Exame de qualificação MT401

Prof. Christian Rodrigues e
Prof. Yuri Bozhkov

04 de abril de 2022

Nome: ____

RA: ____

Questões	Notas
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
Total	

- **Desligue o celular.**
- **NÃO retire o grampo da prova nem destaque páginas da prova.**
- **Respostas sem justificativas NÃO serão consideradas.**

Justifique suas respostas!

Q1. Considere o conjunto das funções reais contínuas em $[0,1]$.

a) Prove que via correspondência $f \in C[0,1] \mapsto \int_0^1 |f(x)|dt \in \mathbb{R}$ é possível introduzir uma métrica em $C[0,1]$.

b) Mostre que esta **não** é equivalente à obtida via $||f||_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Q2. Considere o conjunto M das matrizes reais $m \times n$ (com m e n fixos).

a) Mostre que é possível introduzir ao menos uma norma completa neste espaço de modo que este seja Banach.

b) Mostre que, portanto, todas as normas em M são equivalentes.

Q3. Considere o espaço das sequências limitadas escalares (em um corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

$$l^{\infty} = \left\{ (a_j)_{j=1}^{j=\infty} : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j| < \infty \right\},$$

munido da norma

$$||(a_j)_{j=1}^{j=\infty}|| = \sup\{|a_j| : j \in \mathbb{N}\}.$$

a) Seja $M \subset l^{\infty}$ formado por todas as sequências $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ com no máximo um número finito de termos não nulos. M é espaço de Banach? Justifique.

b) Seja $c_0 \subset l^{\infty}$ o subconjunto de todas as subsequências escalares que convergem para zero, ou seja,

$$c_0 = \left\{ (a_j)_{j=1}^{j=\infty} : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } a_j \to 0 \right\}.$$

Mostre que c_0 é espaço de Banach.

Q4. Sejam E um espaço normado e F um subespaço de E. Mostre que existe uma aplicação $T : F' \to E'$ injetora tal que $||T(\varphi)|| = ||\varphi||$ para todo funcional $\varphi \in F'$.

Q5. Prove que,

a) para $p \neq 2$, l_p **não** é um espaço com produto interno.

b) Se (e_k) for uma sequência ortonormal em um espaço com produto interno X, então que para quaisquer $x, y \in X$, temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle| \leq ||x||||y||.$$

Rascunho

Rascunho

Rascunho

MATRIZES - 06/04/22

Resolva somente quatro dos seis exercícios abaixo.

1. O traço de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, denotado por $\mathrm{tr}(A)$, é definido por $\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$.
   (a) Mostre que, para $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.
   (b) Mostre que, para $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
   (c) Mostre que $\|A\|_F^2 = \mathrm{tr}(A^tA) = \mathrm{tr}(AA^t)$.
   (d) Considere que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é normal e que é particionada em
   $$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$
   em que A_{11} e A_{22} são matrizes quadradas. Mostre que $\|A_{21}\|_F = \|A_{12}\|_F$.

2. Seja A uma matriz simétrica definida positiva e a decomposição $A = MD^{-1}M^t$, onde M é triangular inferior com diagonal unitária e D a matriz diagonal da decomposição $A = LDL^t$. Desenvolva um algoritmo para calcular M e D diretamente, sem calcular L. Qual a relação entre M, D e L?

3. Descreva como usar a decomposição QR de uma matriz A de dimensão $m \times n$ com $\mathrm{posto}(A) = r < n < m$ para resolver o problema de quadrados mínimos $Ax = b$.

4. Descreva em detalhe o método das potências inversas.
   Mostre como ele pode ser utilizado para encontrar o autovalor de uma matriz A mais próximo de um dado número α.

5. (a) Mostre que se A é ortogonal, então $\|A\|_2 = 1$ e $\kappa_2(A) = 1$.
   (b) Mostre que, se A e B são similares, então $\|A\|_2 = \|B\|_2$ e $\kappa_2(A) = \kappa_2(B)$.
   (c) Seja $B = U^tAU$, em que U é ortogonal. Mostre que, se A for levemente perturbada, B também o será na mesma intensidade. Mais precisamente, se $B + \delta B = U^t(A + \delta A)U$, então $\|\delta B\|_2 = \|\delta A\|_2$.

6. Escreva $K_F(A)$ em função dos valores singulares da matriz A.

Exame Qualificação – Análise Numérica – 1S/2022

Estudante: RA:

• Escolha **somente 3 (três)** entre as questões abaixo apresentadas para a realização de seu **Exame de Análise Numérica**. Faça uma marcação a caneta, por exemplo, fazendo um círculo na questão para indicar aquelas escolhidas e também escreva aqui os números dessas questões: ....

• Para todos as questões escolhidas, soluções "soltas" ou "desconexas" não serão consideradas. A correção do Exame de Análise Numérica será realizada levando em conta a consistência e organização lógica dos passos corretos e teoricamente fundamentados para a conclusão da resposta, e não meramente resoluções indicadas.

Questão 1

Seja um domínio quadrado unitário $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ e considere uma função $u = u(x,y)$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, tal que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y) \quad \text{em} \quad \Omega, \qquad u(x,y) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma = \partial\Omega, \tag{1}$$

sendo $f(x,y)$ suficientemente suave. Apresente a discretização do método de Diferenças Finitas de cinco pontos para a aproximação numérica do problema de valor de contorno (1), explicando as hipóteses de regularidade/suavidade neste procedimento. Além disso, utilizando a norma $\|A\|_2$, demonstre consistência, estabilidade e convergência para o esquema de 5 pontos de Diferenças Finitas.

Dicas:

- $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$, onde ρ denota o raio espectral.
- $u_{ij}^{p,q} = \sin(p\pi i h)\sin(q\pi j h)$.
- $\lambda_{p,q} = \dfrac{2}{h^2}\left[(\cos(p\pi h) - 1) + (\cos(q\pi h) - 1)\right]$.

Questão 2

Seja o PVI seguinte, sendo $u = u(x,t)$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad x \in \Re, \quad t > 0, \qquad \text{com a condição inicial,} \tag{2}$$

$$u(x, t_0) = \eta(x), \qquad x \in \Re, \quad t_0 = 0, \tag{3}$$

sendo κ constante ($\kappa > 0$). Aplicando ao PVI (2)-(3) aproximações combinadas de diferenças finitas no tempo e no espaço (i.e., $U_j^n \approx u(x_j, t_n)$) pode-se obter o seguinte esquema geral, sendo $r \equiv \kappa \dfrac{k}{h^2}$ e supondo κ constante (por simplicidade):

$$-\alpha\, r\, U_{j-1}^{n+1} + (1 + 2\,\alpha\, r) U_j^{n+1} - \alpha\, r\, U_{j+1}^{n+1} = (1-\alpha)\, r\, U_{j-1}^n + [1 - 2(1-\alpha)\, r] U_j^n + (1-\alpha)\, r\, U_{j+1}^n, \tag{4}$$

$$t_n = n\,k, \quad n = 0, 1, 2 \cdots \qquad x_j = j\,h, \quad j = \cdots -2, -1, 0, 1, 2, \cdots \tag{5}$$

onde $\alpha \in [0,1]$, $k = \Delta t$ denota o passo de tempo e $h = \Delta x$ denota o espaçamento da malha.

Pede–se, com as devidas justificativas de *Análise Numérica*:

(a) Realize uma análise de estabilidade do esquema de diferença finitas (4)-(5) para o PVI (2)-(3), sabendo que $\alpha \in [0,1]$. Observe que a relação de estabilidade pode envolver naturalmente os parâmetros k, h, κ e α.

(b) Supondo que para qualquer $\alpha \in [0, 1]$ sempre se tenha um esquema consistente e estável (seja este incondicionalmente estável ou condicionalmente estável), explique se o teorema de Lax-Richtmyer pode ser usado para estabelecer a conexão entre consistência e estabilidade para convergência do esquema geral (4)-(5) para o PVI (2)-(3).

(c) Note que do esquema geral (4)-(5) tem-se: $\alpha = 0$ resulta no esquema "avançado no tempo e centrado no espaço (FTCS)", $\alpha = 1$ resulta no esquema "recuado no tempo e centrado no espaço (BTCS)", e $\alpha = \dfrac{1}{2}$ resulta no esquema "Crank-Nicolson (CN)". Assim, escreva a equação de diferenças finitas para cada um desses casos para o PVI (2)-(3) e indique se o esquema correspondente é explícito ou implítico. Além disso, utilize o resultado do item (a) para escrever a relação de estabilidade para os métodos FTCS, BTCS e CN.

Questão 3

Mostre um método explícito e estável, com a respectiva análise de consistência, estabilidade e convergência, para aproximação do modelo hiperbólico, supondo u e η suficientemente suaves, e considere a constante $a > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad x \in \Re, \quad t > 0, \qquad u(x, t = 0) = \eta(x). \tag{6}$$

Depois, enuncie o Teorema de Equivalência de Lax-Richtmyer, explicando seu significado fundamental em análise numérica para a aproximação numérica de modelos de equações diferenciais parciais lineares, considerando obrigatoriamente neste contexto a **Análise de Fourier** e a **Identidade de Parseval**.

Além disso, explique o comportamento esperado das aproximações numéricas produzidas pelo método explícito estável via análise da equação modificada.

Questão 4

Considere uma função $f(u)$ Lipschitz contínua que está associada ao Problema de Valor Inicial autônomo (PVI)

$$u' = f(u), \qquad 0 < t \leq T, \qquad u(0) = \eta. \tag{7}$$

Um método linear de r passos para a aproximação de (7) pode posto na forma (com $\alpha_r = 1$):

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j U^{n+j} = \Delta t \sum_{j=0}^{r} \beta_j f(U^{n+j}). \tag{8}$$

a) Defina estabilidade zero para o método (8) e mostre que o mesmo será consistente com o PVI (7) se

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=0}^{r} j\alpha_j = \sum_{j=0}^{r} \beta_j$$

b) Qual é a condição para que o método numérico (8) seja explícito?

Questão 5

Em vista das **Questões 1, 2, 3 e 4**, considere os aspectos teóricos, computacionais e aplicações dos métodos numéricos para resolução aproximada de PVIs e PVCs (aqui pode-se pensar, por exemplo, o caso com domínio quadrado e malha uniforme em 1D e 2D).

Pede-se, com as devidas justificativas,

(a) **Discuta com suas palavras**, eventuais vantagens e desvantagens computacionais sobre métodos numéricos para resoluação aproximada de PVIs, considerando formulações Explícita e Implícita. **Justifique sua resposta, incluindo também argumentos teóricos.**

(b) **Discuta com suas palavras**, eventuais vantagens e desvantagens computacionais sobre métodos numéricos para resolução aproximada de PVCs, considerando o emprego de métodos diretos e iterativos para o tratamento numérico do problema discreto. **Justifique sua resposta, incluindo também argumentos teóricos.**

MT601 – Métodos Computacionais de Otimização
EXAME DE QUALIFICAÇÃO Abril/2022

Justifique todos os argumentos. Respostas sem justificativas **não** serão consideradas.

$\boxed{1}$ Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$, tal que $\nabla^2 f(x)$ é definida positiva para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
(a) Exiba um exemplo onde f não tem pontos estacionários.
(b) Prove que:
(b1) f tem no máximo um ponto estacionário.
(b2) Se x^* é um ponto estacionário de f então x^* é o único minimizador global de f.

$\boxed{2}$ Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$, e considere o problema

$$\text{Minimizar} \quad f(x) \quad \text{sujeita a} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Explique como aplicar métodos quase-Newton e cite vantagens e desvantagens em comparação com o Método de Newton.

$\boxed{3}$ Considere o problema,

$$\text{Otimizar} \quad 5x_1^2 + x_2^2 \quad \text{sujeita a} \quad x_1 + x_2 = 6 \quad \text{e} \quad x_1^2 \le x_2.$$

(a) Identifique todos os pontos estacionários.
(b) Use as condições de otimalidade para classificar os pontos obtidos em (a).
(c) Os minimizadores e maximizadores encontrados são globais? Justifique.

$\boxed{4}$ Sejam $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \le n$ e posto$(A) = m$, $b \in \mathbb{R}^m$ e considere o problema de encontrar a solução do sistema linear $Ax = b$ com norma–2 mínima (PM),

$$\text{Minimizar} \quad \|x\|_2^2 \quad \text{sujeita a} \quad Ax = b,$$

e o subproblema penalizado (PP),

$$\text{Minimizar} \quad \|x\|_2^2 + \rho\|Ax - b\|_2^2,$$

em que $\rho > 0$.
(a) Prove que (PM) tem solução única e exiba a solução x^*.
(b) Prove que (PP) tem solução única e exiba a solução $x(\rho)$.
(c) Prove que $\lim_{\rho \to \infty} x(\rho) = x^*$.
(d) Exiba um exemplo com $n = 2$ e $m = 1$ e analise geometricamente os resultados provados.

$\boxed{5}$ Sejam $f, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f, h \in C^2$, e considere o problema de otimização

$$\text{Minimizar} \ f(x) \quad \text{sujeita a} \quad h(x) = 0.$$

Seja $x^* \in \mathbb{R}^n$ um ponto regular satisfazendo as condições de otimalidade suficientes de segunda ordem, com multiplicador de Lagrange associado $\lambda^* \in \mathbb{R}$. Prove que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, o problema perturbado

$$\text{Minimizar} \ f(x) \quad \text{sujeita a} \quad h(x) = t,$$

admite um ponto estacionário $\widehat{x}(t)$, tal que $\widehat{x}(t)\Big|_{t=0} = x^*$ e $\dfrac{d}{dt} f(\widehat{x}(t))\Big|_{t=0} = -\lambda^*$.

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
$\sum$	

ALUNO	RA

QUALIFICAÇÃO – BIOMATEMÁTICA – 08/04/2022

INSTRUÇÕES

SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

Boa Prova!

Questão 1. A equação de Ricker

$$N_{n+1} = \alpha N_n e^{-\beta N_n}, \tag{1}$$

em que $\alpha > 0$ representa o crescimento máximo e $\beta > 0$ uma inibição causada por superpopulação, é um modelo empírico usado para descrever populações, por exemplo, de peixes.

(a) Determine um estado estacionário $\bar{N}$ não-trivial de (1)

(b) Classifique a estabilidade do estado estacionário $\bar{N}$ do item anterior considerando a desigualdade $|1 - \ln \alpha| < 1$.

Questão 2. Os neandertais viveram na Europa por mais de 60.000 anos. No entanto, eles foram substituídos pelos homens modernos gradualmente. Estudos indicam que a extinção dos neandertais demorou entre 5.000 e 10.000 anos. Houve, portanto, um período em que os neandertais coexistiram com os homens modernos. Nesse período de coexistência, pode ter ocorrido uma interação direta (guerra) ou indireta (concorrência) entre as duas espécies. Admitindo que os neandertais e os homens modernos competiram pelo mesmo nicho ecológico, com nutrientes e territórios limitados, Flores apresentou o seguinte modelo para descrever a interação entre as duas espécies (J. theor. Biol. (1998) 191, 295–298): Sejam $N \equiv N(t)$ e $M \equiv M(t)$ as populações de neandertais e homens modernos, respectivamente. Sejam α e β, com $0 < \beta < \alpha$, taxas de natalidade e mortalidade, $\delta > 0$ e $s \in (0,1)$ um parâmetro que descreve a similaridade na taxa de mortalidade entre as duas espécies. A dinâmica das populações de neandertais e homens modernos é dada por

$$\frac{dN}{dt} = N(\alpha - \delta(N+C) - \beta), \tag{2}$$

$$\frac{dN}{dt} = C(\alpha - \delta(N+C) - s\beta), \tag{3}$$

(a) Interprete o parâmetro δ em (2) e (3). O que pode ser dito sobre a natalidade e mortalidade das duas espécies?

(b) Determine os três estados estacionários do modelo de Flores descrito por (2) e (3).

(c) Classifique os estados estacionários obtidos no item anterior.

(d) As equações (2) e (3) justificam a extinção dos neandertais?

Questão 3. Considere uma situação ambiental com uma presa e dois predadores que por ela competem. Suponha uma homogeneidade espacial das três espécies, por exemplo, uma ave como predadora - sabiá, pardal, cardeal, beija-flor - predando percevejos (hemiptera) e besouros (coleoptera) em jardins e plantações. Esboce um modelo que descreva essa convivência, justificando suas escolhas quanto aos termos do sistema resultante. Esse tipo de ave come sementes, frutos, brotos, por exemplo, mas sempre precisa de insetos na dieta por causa do alto teor proteico.

Questão 4. Discorra sobre um tema de *MT624 – Biomatemática I* que as questões anteriores não abordaram. Justifique sua escolha do tema.

FOLHA EXTRA