

# Buscando conexões entre singularidades de equações fuchsianas, geometria hiperbólica e códigos geometricamente uniformes

Mariana Gabriela Gusmão; Anderson José de Oliveira

Universidade Federal de Alfenas

15 de junho de 2023



# Sumário

- 1 Revisão de Literatura
- 2 Justificativa
- 3 Objetivos
- 4 Resultados
- 5 Considerações Finais
- 6 Referências



## Equações diferenciais fuchsianas

- Dizemos que a equação:

$$y''(z) + p(z)y'(z) + q(z)y(z) = 0,$$

é uma equação de Fuchs ou uma equação do tipo fuchsiana se todo ponto singular no plano complexo estendido for regular.

- Os pontos singulares são aqueles em que  $p(z)$  ou  $q(z)$  deixam de ser analíticas, ou seja, são os pontos que zeram o denominador da fração e um ponto é singular regular se tanto  $(z - z_0)p(z)$  quanto  $(z - z_0)^2q(z)$  forem analíticas em  $z_0$ , onde  $z_0$  é uma singularidade.

- Segundo Vaz Jr. e Oliveira (2016), uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) fuchsiana de segunda ordem com  $n$  pontos singulares é da forma:

$$y''(z) + p(z)y'(z) + q(z)y(z) = 0,$$

com:

$$p(z) = \frac{A_1}{z - \epsilon_1} + \cdots + \frac{A_n}{z - \epsilon_n},$$
$$q(z) = \frac{B_1}{(z - \epsilon_1)^2} + \frac{C_1}{z - \epsilon_1} + \cdots + \frac{B_n}{(z - \epsilon_n)^2} + \frac{C_n}{z - \epsilon_n},$$

onde:

$$A_1 + \cdots + A_n = 2$$

$$C_1 + \cdots + C_n = 0$$

$$(B_1 + \cdots + B_n) + (\epsilon_1 C_1 + \cdots + \epsilon_n C_n) = 0$$

$$(2\epsilon_1 B_1 + \cdots + 2\epsilon_n B_n) + (\epsilon_1^2 C_1 + \cdots + \epsilon_n^2 C_n) = 0$$

Classificação de uma equação diferencial fuchsiana.

## II **Classificação**

São classificadas entre as equações hipergeométricas, as de Tchebychev e as de Legendre, quando restritas a três pontos singulares regulares, sendo um deles localizado no infinito.

- Teoria da informação introduzida por Shannon em 1948.
  - Transmitir e armazenar dados de maneira confiável, de modo que ao recuperar uma informação, seja possível detectar e corrigir erros.

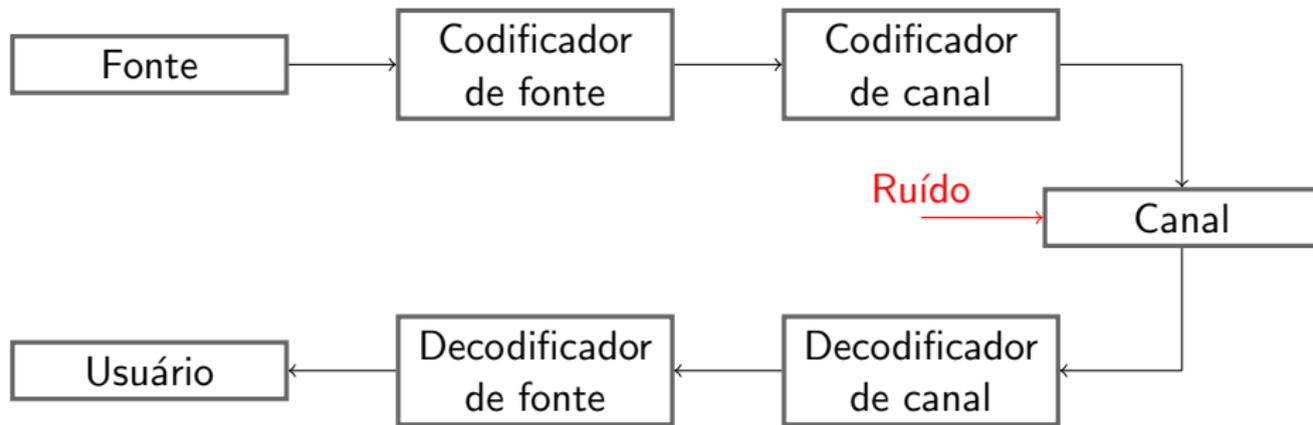


Figura 1: Diagrama - sistema de comunicação.

- Códigos Geometricamente Uniformes (FORNEY, 1991).

## Definição

*Uma constelação de sinais  $S$  é um subconjunto finito de pontos em um espaço métrico  $(M, d)$ . Essa constelação é um código geometricamente uniforme se, dados  $s_1$  e  $s_2$  em  $S$ , existe uma isometria  $u_{s_1, s_2}$  que transforma  $s_1$  em  $s_2$  mantendo  $S$  invariante, ou seja,*

$$u_{s_1, s_2}(s_1) = s_2, \quad u_{s_1, s_2}(S) = S.$$

- Códigos Geometricamente Uniformes (FORNEY, 1991).

## Definição

*Uma constelação de sinais  $S$  é um subconjunto finito de pontos em um espaço métrico  $(M, d)$ . Essa constelação é um código geometricamente uniforme se, dados  $s_1$  e  $s_2$  em  $S$ , existe uma isometria  $u_{s_1, s_2}$  que transforma  $s_1$  em  $s_2$  mantendo  $S$  invariante, ou seja,*

$$u_{s_1, s_2}(s_1) = s_2, \quad u_{s_1, s_2}(S) = S.$$

- A região de Voronoi de  $s_0$  em  $S$  consiste dos pontos que estão mais próximos de  $s_0$  que de qualquer outro ponto de  $S$ .
- Processo de decodificação em um código geometricamente uniforme.

- Quilles e Palazzo Jr. (2010) → Códigos quase perfeitos sobre anéis de inteiros gaussianos.
  - Corrigem todos os padrões com até  $t$  erros e alguns padrões com  $t + 1$  erros,
  - $t$  é distância da palavra código.

- Geral

O objetivo deste trabalho é estabelecer conexões entre singularidades de uma equação diferencial fuchsiana e constelações de sinais e posteriormente com canais de comunicação.

- Pontos singulares regulares de uma equação diferencial fuchsiana que também gerem uma constelação de sinais no plano complexo.
- Analisar a existência de um código perfeito e/ou quase perfeito sobre a constelação de sinais e sua capacidade de correção de erros.
- Representar as palavras-código encontradas, como entradas e saídas de um canal, apresentando a probabilidade de erro  $p$ , com base no código quase perfeito construído.

- Apresentamos inicialmente dois pontos do plano complexo que serão vistos como singularidades de uma equação diferencial fuchsiana, junto com o ponto no infinito, e como geradores de uma constelação de sinais.
- Pontos:  $6 + 3i$ ,  $-6 + 3i$ .

Assim, temos:

# Equações diferenciais fuchsianas

$$y'' + \left[ \frac{A_1}{(z - (6 + 3i))} + \frac{A_2}{(z - (-6 + 3i))} \right] y' + \left[ \frac{B_1}{(z - (6 + 3i))^2} + \frac{B_2}{(z - (-6 + 3i))^2} + \frac{C_1}{(z - (6 + 3i))} + \frac{C_2}{(z - (-6 + 3i))} \right] y = 0$$

Sejam,

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2 \\ C_1 + C_2 = 0 \\ (B_1 + B_2) + ((6 + 3i)C_1 + (-6 + 3i)C_2) = 0 \\ (2(6 + 3i)B_1 + 2(-6 + 3i)B_2) + ((6 + 3i)^2 C_1 + (-6 + 3i)^2 C_2) = 0. \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} A_2 = 2 \\ A_1 = B_1 = B_2 = C_1 = C_2 = 0. \end{cases}$$

Desta forma,

$$y'' + \left( \frac{2z - 12 - 6i}{z^2 - 6iz - 45} \right) y' + y = 0.$$

Assim, a partir das singularidades  $6 + 3i$ ,  $-6 + 3i$  e  $\infty$  e usando as condições necessárias para que a equação seja fuchsiana, tem-se:

$$(z^2 - 6iz - 45)y'' + (2z - 6i - 12)y' + (z^2 - 6iz - 45)y = 0.$$

- Agora, vamos tomar os pontos  $6 + 3i$  e  $-6 + 3i$ , anteriormente vistos como singularidade, como geradores de uma constelação de sinais.

- Dado o corpo de números  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ , o anel dos inteiros de  $\mathbb{K}$  é  $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ , chamado *anel dos inteiros de Gauss*.
- A norma  $N : \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{Z}_+$  é definida para todo  $\alpha = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$  como

$$N(\alpha) = \alpha \cdot \bar{\alpha} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2.$$

- O anel quociente  $\frac{\mathbb{Z}[i]}{[\alpha]}$ , denotado por  $\mathbb{Z}[i]_{\alpha}$ , possui  $N(\alpha) = a^2 + b^2$  elementos.

# Códigos geometricamente uniformes

Tomando  $\alpha = 6 + 3i$ , os elementos do anel quociente são:

$$\mathbb{Z}[i]_{6+3i} = \{0, 1, 2, 3, -1, -2, -3, i, 2i, 3i, -i, -2i, -3i, 1+i, 1+2i, 1+3i, 1+4i, 1-i, 1-2i, 1-3i, -1+i, -1+2i, -1+3i, -1-i, -1-2i, -1-3i, -1-4i, 2+i, 2+2i, 2+3i, 2-i, 2-2i, -2+i, -2+2i, -2-i, -2-2i, -2-3i, 3+i, 3-i, 3-2i, -3+i, -3+2i, -3-i, 4-i, -4+i\},$$

Para  $\alpha = -6 + 3i$ , obtemos os elementos conjugados, ou seja,

$$\mathbb{Z}[i]_{-6+3i} = \{0, 1, 2, 3, -1, -2, -3, i, 2i, 3i, -i, -2i, -3i, 1+i, 1+2i, 1+3i, 1-i, 1-2i, 1-3i, 1-4i, -1+i, -1+2i, -1+3i, -1+4i, -1-i, -1-2i, -1-3i, 2+i, 2+2i, 2-i, 2-2i, 2-3i, -2+i, -2+2i, -2+3i, -2-i, -2-2i, 3+i, 3+2i, 3-i, -3+i, -3-i, -3-2i, 4+i, -4-i\}.$$

Ambos os anéis contendo  $N(\alpha) = 45$  elementos.

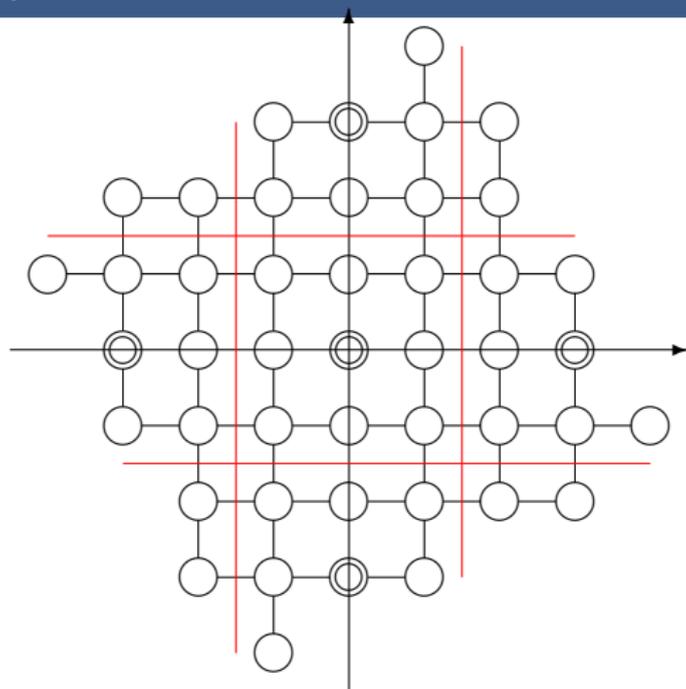
## Teorema (C.R.O. QUILLES, R. PALAZZO JR., 2010)

Dado  $\alpha \neq 0 \in \mathbb{Z}[i]$  e  $t$  um inteiro positivo. Temos que:

- 1 Se  $\beta = (t - c) + (t + (c + 1))i$  divide  $\alpha$ , então o ideal  $S = [\beta] \subseteq \mathbb{Z}[i]_\alpha$  forma um código quase perfeito que corrige todos os padrões com até  $t$  erros e  $2c^2 + 2c$  padrões com  $t + 1$  erros em  $G_\alpha$ ;
- 2 Se  $\bar{\beta} = (t - c) - (t + (c + 1))i$  divide  $\alpha$ , então o ideal  $S = [\bar{\beta}] \subseteq \mathbb{Z}[i]_\alpha$  forma um código quase perfeito que corrige todos os padrões com até  $t$  erros e  $2c^2 + 2c$  padrões com  $t + 1$  erros em  $G_\alpha$ .

- Dado  $\alpha = 6 + 3i = 3i \cdot (1 - 2i)$ ;
- Tomamos  $\beta = 3i$ ;
- $[\beta] = [3i]$  forma um código quase perfeito que corrige todos os padrões com 1 erro e  $2c^2 + 2c = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 4$  padrões com  $t + 1 = 2$  erros em  $G_{6+3i}$ ;
- $S = [3i] = \{0, 3, -3, 3i, -3i\}$ ;
- O código é identificado no grafo pelos pontos que estão duplamente circulados, formando os baricentros dos 5 polígonos fundamentais, com 9 elementos, que recobrem a constelação de sinais, contendo 45 elementos de  $\mathbb{Z}_{6+3i}$ .

# Código quase perfeito



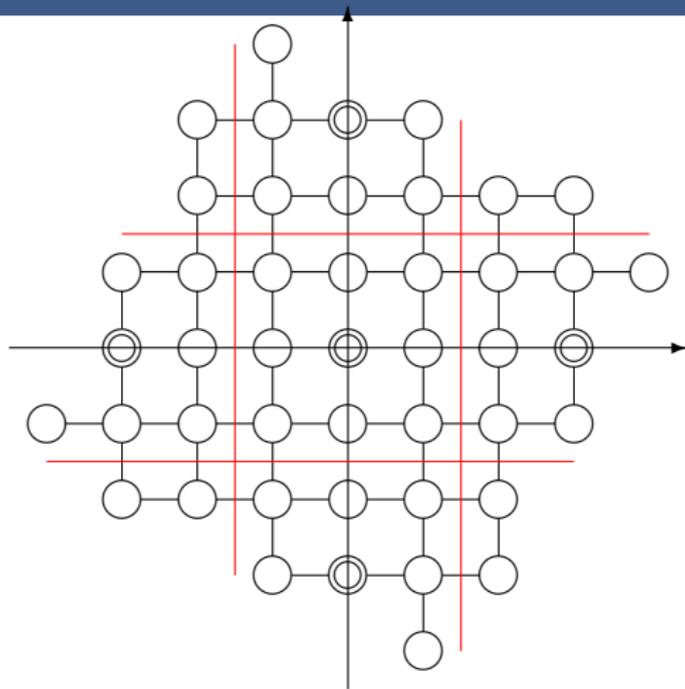
$\mathbb{Z}_{6+3i}$

Figura 2: Código quase perfeito sobre  $\mathbb{Z}_{6+3i}$

Autor.

- Dado  $\alpha = -6 + 3i = 3i \cdot (1 + 2i)$ ;
- Tomamos  $\beta = 3i$ ;
- $[\beta] = [3i]$  forma um código quase perfeito que corrige todos os padrões com 1 erro e  $2c^2 + 2c = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 4$  padrões com  $t + 1 = 2$  erros em  $G_{-6+3i}$ ;
- $S = [i] = \{0, 3, -3, 3i, -3i\}$ ;
- O código é identificado no grafo pelos pontos que estão duplamente circulados, formando os baricentros dos 5 polígonos fundamentais, com 9 elementos, que recobrem a constelação de sinais, contendo 45 elementos de  $\mathbb{Z}_{-6+3i}$ .

# Código quase perfeito



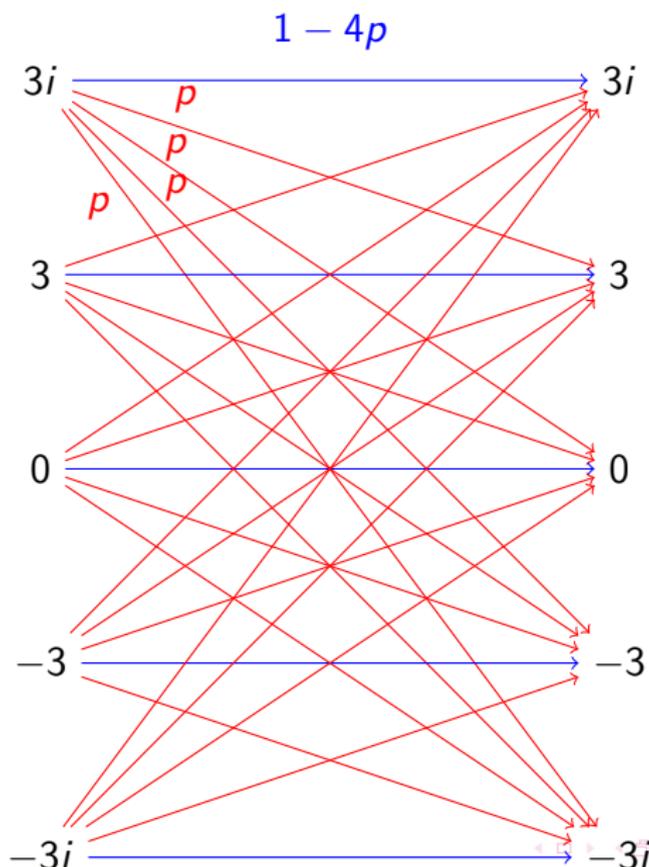
$$\mathbb{Z}_{-6+3i}$$

Figura 3: Código quase perfeito sobre  $\mathbb{Z}_{-6+3i}$

Autor.

Considerando que as palavras-código do código geometricamente uniforme possuem a mesma probabilidade de erro e são finitas, pode-se representá-las como entradas e saídas de um canal discreto e posteriormente apresentar a probabilidade do código cometer um erro.

Apenas um canal será necessário, visto que ambos os códigos apresentados possuem as mesmas palavras-código.



Podemos calcular essa probabilidade de erro  $p$  com auxílio da constelação de sinais gerada para  $\alpha = 6 + 3i, -6 + 3i$ . Vamos analisar quando o canal comete um erro:

- Acerto

palavra enviada = 0  $\longrightarrow$  (0, 1, -1,  $i$ ,  $-i$ ) palavra recebida

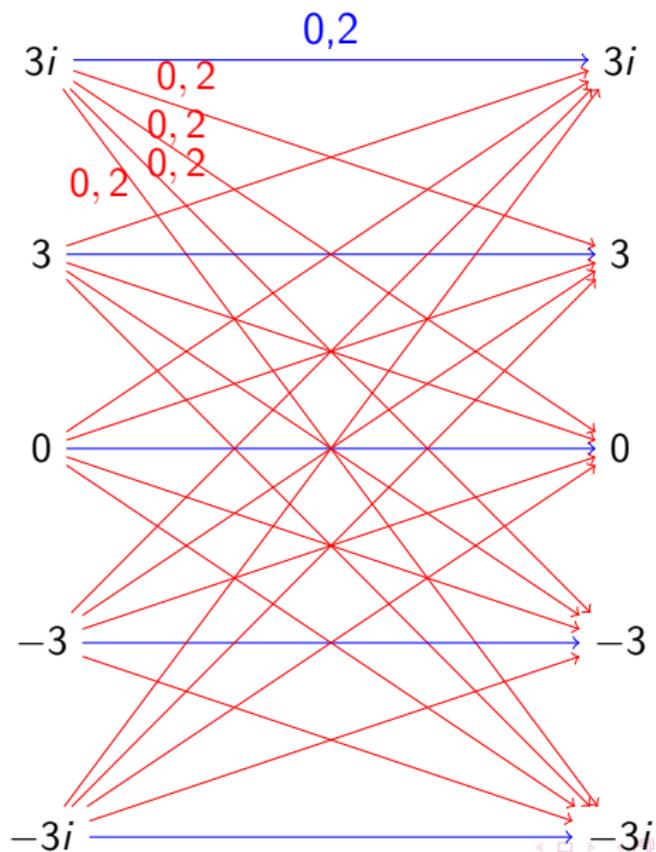
- Erro

palavra enviada = 0  $\longrightarrow \neq$  (0, 1, -1,  $i$ ,  $-i$ ) palavra recebida

- Temos que a probabilidade desse evento acontecer é:

$$p = P(E) = \frac{n(E)}{n(\omega)} = \frac{\text{número de elementos do evento}}{\text{número de elementos do espaço amostral}}$$

$$p = P(E) = \frac{5}{25} = 0,2.$$



Tomando pontos simétricos em relação ao eixo imaginário para a geração da constelação de sinais, obtém-se pontos conjugados em cada constelação, assim como o código quase perfeito existente sobre a constelação. Neste caso o código gerado possui os mesmos pontos pois o elemento e seu conjugado pertencem ao código. E a capacidade de correção de erros dos códigos é a mesma independente da singularidade geradora da constelação.

Como o conjunto de palavras-código,  $\mathcal{C}$ , é enumerável, existe uma bijeção com o conjunto dos números naturais,  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}$ . Assim, tem-se um canal discreto sem memória.

Quando as palavras-código são representadas como entradas e saídas desse canal, percebe-se que a probabilidade de erro,  $p$ , está relacionada a o número de palavras-códigos sobre a constelação.

Agradecemos à UNIFAL-MG, ao PPGEAB (Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria) e à FAPEMIG, pela concessão da bolsa.

FORNEY, G. D. Geometrically Uniform Codes. **IEEE Trans. On Inform. Theory**, v.37 N.5, p. 1241-1260, 1991.

QUILLES, C.R.O.; PALAZZO JR., R. Quasi-perfect geometrically uniform codes derived from graphs over Gaussian integer rings, **Proc. IEEE Intl. Symp. Information Theory**, Austin, Texas, U.S.A. p. 1158-1162, 2010.

VAZ JR, J.; OLIVEIRA, E. C., Métodos Matemáticos - volume 1. 1 ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2016. p. 336.



ENCORRI -  
CENTRO DE CÓDIGOS, RETICULADOS E INFORMAÇÃO

- ENCORRI -