

Caracterizações algébrica e geométrica associadas ao gênero 3 no processo de quantização do canal $C_{2,8}$

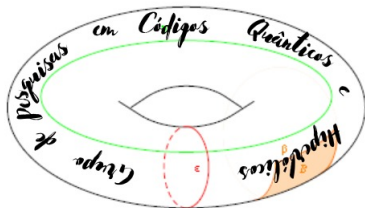
Anderson José de Oliveira

Encontro de Códigos, Reticulados e Informação

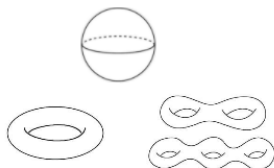
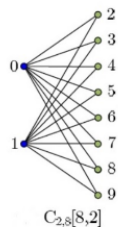
15 de junho de 2023

Informações iniciais

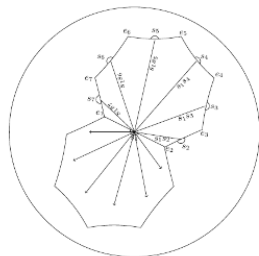
Trabalho desenvolvido pelo grupo de pesquisa em Códigos Quânticos e Hiperbólicos: Cátia Regina de Oliveira Quilles Queiroz - UNIFAL-MG, Giuliano Gadioli La Guardia - UEPG, Clarice Dias de Albuquerque - UFCA, Leandro Bezerra de Lima - UFMS, Vandenberg Lopes Vieira - UEPB, Reginaldo Palazzo Jr. - UNICAMP.



Motivação



$$0 \leq g \leq 3$$



$$y^2 = a(z), \partial a(z) = 2g + 1 \text{ ou } \partial a(z) = 2g + 2$$



$$y^{(n)}(z) + p_1(z)y^{(n-1)}(z) + \cdots + p_{n-1}(z)y'(z) + p_n(z)y(z) = 0$$

Estrutura da Apresentação

- 1 Introdução
- 2 Revisão de Conceitos
- 3 Resultados
- 4 Perspectivas Futuras
- 5 Referências Bibliográficas

Introdução

Neste trabalho serão considerados os passos a serem seguidos na análise e interpretação do problema de quantização do canal $C_{2,8}$:

Introdução

Neste trabalho serão considerados os passos a serem seguidos na análise e interpretação do problema de quantização do canal $C_{2,8}$:

- 1 Determinar o intervalo, do gênero mínimo ao máximo, associado ao mergulho do canal DMC;

Introdução

Neste trabalho serão considerados os passos a serem seguidos na análise e interpretação do problema de quantização do canal $C_{2,8}$:

- 1 Determinar o intervalo, do gênero mínimo ao máximo, associado ao mergulho do canal DMC;
- 2 Estabeleça a curva algébrica para cada gênero da Etapa 1;

Introdução

Neste trabalho serão considerados os passos a serem seguidos na análise e interpretação do problema de quantização do canal $C_{2,8}$:

- 1 Determinar o intervalo, do gênero mínimo ao máximo, associado ao mergulho do canal DMC;
- 2 Estabeleça a curva algébrica para cada gênero da Etapa 1;
- 3 Identifique a equação diferencial linear de segunda ordem para cada curva algébrica associada da Etapa 2;

Introdução

Neste trabalho serão considerados os passos a serem seguidos na análise e interpretação do problema de quantização do canal $C_{2,8}$:

- 1 Determinar o intervalo, do gênero mínimo ao máximo, associado ao mergulho do canal DMC;
- 2 Estabeleça a curva algébrica para cada gênero da Etapa 1;
- 3 Identifique a equação diferencial linear de segunda ordem para cada curva algébrica associada da Etapa 2;
- 4 Determine as estruturas geométrica (emparelhamentos do polígono e tesselação associada) e algébrica (geradores de grupos fuchsianos) associadas à região fundamental de cada superfície/curva algébrica.

Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar a caracterização algébrica (geradores do grupo fuchsiano) e a geométrica (pareamentos do polígono e tesselação associada), relacionadas ao gênero $g = 3$, no processo de quantização do canal $C_{2,8}$, que pode ser mergulhado em superfícies de gênero $0 \leq g \leq 3$, por meio de uma equação diferencial fuchsiana de segunda ordem.

EDOs Fuchsianas

Definição:

Dizemos que a equação:

$$y^{(n)}(z) + p_1(z)y^{(n-1)}(z) + \cdots + p_{n-1}(z)y'(z) + p_n(z)y(z) = 0, \quad (1)$$

é uma equação de **Fuchs** ou uma equação do tipo **fuchsiana** se todo ponto singular no plano complexo estendido for **regular**.

EDOs Fuchsianas

Para o caso da equação de segunda ordem

$$y''(z) + p_1(z)y'(z) + p_2(z)y(z) = 0, \quad (2)$$

um ponto singular é dito regular se a singularidade em $p_1(z)$ for um polo simples e em $p_2(z)$ for no máximo um polo de ordem 2.

Uma equação diferencial ordinária (EDO) de segunda ordem com n pontos singulares é da forma

$$y''(z) + p(z)y'(z) + q(z)y(z) = 0, \quad (3)$$

EDOs Fuchsianas

com

$$p(z) = \frac{A_1}{z - \xi_1} + \cdots + \frac{A_n}{z - \xi_n} + K_1,$$

$$q(z) = \frac{B_1}{(z - \xi_1)^2} + \frac{C_1}{z - \xi_1} + \cdots + \frac{B_n}{(z - \xi_n)^2} + \frac{C_n}{z - \xi_n} + K_2,$$

onde

$$A_1 + \cdots + A_n = 2,$$

$$C_1 + \cdots + C_n = 0,$$

$$(B_1 + \cdots + B_n) + (\xi_1 C_1 + \cdots + \xi_n C_n) = 0,$$

$$(2\xi_1 B_1 + \cdots + 2\xi_n B_n) + (\xi_1^2 C_1 + \cdots + \xi_n^2 C_n) = 0.$$

Elementos de geometria hiperbólica

Definição:

As transformações identificadas em $PSL(2, \mathbb{Z})$ são classificadas em três tipos, de acordo com o valor do módulo do traço da matriz associada. Seja $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, com $ad - bc = 1$. Então, T é uma transformação elíptica, se $Tr(T) = |a + d| < 2$, uma transformação parabólica, se $Tr(T) = |a + d| = 2$, e uma transformação hiperbólica, se $Tr(T) = |a + d| > 2$.

Elementos de geometria hiperbólica

Proposição:

As transformações de Möbius são isometrias, isto é, um subgrupo do grupo de isometrias do semiplano superior $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$.

Definição:

Uma tesselação regular do plano hiperbólico é uma partição composta por polígonos, todos congruentes, sujeitos à restrição de interceptar apenas nas arestas e vértices, de modo a ter o mesmo número de polígonos compartilhando um mesmo vértice, independente do vértice. Portanto, existem infinitas tesselações regulares em \mathbb{H}^2 .

Definições e conceitos relacionados a grafos, superfícies e uniformização

Definição:

Um grafo G é chamado um *mergulho* em uma superfície Ω quando duas de suas arestas não se encontram, exceto em um vértice. O complementar de G em Ω é chamado *região*. Uma região que é homeomorfa (equivalência topológica) a um disco aberto é chamada *2-cell*; se a região inteira é uma 2-cell, o mergulho é chamado *2-cell embedding*.

Definições e conceitos relacionados a grafos e superfícies

Definição:

Um *grafo completo biparticionado* com m e n vértices, denotado por $K_{m,n}$, é um grafo consistindo de dois conjuntos de vértices disjuntos m e n , onde cada vértice do conjunto é conectado por uma aresta a todos os vértices do outro conjunto.

Resultados

Como estamos interessados em um 2-cell embedding de um grafo completo biparticionado $K_{2,8}$, segue que os gêneros mínimo e máximo da superfície correspondente são dados por:

Resultados

(i) o gênero mínimo de uma superfície compacta orientável é:

$$g_{\min}(K_{2,8}) = \{(m-2)(n-2)/4\} = \{0\} = 0, \quad (4)$$

onde $\{a\}$ denota o menor inteiro maior que ou igual ao número real a .

(ii) o gênero máximo de uma superfície compacta orientável é:

$$g_{\max}(K_{2,8}) = [(m-1)(n-1)/2] = [3.5] = 3, \quad (5)$$

onde $[a]$ denota o maior inteiro menor que ou igual ao número real a .

Resultados

- $g_{min} = 0$ e $g_{max} = 3$ implica que $0 \leq g \leq 3$;
- Consideramos apenas o caso onde $g = 3$ devido a suas especificidades;
- A curva algébrica planar correspondente é $y^2 = z^7 - 1$;
- As sete singularidades podem ser vistas como os vértices de um heptágono regular como mostrado na Figura 1.

Resultados

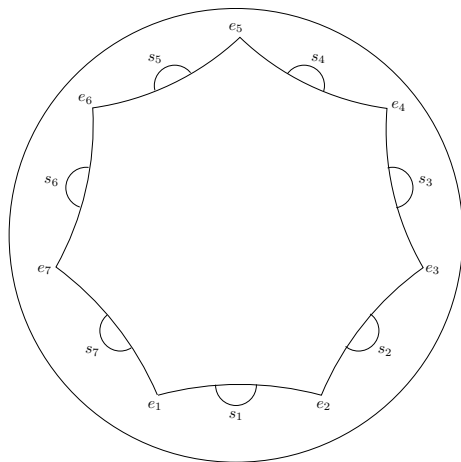


Figura 1: Singularidades da curva $y^2 = z^7 - 1$.

Resultados

A equação diferencial fuchsiana correspondente é dada por:

$$(z^7 - 14z^5 + 49z^3 - 36z)y'' + \left[(z^7 - 14z^5 + 49z^3 - 36z) \left(\frac{2}{z+1} + k_1 \right) \right] y' + [(z^7 - 14z^5 + 49z^3 - 36z) \cdot k_2] y = 0, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

Resultados

As soluções linearmente independentes de (6) resultam em transformações elípticas da forma:

$$S_i(t) = \frac{a_i t + b_i}{c_i t + d_i}, \quad \text{com } |a_i + d_i| = 0, \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq 7. \quad (7)$$

Resultados

- Transformações elípticas \rightarrow geradores do grupo fuchsiano.
- Subgrupo associado à região fundamental que uniformizará a curva algébrica:
 - Fixe uma dessas transformações elípticas e multiplique pelas restantes.

Observe a Figura 2, a seguir.

Resultados

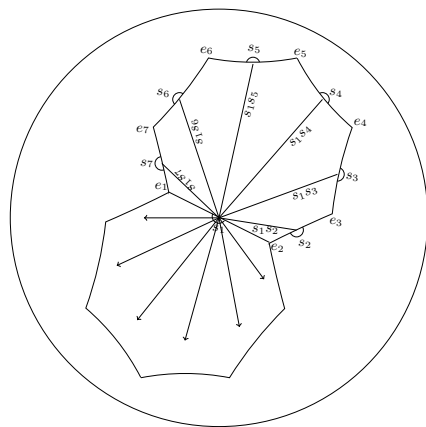


Figura 2: Transformações de Möbius.

Resultados

$$S_1 S_2 = \begin{pmatrix} 1.400969 + 0.3197621i & 1.0060962 - 0.2296349i \\ 1.0060962 + 0.2296349i & 1.400969 - 0.3197621i \end{pmatrix}.$$

$$S_1 S_3 = \begin{pmatrix} 1.62349 - 0.1423075i & 1.0060962 + 0.802335i \\ 1.0060962 - 0.802335i & 1.62349 + 0.1423075i \end{pmatrix}.$$

Resultados

$$S_1 S_4 = \begin{pmatrix} 1.1234898 - 0.2564293i & -2.220D - 16 + 0.5727001i \\ -2.220D - 16 - 0.5727001i & 1.1234898 + 0.2564293i \end{pmatrix}.$$

$$S_1 S_5 = \begin{pmatrix} 1.1234898 + 0.2564293i & 0.447755 - 0.3570727i \\ 0.447755 + 0.3570727i & 1.1234898 - 0.2564293i \end{pmatrix}.$$

Resultados

$$S_1 S_6 = \begin{pmatrix} 1.62349 + 0.1423075i & 1.2545815 + 0.28635i \\ 1.2545815 - 0.28635i & 1.62349 - 0.1423075i \end{pmatrix}.$$

$$S_1 S_7 = \begin{pmatrix} 1.400969 - 0.3197621i & 0.447755 + 0.9297727i \\ 0.447755 - 0.9297727i & 1.400969 + 0.3197621i \end{pmatrix}.$$

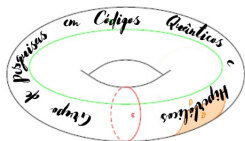
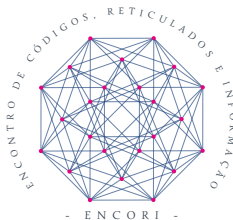
Perspectivas futuras

- Canal $C_{2,8}$ - e os demais casos?
 - $g = 2$: $y^2 = (z^5 - 1)$;
 - $g = 2$: $y^2 = (z^6 - 1)$;
 - $g = 3$: $y^2 = (z^7 - 1)$;
 - $g = 3$: $y^2 = (z^8 - 1)$.

Perspectivas futuras

- Canal $C_{2,8}$ - e os demais casos?
 - $g = 2$: $y^2 = (z^5 - 1)$;
 - $g = 2$: $y^2 = (z^6 - 1)$;
 - $g = 3$: $y^2 = (z^7 - 1)$;
 - $g = 3$: $y^2 = (z^8 - 1)$.
- CNMAC 2023 - Minissimpósio “Códigos Quânticos e Hiperbólicos Corretores de Erros” (MS03), 19/09/2023, das 08:00h às 10:00 e das 14:00h às 16:00h (horário local). Estão todos convidados a acompanhar!

Agradecimentos



Bibliografia



L. R. Ford. *Automorphic Functions*. Chelsea Publishing Company, New York, 1962.



G. Forney Jr., "Geometrically uniform codes," *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol 37, 1241-1260, 1991.



Massey, J.L. "Coding and modulation in digital communication," *1974 Zurich Seminar*, pp.E2(1)-E2(4), 1974.



Vaz, J., *Methods of Applied Mathematics I*, Class Notes, IMECC, UNICAMP, 2012.



White, A.T., "Orientable embeddings of Cayley graphs," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 69, pp.272-275.



König, D., *Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen*, Leipzig, 1936, reprinted, Chelsea, New York, 1950.



White, A.T., *Graphs, Groups and Surfaces*, North-Holland Mathematics Studies 8, North-Holland Publishing Co., 1973.



Firby, P.A. and Gardiner, C.F., *Surface Topology*, Ellis Horwood Limited, England, 1991.



Ringelsen, R.D., "Determining all compact orientable 2-manifolds upon which $K_{m,n}$ has 2-cell embeddings," *Journal Combinatorial Theory*, vol. 12, pp.101-104, 1972.

Bibliografia



Ringel, G., "Das Geschlecht des Vollständigen paaren Graphen," *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, vol. 28, pp.139-150, 1965.



Katok, S., *Fuchsian Groups*, The University of Chicago Press, 1992.



Beardon, A., *The Geometry of Discret Groups*, Springer-Verlag, New York, 1983.



Kristensson, G., *Second Order Differential Equations - Special Functions and Their Classification*, Springer, New York, 2010.



Whittaker E. T., "On Hyperlemniscate functions, a family of automorphic functions", em *Records of Proceedings at Meetings*, pp 274-278, 1929.



Sotomayor, J., *Lessons on Ordinary Differential Equations*, Rio de Janeiro: IMPA, 1979.



Oliveira, A. J.; Palazzo Jr., R., "Geometric and algebraic structures associated with the channel quantization problem," *Computational and Applied Mathematics*, 2017.

Muito obrigado!!