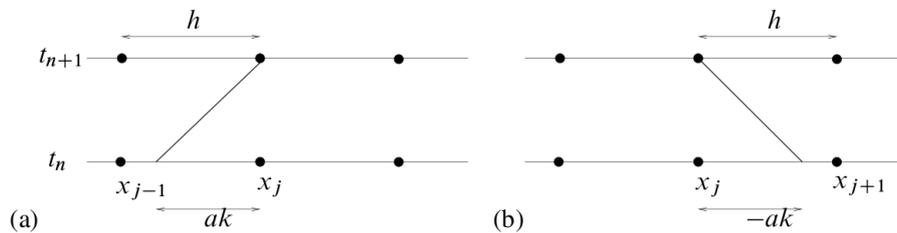


Figura 1: Curva característica “discreta”.

Neste contexto, pede-se, com as devidas justificativas,

- Afirmção:** Para o PVI linear (5)-(6) a curva característica é uma reta com inclinação constante. Pede-se mostrar os cálculos para determinar a inclinação dessa curva característica indicando qual é seu valor exato no plano (x, t) .
- Enuncie o Teorema de Equivalência de Lax-Richtmyer, explicando seu significado fundamental em análise numérica para a aproximação numérica de modelos de evolução temporal para equações diferenciais parciais lineares (por exemplo, a equação de advecção e a equação do calor).
- Considerando os itens (a) e (b), prove de consistência, estabilidade e convergência para o esquema de Lax-Wendroff quando aplicado ao PVI (5)-(6), considerando obrigatoriamente neste contexto a **Análise de Fourier** e a **Identidade de Parseval**. Lembrando, o método explícito de Lax-Wendroff para o modelo de advecção linear (5)-(6) é dado por:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{ak}{2h} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{a^2 k^2}{2h^2} (U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n).$$

Questão 4

Seja o PVI seguinte, sendo $u = u(x, t)$, para a equação do calor linear,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathfrak{R}, \quad t > 0, \quad \text{com a condição inicial,} \quad (10)$$

$$u(x, t_0) = \eta(x), \quad x \in \mathfrak{R}, \quad t_0 = 0, \quad (11)$$

sendo κ **uma constante real** talque $\kappa \neq 0$.

Pede-se, com as devidas justificativas:

- (a) Considere a afirmação inicial seguinte em relação ao PVI (10)-(11): Supondo $\kappa > 0$, então faz sentido aplicar ao PVI (10)-(11) aproximações combinadas de diferenças finitas no tempo e no espaço (i.e., $U_j^n \approx u(x_j, t_n)$) para obter o seguinte esquema geral,

$$-\alpha r U_{j-1}^{n+1} + (1 + 2\alpha r)U_j^{n+1} - \alpha r U_{j+1}^{n+1} = (1 - \alpha)r U_{j-1}^n + [1 - 2(1 - \alpha)r]U_j^n + (1 - \alpha)r U_{j+1}^n, \quad (12)$$

$$t_n = nk, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad x_j = jh, \quad j = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

sendo $r \equiv \frac{\kappa k}{h^2}$, onde $\alpha \in [0, 1]$, $k = \Delta t$ denota o passo de tempo e $h = \Delta x$ denota o espaçamento da malha.

- (a) Diante do exposto, justifique **com suas palavras**, mas pelos menos em nível formal, o motivo matemático pelo qual **não faz sentido** supor que $\kappa < 0$ para o PVI (10)-(11). Em outras palavras, explique matematicamente a afirmação inicial acima da necessidade de supor $\kappa > 0$ para então obter o esquema geral (12) associado ao PVI (10)-(11)?
- (b) Realize uma análise de estabilidade do esquema de diferença finitas (12)-(13) para o PVI (10)-(11), sabendo que $\alpha \in [0, 1]$. Observe que a relação de estabilidade pode envolver naturalmente os parâmetros k , h , κ e α .
- (c) Supondo que para qualquer $\alpha \in [0, 1]$ sempre se tenha um esquema consistente e estável (seja este incondicionalmente estável ou condicionalmente estável), explique se o teorema de Lax-Richtmyer pode ser usado para estabelecer a conexão entre consistência e estabilidade para convergência do esquema geral (12)-(13) para o PVI (10)-(11).
- (d) Note que do esquema geral (12)-(13) tem-se: $\alpha = 0$ resulta no esquema “avançado no tempo e centrado no espaço (FTCS)”, $\alpha = 1$ resulta no esquema “recuado no tempo e centrado no espaço (BTCS)”, e $\alpha = \frac{1}{2}$ resulta no esquema “Crank-Nicolson (CN)”. Neste contexto, escreva a equação de diferenças finitas **para cada um desses casos** FTCS, BTCS e CN para o PVI (10)-(11) e indique se o esquema correspondente é implícito ou é explícito, justificando suas respostas.

Questão 5

Em vista das **Questões 1, 2, 3 e 4**, considere os aspectos teóricos, computacionais e aplicações dos métodos numéricos para resolução aproximada de PVI e PVCs (aqui pode-se pensar, por exemplo, o caso com domínio quadrado e malha uniforme em 1D, 2D e 3D espaciais, além da variável temporal t).

Pede-se, com as devidas justificativas,

- (a) **Discuta com suas palavras**, eventuais vantagens e desvantagens computacionais sobre métodos numéricos para resolução aproximada de PVI, considerando formulações Explícita e Implícita. **Justifique sua resposta, incluindo também argumentos teóricos.**
- (b) **Discuta com suas palavras**, eventuais vantagens e desvantagens computacionais sobre métodos numéricos para resolução aproximada de PVCs, considerando o emprego de métodos diretos e iterativos para o tratamento numérico do problema discreto. **Justifique sua resposta, incluindo também argumentos teóricos.**



Notação: Dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sua **Transformada de Fourier**, $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, é dada por $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$.

1 Utilize a série de Fourier da função $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(t) = |t|$, para determinar $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

2 Sejam $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com transformadas de Fourier tais que $\hat{u}(\omega) = 0$ se $|\omega| > \Omega_u > 0$ e $\hat{v}(\omega) = 0$ se $|\omega| > \Omega_v > 0$. Através do Teorema de Shannon determine o intervalo máximo de amostragem para cada um dos sinais a seguir.

- (a) $\frac{d}{dt}u(t)$.
- (b) $u(t)^2 + v(3t)$.
- (c) $u(t) * v(t)^3$.
- (d) $u(t)\text{sen}(t) + v(t)\text{cos}(t)$.

3 Seja $a > 0$ e considere o filtro convolucional $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definido na frequência por $\hat{h}(\omega) = e^{-a|\omega|}$, e o sinal degrau unitário $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definido por $\mu(t) = \frac{1 + \text{sin}(t)}{2}$.

- (a) Determine h .
- (b) Descreva a atuação de h .
- (c) Aplique o filtro h ao sinal μ .
- (d) Analise o resultado obtido em (c).
- (e) Supondo que a unidade de tempo seja segundos, determine os valores de a para os quais o conteúdo das frequências superiores à 30 Hz seja reduzido em pelo menos 50%.



ALUNO	RA
-------	----

QUALIFICAÇÃO – BIOMATEMÁTICA – 02/09/2022

Questão 1. Considere o modelo presa-predador

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = -by + \beta xy \end{cases} \quad (1)$$

- (a) Identifique as variáveis x e y (qual é presa e qual é predador). Em seguida, decida se é possível dizer que há auto-inibição em alguma das espécies. Se sim, em qual?

A variável x representa a presa, uma vez que sua população diminui ao ter contato com y . Por sua vez, y representa o predador, que se beneficia com o contato com x .

É possível dizer que há auto-inibição na população das presas, pois seu crescimento é dado pela equação logística (de Verhulst). Essa equação indica competição entre a própria espécie, de forma que seu crescimento seja limitado por uma capacidade de suporte K na ausência de predadores. Isto é, mesmo no cenário livre de predadores, o crescimento do número de presas não é indefinido, pois há auto-inibição.

- (b) Interprete cada um dos parâmetros a, b, K, α e β .

O parâmetro a é a taxa de crescimento populacional das presas, enquanto b é a taxa de mortalidade da população de predadores.

O parâmetro K é a capacidade de suporte que limita o crescimento de presas, desde que se $x > K$ então $1 - \frac{x}{K} < 0$, o que implicaria em $\frac{dx}{dt} < 0$.

O parâmetro α representa a taxa de predação ou taxa de decaimento da população de presas devido a encontros com predadores. O parâmetro β é a taxa de conversão da caça em novos predadores.

- (c) Determine os equilíbrios de (1) e o tipo de estabilidade, em função dos parâmetros.

Analisando o cenário $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$, vemos primeiramente que um ponto de equilíbrio é dado por $P_1 = (0, 0)$. Neste cenário, $x = 0 \Rightarrow y = 0$, mas o contrário não é válido. Se $y = 0$, temos $ax \left(1 - \frac{x}{K}\right) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = K$. Portanto, $P_2 = (K, 0)$ é outro ponto de equilíbrio. Por fim, se $x \neq 0$ e $y \neq 0$, temos

$$\left(1 - \frac{x}{K}\right) = \alpha y \quad \text{e} \quad by = \beta xy.$$

Portanto, um último ponto de equilíbrio é dado por $P_3 = \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha} \left(1 - \frac{b}{\beta K}\right)\right)$.

Para analisar a estabilidade dos pontos P_1, P_2 e P_3 vamos encontrar a matriz Jacobiana do sistema (1), através das derivadas parciais de suas equações:

$$J_{(x,y)} = \begin{bmatrix} a \left(1 - \frac{2x}{K}\right) - \alpha y & -\alpha x \\ \beta y & -b + \beta x \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Aplicando essa matriz no ponto P_1 obtemos:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}, \quad (3)$$

para a qual temos os autovalores $\lambda_1 = a > 0$ e $\lambda_2 = -b < 0$. Portanto, P_1 é ponto de sela.

Aplicando no ponto P_2 obtemos:

$$B = \begin{bmatrix} -a & -\alpha K \\ 0 & \beta K - b \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Os autovalores de B são $\lambda_1 = -a < 0$ e $\lambda_2 = \beta K - b$. Se $K > \frac{b}{\beta}$, temos $\lambda_2 > 0$ e, por outro lado, se $K < \frac{b}{\beta}$, temos $\lambda_2 < 0$. Portanto, se $K > \frac{b}{\beta}$, P_2 é ponto de sela e, se $K < \frac{b}{\beta}$, P_2 é nó estável.

Por fim, aplicando no ponto P_3 , temos:

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{ab}{\beta K} & -\frac{\alpha b}{\beta} \\ \frac{a}{\alpha K}[\beta K - b] & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Como $a, b, \beta, K > 0$, temos que $\text{tr}(C) = -\frac{ab}{\beta K} < 0$. Além disso, $\det(C) = \frac{ab}{\beta K}[\beta K - b]$. Então, se $K > \frac{b}{\beta}$, temos $\det(C) > 0$ e, se $K < \frac{b}{\beta}$, temos $\det(C) < 0$. E mais, se $K < \frac{ab}{4\beta(\beta K - b)}$, então ocorre $[\text{tr}(C)]^2 < 4 \det(C)$. Portanto, P_3 é:

- Ponto de sela, se $K < \frac{b}{\beta}$; ($\text{tr}(C) < 0$ e $\det(C) < 0$)
- Nó estável, se $K > \frac{b}{\beta}$ e $K \geq \frac{ab}{4\beta(\beta K - b)}$; ($\text{tr}(C) < 0$, $\det(C) > 0$ e $[\text{tr}(C)]^2 \geq 4 \det(C)$)
- Espiral estável, se $K > \frac{b}{\beta}$ e $K < \frac{ab}{4\beta(\beta K - b)}$. ($\text{tr}(C) < 0$, $\det(C) > 0$ e $[\text{tr}(C)]^2 < 4 \det(C)$)

Questão 2.

- (a) Reescreva o modelo (1) (Questão 1) supondo que haja retiradas (pesca) do tipo Malthusiano. Adote ϵ_1 e ϵ_2 para as taxas de retirada.

É possível reescrever (1) nessas condições da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha xy - \epsilon_1 x \\ \frac{dy}{dt} = -by + \beta xy - \epsilon_2 y \end{cases}. \quad (6)$$

- (b) Com algumas manipulações matemáticas, reescreva o modelo obtido em (a) de modo que o mesmo fique na forma de (1). Em seguida, interprete a influência da pesca nos parâmetros do modelo original (1).

Podemos reescrever (6) como abaixo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (a - \epsilon_1)x \left(1 - \frac{x}{\left(\frac{a-\epsilon_1}{a}\right)K}\right) - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = -(b + \epsilon_2)y + \beta xy \end{cases} . \quad (7)$$

De fato, note que

$$\begin{aligned} ax \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha xy - \epsilon_1 x &= ax - \epsilon_1 x - a \frac{x^2}{K} - \alpha xy \\ &= (a - \epsilon_1)x - a \frac{x^2(a - \epsilon_1)}{K(a - \epsilon_1)} - \alpha xy \\ &= (a - \epsilon_1)x \left(1 - \frac{x}{K \left(\frac{a-\epsilon_1}{a}\right)}\right) - \alpha xy. \end{aligned}$$

Com essa nova formulação podemos ver a influência da pesca na dinâmica do modelo original: como $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$, vemos que a taxa de crescimento de presas diminui ao passo que a taxa de mortalidade de predadores aumenta. Além disso, a nova capacidade de suporte da população de presas passa a ser $\left(\frac{a-\epsilon_1}{a}\right)K$, que é igual a capacidade de suporte original (K) se não há pesca ($\epsilon_1 = 0$) e tanto menor que K quanto maior for ϵ_1 .

- (c) É possível dizer se o efeito da pesca favorece alguma das espécies? Justifique sua resposta.

De forma análoga ao item (c), no caso sem pesca, podemos agora encontrar os seguintes pontos de equilíbrio não triviais: $Q_1 = \left(\frac{a-\epsilon_1}{a}K, 0\right)$ e $Q_2 = \left(\frac{b + \epsilon_2}{\beta}, \frac{a - \epsilon_1}{\alpha} \left(1 - \frac{b + \epsilon_2}{\beta K}\right)\right)$.

Se ocorre Q_1 a população de predadores é extinta, o que não é do nosso interesse. Analisando Q_2 , se comparamos com o cenário do modelo original, vemos que a pesca favorece a população de presas, já que $\frac{b + \epsilon_2}{\beta} > \frac{b}{\beta}$ e $\frac{a - \epsilon_1}{\alpha} \left(1 - \frac{b + \epsilon_2}{\beta K}\right) < \frac{a}{\alpha} \left(1 - \frac{b}{\beta K}\right)$.

Questão 3. Na literatura sobre COVID-19, é possível saber que a dinâmica da mesma se dá a partir de contatos entre suscetível e infectado (a uma taxa de contágio β) e, após alguns dias, o indivíduo infectado se recupera (a uma taxa γ), por um curto período. Pede-se:

- (a) Dentre os modelos clássicos, SI, SIS e SIR, qual se adequa melhor para estudar a dinâmica da COVID-19?

Dentre as opções apresentadas, o modelo epidemiológico mais adequado para estudar a dinâmica da COVID-19 é o modelo SIR, uma vez que o indivíduo após se infectar pode se recuperar e permanecer recuperado por um curto período, não retonando imediatamente ao compartimento de indivíduos suscetíveis.

(b) Escreva um sistema de equações diferenciais para estudar a dinâmica da COVID-19.

O sistema de equações diferenciais do modelo SIR é dado por

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) , \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I(t) \end{cases} \quad (8)$$

onde S, I e R são funções de indivíduos suscetíveis, infectados e recuperados, respectivamente, com relação ao tempo t . Além disso, $\beta > 0$ é a taxa de contágio e $\gamma > 0$ é a taxa de recuperação

(c) Se o tempo de contágio é em torno de 10 dias, qual uma estimativa para a taxa de recuperação?

Sabe-se que no modelo SIR o tempo em que uma pessoa permanece infectada é inversamente proporcional à taxa de recuperação. Portanto, $\gamma = \frac{1}{10} = 0,1$.

Questão 4. Considere o seguinte modelo:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = -\frac{\beta}{p+(1-p)(s(t)+i(t)-s(t)i(t))} s(t)i(t) \\ \frac{di}{dt} = \frac{\beta}{p+(1-p)(s(t)+i(t)-s(t)i(t))} s(t)i(t) - \gamma i(t) , \\ \frac{dr}{dt} = \gamma i(t) \end{cases} \quad (9)$$

onde s, i e r estão em proporção, isto é, $s, i, r \in [0, 1]$ e $p \geq 1$.

(a) Para $p = 1$ observe que o modelo (9) coincide com o modelo SIR clássico.

De fato, quando $p = 1$ temos que

$$p + (1 - p)(s(t) + i(t) - s(t)i(t)) = 1.$$

Portanto,

$$\frac{\beta s(t)i(t)}{p + (1 - p)(s(t) + i(t) - s(t)i(t))} = \beta s(t)i(t).$$

Assim, para $p = 1$ os modelos (8) e (9) são iguais.

(b) Verifique que o contágio entre suscetíveis e infectados é enfraquecido à medida que p aumenta.

Suponha que $p_1, p_2 \geq 1$ são tais que $p_1 < p_2$. Devemos mostrar que, para todo $t > 0$,

$$\frac{\beta s(t)i(t)}{p_1 + (1 - p_1)(s(t) + i(t) - s(t)i(t))} \geq \frac{\beta s(t)i(t)}{p_2 + (1 - p_2)(s(t) + i(t) - s(t)i(t))}.$$

Seja $q = s(t) + i(t) - s(t)i(t)$. Queremos mostrar que

$$p_1 + (1 - p_1)q \leq p_2 + (1 - p_2)q.$$

Demonstração. Como $s, i \in [0, 1]$, note que $q \geq 0$, desde que

$$s(t)i(t) \leq s(t) \leq s(t) + i(t).$$

Mais ainda, note que $q \leq 1$, pois

$$q = s(t)(1 - i(t)) + i(t) \leq (1 - i(t)) + i(t) = 1.$$

Assim, como $p_2 - p_1 > 0$,

$$\begin{aligned} q \leq 1 &\Leftrightarrow (p_2 - p_1)q \leq p_2 - p_1 \\ &\Leftrightarrow ((1 - p_1) - (1 - p_2))q \leq p_2 - p_1 \\ &\Leftrightarrow (1 - p_1)q \leq p_2 - p_1 + (1 - p_2)q \\ &\Leftrightarrow p_1 + (1 - p_1)q \leq p_2 + (1 - p_2)q. \end{aligned}$$

□

(c) Interprete p quanto à isolamento social.

Como vimos no item anterior, à medida que p aumenta, o contágio entre suscetíveis e infectados é enfraquecido. Isto é, a partir de p podemos analisar e buscar diminuir a chance de contágio. Sendo assim, este parâmetro pode estar associado às medidas de controle para COVID-19, como o isolamento social.