Exercícios Aula PED

MA311 — Cálculo III

1o. semestre de 2018

Equações lineares de primeira ordem; fatores integrantes

1. Resolva as seguintes equações lineares de primeira ordem:

   (a) $y' + 2xy = x; \quad y(0) = -2$

   (b) $xy' = 3y + x^4 \cos x; \quad y(2\pi) = 0$

   (c) $xy' + (2x - 3)y = 4x^4$

   (d) $(x^2 + 4)y' + 3xy = x; \quad y(0) = 1$

Equações separáveis

1. Resolva a equação linear de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy$$

2. Encontre uma solução particular explícita para os problemas de valor inicial

   (a) $2y\frac{dy}{dx} = x(x^2 - 16)^{-\frac{1}{2}};\ y(5) = 2$

   (b) $\frac{dy}{dx} = 2xy^2 + 3x^2y^2;\ y(1) = -1$

Métodos de substituição; Bernoulli

1. Encontre a solução geral para as equações diferenciais em cada um dos problemas abaixo, onde y' representa a derivada de y com relação a x.

   (a) $yy' + x = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$

(b) $y' = y + y^3$

(c) $xy' + 6y = 3xy^{\frac{4}{3}}$

2. Resolva a equação
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y - 1}{x + y + 3}$$

Equações exatas; fatores integrantes

1. Verifique que a equação diferencial abaixo é exata, e resolva-a.
$$(e^x \operatorname{sen} y + \operatorname{tg} y)dx + (e^x \cos y + x \sec^2 y)dy = 0$$

2. Resolva cada uma das equações diferenciais abaixo, encontrando um fator integrante que é uma função de uma única variável.

   (a) $2xy\,dx + (y^2 - x^2)\,dy = 0$

   (b) $(y \ln y + ye^x)\,dx + (x + y \cos y)\,dy = 0$

   (c) $2x\,dy + x^2 \operatorname{cotg} y\,dy = 0$

Redução à primeira ordem

1. Resolva as equações diferenciais abaixo, reduzindo-as à primeira ordem.

   (a) $x^2 y'' + 3xy' = 2$

   (b) $yy'' + (y')^2 = yy'$, com $y, y' > 0$

   (c) $y'' = 2yy'$, com $y, y' > 0$

Teorema de existência e unicidade

Equações lineares homogêneas com coeficientes constantes

1. Determine uma solução geral para cada uma das equações diferenciais a seguir:

   (a) $2y'' - 7y' + 3y = 0$

   (b) $y''' - 3y'' + 2y' = 0$

   (c) $(D - 7)\,(D + 4)\,y = 0$

   (d) $\left(D - \frac{3}{2}\right)\left(D + \frac{1}{2}\right)(D + 5)\,y = 0$ $\left(\text{explicar } D = \frac{d}{dx}\right)$

Wronskiano; independência linear

1. Deduzir a Fórmula de Abel.

2. Verifique que $y_1 = x$ e $y_2 = x^2$ são soluções linearmente independentes da equação $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$, mas que $W(x, x^2)$ é igual a zero em $x = 0$. Por que isso não contradiz o Teorema de Wronskianos de Soluções?

3. Sejam $f(x) = 5$, $g(x) = 2-3x^2$ e $h(x) = 10+15x^2$. Mostre diretamente que as funções dadas são linearmente dependentes na reta real. Isto é, encontre uma combinação linear não-trivial das funções dadas que se anula identicamente.

4. Sejam $f(x) = x$, $g(x) = xe^x$ e $h(x) = x^2e^x$ definidas na reta real. Use o Wronskiano para provar que as funções dadas são linearmente independentes no intervalo indicado.

Raízes complexas; raízes repetidas

1. Determine uma solução geral para a equação diferencial
$$y^{(4)} - 8y^{(3)} + 16y'' = 0.$$

2. Resolva:
   (a) $y'' + 6y' + 9y = 0$
   (b) $4y'' - 12y' + 9y = 0$

3. Resolva os problemas de valor inicial a seguir:
   (a) $y'' - 6y' + 25y = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$
   (b) $3y^{(3)} + 2y'' = 0$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$

4. Determine uma solução geral para a equação $y^{(3)} + 27y = 0$. Primeiro encontre por verificação uma raiz inteira pequena da equação característica, depois fatore por divisão.

Método dos coeficientes indeterminados

1. Em cada um dos ítens, encontre uma solução particular y_p da equação dada.

   (a) $y'' + 2y' + 5y = e^x \text{sen } x$

   (b) $y^{(5)} + 5y^{(4)} - y = 17$

   (c) $y^{(5)} + 2y^{(3)} + 2y'' = 3x^2 - 1$

2. Em cada um dos ítens, monte a forma apropriada de uma solução particular y_p, mas não determine os valores dos coeficientes.

   (a) $y'' + 3y' + 2y = x(e^{-x} - e^{-2x})$

   (b) $y^{(4)} + 9y'' = (x^2 + 1)\text{sen } (3x)$

   (c) $(D - 1)^3(D^2 - 4)y = xe^x + e^{2x} + e^{-2x}$

Método de redução de ordem

1. Em cada item, é dado uma equação diferencial e uma solução y_1. Substitua $y_2 = vy_1$ na equação e encontre uma segunda solução y_2, linearmente independente à y_1.

   (a) $x^2y'' + xy' - 9y = 0; \quad y_1 = x^3$

   (b) $x^2y'' - x(x + 2)y' + (x + 2)y = 0; \quad y_1 = x$

Equações de Euler-Cauchy

1. Encontre soluções gerais para as seguinte equações de Euler-Cauchy:

   (a) $x^2y'' + xy' = 0$

   (b) $4x^2y'' + 8xy' - 3y = 0$

   (c) $x^2y'' - xy' + 2y = 0$

   (d) $x^2y'' + 7xy' + 25y = 0$

Método de variação de parâmetros

1. Use o método da variação dos parâmetros para encontrar uma solução particular da equação diferencial dada:

    (a) $y'' + 9y = 2\sec(3x)$
    (b) $y'' - 2y' + y = x^{-2}e^{x}$
    (c) $y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}$

Transformada de Laplace

1. Resolva os seguintes problemas de valor inicial através da transformada de Laplace:

    (a) $x'' + x = \cos(3t); \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0$
    (b) $x'' + 3x' + 2x = t; \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 2$
    (c) $x'' - 4x = 3t; \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 0$

2. Encontre a transformada inversa:

    (a) $F(s) = \dfrac{1}{s(s-3)}$
    (b) $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$

Transformada de Laplace: teorema da translação

1. Use o teorema da translação para encontrar a transformada de Laplace:

    (a) $f(t) = t^{3/2}e^{-4t}$
    (b) $f(t) = e^{-t/2}\cos(2(t - \frac{\pi}{8}))$

2. Use o teorema da translação para encontrar a transformada inversa:

    (a) $F(s) = \dfrac{s-1}{(s+1)^3}$
    (b) $F(s) = \dfrac{s+2}{s^2+4s+5}$

Transformada de Laplace: frações parciais

1. Use o frações parciais para encontrar a transformada inversa:

   (a) $F(s) = \dfrac{5-2s}{s^2+7s+10}$

   (b) $F(s) = \dfrac{1}{s^4-16}$

Transformada de Laplace: função delta

1. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

   (a) $x'' + 4x' + 4x = 1 + \delta(t-2); \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 0$

   (b) $x'' + 4x' + 5x = \delta(t-\pi) + \delta(t-2\pi); \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 2$

Sistemas de equações lineares

1. Aplique o método de autovalores para encontrar a solução geral dos sistemas abaixo. Se os valores iniciais forem dados, encontre também a solução particular.

   (a) $x_1' = 6x_1 - 7x_2$
   $x_2' = x_1 - 2x_2$

   (b) $x_1' = 2x_1 - 5x_2$
   $x_2' = 4x_1 - 2x_2$
   $x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 3$

   (c) $x_1' = x_1 - 2x_2$
   $x_2' = 2x_1 + x_2$
   $x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 4$

   (d) $x_1' = 7x_1 - 5x_2$
   $x_2' = 4x_1 + 3x_2$

   (e) $x_1' = 4x_1 + x_2 + 4x_3$
   $x_2' = x_1 + 7x_2 + x_3$
   $x_3' = 4x_1 + x_2 + 4x_3$

2. Encontre a solução geral dos sistemas dados:

   (a) $x' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} x$

(b) $x' = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} x$

Sistemas de equações lineares não-homogêneos

1. Aplique o método dos coeficientes indeterminados para encontrar uma solução particular de cada um dos sistemas nos problemas abaixo. Se forem dadas condições iniciais, encontre a solução particular que satisfaz essas condições.

   (a) $x' = 3x + 4y, \quad y' = 3x + 2y + t^2; \quad x(0) = y(0) = 0$

   (b) $x' = x - 5y + \cos 2t, \quad y' = x - y$

2. Aplique o método da variação dos parâmetros para encontrar uma solução particular de cada um dos sistemas dados.

   (a) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2t \\ 3 \end{bmatrix}$

   (b) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{bmatrix}$

   (c) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} e^{2t} \operatorname{tg} t \\ 0 \end{bmatrix}$

Sequências numéricas

1. Nos seguintes problemas, determine se as sequências convergem ou divergem. Se convergirem, determine o limite.

   (a) $\left\{ \cos\left(\frac{n-1}{n^2} \right) \right\}$

   (b) $\left\{ \frac{n^{3/2} + 2}{2n^{3/2}} \right\}$

   (c) $\left\{ \operatorname{arctg}\left(\frac{n+2}{2} \right) \right\}$

   (d) $\left\{ n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n} \right) \right\}$

2. Determine os limites das seguintes sequências:

(a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^n$

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3}$

Séries: Testes de convergência

1. Determine a convergência das seguintes séries. Se convergirem, determine a sua soma.

   (a) $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k^2-9}$

   (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}+6.7^{k+5}}{8^{k+2}}$

2. Escreva a fração decimal abaixo como: (a) Uma série infinita; (b) O quociente de dois inteiros:

   (a) $0,9292\overline{92}...$

3. Determine a convergência ou divergência das séries e explicite o teste utilizado:

   (a) $\sum \frac{(3k)!}{(k!)^3}$

   (b) $\sum \left(\frac{k}{1+k^3}\right)^k$

Séries alternadas

1. Nos exercícios abaixo, verifique se a série: (a) converge absolutamente; (b) converge condicionalmente.

   (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{2^{k+2}}$

   (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k!}{6^k}$

Séries de potência

1. Encontre o intervalo de convergência das seguintes séries de potência:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2k}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)!}{2k!} x^{2k}$

2. Encontre uma representação por séries de potências das seguintes funções. Utilize o teorema sobre a integração de séries de potências. Determine o raio de convergência.

   (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^4}$

   (b) $\ln(1+x^2)$

3. Encontre a série de Taylor ou MacLaurin em torno do ponto c dado para as seguintes funções. Determine os valores de x para os quais a série converge.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}(x-1)^k$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$

4. Encontre uma representação por séries de potências das seguintes funções. Determine o raio de convergência.

   (a) $f(x) = \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$

Solução em série: ponto ordinário

1. Resolva as equações diferenciais lineares de segunda ordem com $x = 0$ como ponto ordinário:

   (a) $y'' + xy' + y = 0$

   (b) $(x^2-1)y'' + 8xy' + 12y = 0$

   (c) $y'' + x^2y' + 2xy = 0$

Solução em série: pontos singular regular

1. Determine se $x = 0$ é um ponto ordinário, um ponto singular regular, ou um ponto singular irregular. Se for um ponto singular regular, encontre os expoentes da equação diferencial em $x = 0$:

   (a) $x(1+x)y'' + 2y' + 3xy = 0$

2. Encontre duas soluções linearmente independentes em séries de Frobenius (para x > 0) em cada uma das equações diferenciais abaixo.

   (a) $2xy'' - y' - y = 0$
   (b) $6x^2y'' + 7xy' - (x^2 + 2)y = 0$
   (c) $2xy'' + (1+x)y' + y = 0$

Séries de Fourier

1. Abaixo apresenta-se os valores que uma função de período 2π assume em um período. Esboce o gráfico dessa função para diversos períodos e encontre sua série de Fourier.

$$f(t) = |t|; \; -\pi \leq t \leq \pi$$

2. Os valores assumidos por duas funções periódicas são apresentados abaixo. Nas descontinuidades o valor de $f(t)$ corresponde a media entre os valores de fronteira. Esboce os gráficos dessas funções e encontre as respectivas séries de Fourier.

   (a) $f(t) = \begin{cases} 0; \; 0 < t < 1 \\ 1; \; 1 < t < 2 \\ 0; \; 2 < t < 3 \end{cases}$
   (b) $f(t) = \cos(\frac{\pi t}{2}); \; -1 < t < 1$

3. Abaixo se encontra os valores assumidos por uma função f em um intervalo $0 < t < L$. Encontre a séries de Fourier em senos e em cossenos de f e esboce os gráficos das extensões da f para as quais as duas séries convergem.

   (a) $f(t) = 1 - t; \; 0 < t < 2$
   (b) $f(t) = \begin{cases} 0; \; 0 < t < 1 \\ 1; \; 1 < t < 2 \\ 0; \; 2 < t < 3 \end{cases}$

Método de separação de variáveis

1. Encontre a solução do problema de condução do calor

$$\begin{cases} u_{xx} = 4u_t; & 0 < x < 2,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0,\ u(2,t) = 0; & t > 0 \\ u(x,0) = 2\text{sen }(\frac{\pi x}{2}) - \text{sen }(\pi x) + 4\text{sen }(2\pi x); & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

2. Encontre a solução do problema de condução do calor

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t; & 0 < x < 40,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0,\ u(40,t) = 0; & t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} x; & 0 \leq x < 20 \\ 40 - x; & 20 \leq x \leq 40 \end{cases} & \end{cases}$$

3. Encontre a solução do problema de condução do calor

$$\begin{cases} u_{xx} = 4u_t; & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(L,t) = 0; & t > 0 \\ u(x,0) = 6 + 4\cos(\frac{3\pi x}{L}); & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

4. Encontre a solução do problema de vibrações de uma corda elástica

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt}; & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0; & t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 2x; & 0 \leq x < 1/2 \\ 2(1-x); & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} & \\ u_t(x,0) = 0; & 0 < x < 1 \end{cases}$$

5. Encontre a solução do problema de vibrações de uma corda elástica

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt}; & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0; & t > 0 \\ u(x,0) = 0; & 0 < x < 1 \\ u_t(x,0) = \begin{cases} 2x; & 0 \leq x < 1/2 \\ 2(1-x); & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} & \end{cases}$$