MT601 – Métodos Computacionais de Otimização
EXAME DE QUALIFICAÇÃO Abril/2022

Justifique todos os argumentos. Respostas sem justificativas **não** serão consideradas.

$\boxed{1}$ Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$, tal que $\nabla^2 f(x)$ é definida positiva para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
(a) Exiba um exemplo onde f não tem pontos estacionários.
(b) Prove que:
(b1) f tem no máximo um ponto estacionário.
(b2) Se x^* é um ponto estacionário de f então x^* é o único minimizador global de f.

$\boxed{2}$ Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$, e considere o problema

$$\text{Minimizar} \quad f(x) \quad \text{sujeita a} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Explique como aplicar métodos quase-Newton e cite vantagens e desvantagens em comparação com o Método de Newton.

$\boxed{3}$ Considere o problema,

$$\text{Otimizar} \quad 5x_1^2 + x_2^2 \quad \text{sujeita a} \quad x_1 + x_2 = 6 \quad \text{e} \quad x_1^2 \leq x_2.$$

(a) Identifique todos os pontos estacionários.
(b) Use as condições de otimalidade para classificar os pontos obtidos em (a).
(c) Os minimizadores e maximizadores encontrados são globais? Justifique.

$\boxed{4}$ Sejam $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \leq n$ e posto$(A) = m$, $b \in \mathbb{R}^m$ e considere o problema de encontrar a solução do sistema linear $Ax = b$ com norma–2 mínima (PM),

$$\text{Minimizar} \quad \|x\|_2^2 \quad \text{sujeita a} \quad Ax = b,$$

e o subproblema penalizado (PP),

$$\text{Minimizar} \quad \|x\|_2^2 + \rho \|Ax - b\|_2^2,$$

em que $\rho > 0$.
(a) Prove que (PM) tem solução única e exiba a solução x^*.
(b) Prove que (PP) tem solução única e exiba a solução $x(\rho)$.
(c) Prove que $\lim_{\rho \to \infty} x(\rho) = x^*$.
(d) Exiba um exemplo com $n = 2$ e $m = 1$ e analise geometricamente os resultados provados.

$\boxed{5}$ Sejam $f, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f, h \in C^2$, e considere o problema de otimização

$$\text{Minimizar } f(x) \quad \text{sujeita a} \quad h(x) = 0.$$

Seja $x^* \in \mathbb{R}^n$ um ponto regular satisfazendo as condições de otimalidade suficientes de segunda ordem, com multiplicador de Lagrange associado $\lambda^* \in \mathbb{R}$. Prove que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, o problema perturbado

$$\text{Minimizar } f(x) \quad \text{sujeita a} \quad h(x) = t,$$

admite um ponto estacionário $\widehat{x}(t)$, tal que $\widehat{x}(t)\Big|_{t=0} = x^*$ e $\dfrac{d}{dt} f(\widehat{x}(t))\Big|_{t=0} = -\lambda^*$.

ALUNO	RA

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
$\sum$	

QUALIFICAÇÃO – BIOMATEMÁTICA – 08/04/2022

INSTRUÇÕES

SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

Boa Prova!

Questão 1. A equação de Ricker

$$N_{n+1} = \alpha N_n e^{-\beta N_n}, \tag{1}$$

em que $\alpha > 0$ representa o crescimento máximo e $\beta > 0$ uma inibição causada por superpopulação, é um modelo empírico usado para descrever populações, por exemplo, de peixes.

(a) Determine um estado estacionário $\bar{N}$ não-trivial de (1)

(b) Classifique a estabilidade do estado estacionário $\bar{N}$ do item anterior considerando a desigualdade $|1 - \ln \alpha| < 1$.

Questão 2. Os neandertais viveram na Europa por mais de 60.000 anos. No entanto, eles foram substituídos pelos homens modernos gradualmente. Estudos indicam que a extinção dos neandertais demorou entre 5.000 e 10.000 anos. Houve, portanto, um período em que os neandertais coexistiram com os homens modernos. Nesse período de coexistência, pode ter ocorrido uma interação direta (guerra) ou indireta (concorrência) entre as duas espécies. Admitindo que os neandertais e os homens modernos competiram pelo mesmo nicho ecológico, com nutrientes e territórios limitados, Flores apresentou o seguinte modelo para descrever a interação entre as duas espécies (J. theor. Biol. (1998) 191, 295–298): Sejam $N \equiv N(t)$ e $M \equiv M(t)$ as populações de neandertais e homens modernos, respectivemente. Sejam α e β, com $0 < \beta < \alpha$, taxas de natalidade e mortalidade, $\delta > 0$ e $s \in (0, 1)$ um parâmetro que descreve a similaridade na taxa de mortalidade entre as duas espécies. A dinâmica das populações de neandertais e homens modernos é dada por

$$\frac{dN}{dt} = N(\alpha - \delta(N + C) - \beta), \tag{2}$$

$$\frac{dN}{dt} = C(\alpha - \delta(N + C) - s\beta), \tag{3}$$

(a) Interprete o parâmetro δ em (2) e (3). O que pode ser dito sobre a natalidade e mortalidade das duas espécies?

(b) Determine os três estados estacionários do modelo de Flores descrito por (2) e (3).

(c) Classifique os estados estacionários obtidos no item anterior.

(d) As equações (2) e (3) justificam a extinção dos neandertais?

Questão 3. Considere uma situação ambiental com uma presa e dois predadores que por ela competem. Suponha uma homogeneidade espacial das três espécies, por exemplo, uma ave como predadora - sabiá, pardal, cardeal, beija-flor - predando percevejos (hemiptera) e besouros (coleoptera) em jardins e plantações. Esboce um modelo que descreva essa convivência, justificando suas escolhas quanto aos termos do sistema resultante. Esse tipo de ave come sementes, frutos, brotos, por exemplo, mas sempre precisa de insetos na dieta por causa do alto teor proteico.

Questão 4. Discorra sobre um tema de *MT624 – Biomatemática I* que as questões anteriores não abordaram. Justifique sua escolha do tema.

FOLHA EXTRA