Exercícios resolvidos sobre:

1) Estimadores de Máxima Verossimilhança;

2) Estimadores pelo Método dos Momentos;

3) Distribuição amostral.

1) EMV

I) Uma observação é retirada de uma V.A. discreta X com função de probabilidade $f(x|\theta)$, onde $\theta \in \{1, 2, 3\}$. Encontre o EMV para θ.

x	$P(X=x\|\theta=1)$	$P(X=x\|\theta=2)$	$P(X=x\|\theta=3)$
0	1/3	1/4	0
1	1/3	1/4	0
2	0	1/4	1/6
3	1/6	1/4	1/2
4	1/6	0	1/4

Resposta: Como o espaço paramétrico é discreto, não há como resolver de forma usual obtendo a distribuição conjunta e derivando em relação à θ. Assim, o estimador será obtido observando para cada valor que X assume, qual o θ maximiza a função de Probabilidade.

$$\hat{\theta}_{MV} = 1\, I_{\{0,1\}}(x) + 2\, I_{\{2\}}(x) + 3\, I_{\{3,4\}}(x)$$

II) Encontrar o EMV de $\underset{\sim}{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, dado que $\underset{\sim}{X} \sim$ Multinomial(n, p_1, p_2, p_3, p_4), com $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$. e

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_4 = x_4) = \frac{n!}{x_1!\, x_2!\, x_3!\, x_4!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3} p_4^{x_4},$$

com $\sum_{i=1}^{4} x_i = n$.

Resposta:

$$\ell(p_1, p_2, p_3, p_4) = \log n! - \log x_1! - \log x_2! - \log x_3! - \log x_4!$$
$$+ x_1 \log p_1 + x_2 \log p_2 + x_3 \log p_3 + x_4 \log p_4.$$

Porém a maximização, nesse caso, deve ser feita levando em conta $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$, para tanto, usaremos o método dos multiplicadores de Lagrange. Assim,

$$\ell(\underset{\sim}{p}, \lambda) = \ell(p_1, p_2, p_3, p_4) - \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{4} p_i\right), \text{ assim,}$$

$$\frac{d\,\ell(\underset{\sim}{p}, \lambda)}{d\lambda} = 1 - \sum_{i=1}^{4} \hat{p}_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{4} \hat{p}_i = 1 \; *$$

$$\frac{d\,\ell(\underset{\sim}{p}, \lambda)}{dp_i} = \frac{x_i}{\hat{p}_i} - \hat{\lambda} = 0 \Rightarrow x_i = \hat{\lambda}\hat{p}_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{4} x_i = \hat{\lambda} \underline{\sum_{i=1}^{4} \hat{p}_i} \; *$$

$$\Rightarrow n = \hat{\lambda}. \text{ Então } \frac{x_i}{\hat{p}_i} - \hat{\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{x_i}{\hat{p}_i} = n \Rightarrow$$

$\Rightarrow \hat{p}_i = \frac{x_i}{n}$. Derivando a segunda vez $\ell(\underset{\sim}{p}, \lambda)$

em relação à p_i, temos que

$$\frac{d^2 \ell(\underset{\sim}{p}, \lambda)}{d p_i^2} = -\frac{n_i}{\hat{p}_i^2} - n < 0 \quad , \forall i = \{1, 2, 3, 4\}, \text{ ou seja,}$$

$\hat{p}_i = \frac{x_i}{n}$ é o ponto de máximo da função de

verossimilhança e, portanto, é o EMV de p_i.

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n} \quad , \quad \hat{p}_2 = \frac{x_2}{n} \quad , \quad \hat{p}_3 = \frac{x_3}{n} \quad \text{e} \quad \hat{p}_4 = \frac{x_4}{n} .$$

*

*—

III) Encontre o EMV de λ, dado que uma amostra aleatória foi retirada de uma V.A. X com distribuição exponencial de parâmetro λ. Além disso, obtenha o EMV de $\tau(\lambda) = 1/\lambda$.

Resposta:

$X \sim exp(\lambda)$, $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\ell(\lambda) = n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{d\,\ell(\lambda)}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \hat{\lambda}_{MV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\frac{d^2 \ell(\lambda)}{d\lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0 .$$ Assim $\hat{\lambda}_{MV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$ é o EMV para λ.

Pelo princípio da invariância dos EMV's, o estimador de MV de $\tau(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ é

$$\hat{\tau}(\lambda) = \frac{1}{\hat{\lambda}_{MV}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}.$$ Assim $\hat{\tau}(\lambda)_{MV} = \bar{X}$.

Scanned with CamScanner

IV) Encontre o EMV de p, sabendo que uma amostra aleatória foi retirada de uma V.A. X e $X \sim geom(p)$.

$$P(X=x) = (1-p)^{x-1} p \ I_{\{1,2,3,\dots\}}(x)$$

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{(x_i-1)} p = (1-p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - n} p^n$$

$$\ell(p) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right) \log(1-p) + n \log p$$

$$\frac{d\ell(p)}{dp} = \frac{n}{\hat{p}} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}{1-\hat{p}} = 0 \Rightarrow \frac{1-\hat{p}}{\hat{p}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\hat{p}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \hat{p}_{MV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

$$\frac{d^2\ell(p)}{dp^2} = -\frac{n}{\hat{p}^2} - \left(\frac{1}{1-\hat{p}}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} x_i - n < 0.$$

Então $\hat{p}_{MV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i} = \frac{1}{\bar{X}}$ é o EMV para p.

2) EMM

I) Encontre o estimador pelo método dos momentos para uma amostra aleatória das seguintes distribuições:

a) $X \sim exp(\lambda)$

b) $X \sim geom(p)$

Resposta:

a) $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \underset{(0,\infty)}{I(x)}$, $E(X) = 1/\lambda$.

Sabendo que o primeiro momento amostral é dado por $\bar{X}$, tem-se que

$$E(X) = \bar{X} \Rightarrow \frac{1}{\hat{\lambda}_{MM}} = \bar{X} \Rightarrow \hat{\lambda}_{MM} = \frac{1}{\bar{X}}$$

b) $P(X = x) = (1-p)^{x-1} p \underset{\{1,2,\dots\}}{I(x)}$, $E(X) = \frac{1}{p}$.

Como o primeiro momento amostral é dado por $\bar{X}$, tem-se que

$$E(X) = \bar{X} \Rightarrow \frac{1}{\hat{p}_{MM}} = \bar{X} \Rightarrow \hat{p}_{MM} = \frac{1}{\bar{X}} .$$

II) Achar o EMM para uma amostra aleatória da v.a. X, com $X \sim U(-\theta, \theta)$.

$$f_X(x) = \frac{1}{2\theta} I_{(-\theta,\theta)}(x) \, .$$

Resposta:

Como o primeiro momento populacional é zero, $E(X) = 0$, partiremos para encontrar o estimador a partir do segundo momento populacional $E(X^2)$, assim temos que

$$E(X^2) = \int_{-\theta}^{\theta} \frac{x^2}{2\theta} dx = 2\int_0^{\theta} \frac{x^2}{2\theta} dx = \frac{2x^3}{6\theta}\Big|_0^{\theta} = \frac{\theta^2}{3} \, .$$

O segundo momento amostral é $m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$, então

$$E(X^2) = m_2 \Rightarrow \frac{\hat{\theta}_{MM}^2}{3} = m_2 \Rightarrow \hat{\theta}_{MM} = \sqrt{3m_2} \, .$$

III) Achar o EMM para uma a.a. da v.a. X, com $X \sim Gama(a, b)$.

$$f_X(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} I_{(0,\infty)}(x) \, .$$

Resposta: $E(X) = \frac{a}{b}$

Como temos dois parâmetros para estimar, só $E(X)$ não será suficiente, teremos que usar um sistema de equações baseados em $E(X)$ e $E(X^2)$. Assim

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} dx = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a+2)}{b^{a+2}} = \frac{(a+1)a}{b^2}.$$

O primeiro momento amostral é dado por $m_1 = \bar{X}$ e o segundo, por $m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Temos que

$$\begin{cases} E(X) = m_1 \Rightarrow \dfrac{\hat{a}_{MM}}{\hat{b}_{MM}} = m_1 \Rightarrow \hat{a}_{MM} = \hat{b}_{MM}\, m_1 \\ E(X^2) = m_2 \Rightarrow \dfrac{\hat{a}_{MM}(\hat{a}_{MM}+1)}{\hat{b}_{MM}^2} = m_2 \; * \end{cases}$$

$$* \quad \frac{(\hat{a}_{MM}+1)\, m_1}{\hat{b}_{MM}} = m_2 \Rightarrow \frac{(\hat{b}_{MM} m_1 + 1)\, m_1}{\hat{b}_{MM}} = m_2$$

$$\Rightarrow \hat{b}_{MM} m_1^2 + m_1 = \hat{b}_{MM} m_2 \Rightarrow \hat{b}_{MM}(m_1^2 - m_2) = -m_1$$

$$\Rightarrow \hat{b}_{MM} = -\frac{m_1}{(m_1^2 - m_2)} = \frac{m_1}{(m_2 - m_1^2)} = \frac{\bar{X}}{S_n^2}, \text{ com}$$

$$S_n^2 = m_2 - m_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right].$$ E por fim

$$\hat{a}_{MM} = \hat{b}_{MM}\, m_1 = \frac{\bar{X}}{S_n^2} \cdot \bar{X} = \frac{\bar{X}^2}{S_n^2}.$$

Outra maneira (mais direta):

Como $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$ e

$\hat{E}(X^2) = m_2$ e $\hat{E}(X) = m_1$, então

$$\hat{Var}(X) = \hat{E}(X^2) - \hat{E}^2(X) = m_2 - m_1^2 = S_n^2.$$

Assim, como $Var(X) = \frac{a}{b^2}$,

$$\begin{cases} E(X) = m_1 \\ Var(X) = S_n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{\hat{a}_{MM}}{\hat{b}_{MM}} = m_1 \\ \frac{\hat{a}_{MM}}{\hat{b}_{MM}^2} = S_n^2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \hat{a}_{MM} = \hat{b}_{MM} \cdot m_1 \\ \underbrace{\frac{\hat{a}_{MM}}{\hat{b}_{MM}}}_{= m_1} \cdot \frac{1}{\hat{b}_{MM}} = S_n^2 \quad * \end{array}$$

$$* \quad \frac{m_1}{\hat{b}_{MM}} = S_n^2 \Rightarrow \frac{1}{\hat{b}_{MM}} = \frac{S_n^2}{m_1} \Rightarrow \hat{b}_{MM} = \frac{\bar{X}}{S_n^2}.$$

e $\hat{a}_{MM} = \hat{b}_{MM} \cdot m_1 = \frac{\bar{X}}{S_n^2} \cdot \bar{X} = \frac{\bar{X}^2}{S_n^2}$.

3) Distribuição amostral

I) Encontrar a $Var(S^2)$ e $E(S^2)$, com $S^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$,

dado que $Var(X) = \sigma^2$ e $E(X) = \mu$.

Resposta:

Para os cálculos usaremos a seguinte igualdade

(a) $\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu)^2$.

Prova (a): Desde que, $E[(X-\mu)^2] = \sigma^2$ e

$\mu_n = E[(X-\mu)^n]$, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X} - \mu + \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} [(X_i - \bar{X}) + (\bar{X} - \mu)]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 + 2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})}_{=0} \underbrace{(\bar{X} - \mu)}_{\text{Constante}} + \sum_{i=1}^{n} (\bar{X} - \mu)^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu)^2.$$

Voltando aos cálculos de $E(S^2)$ e $Var(S^2)$, temos que

$$E(S^2) = E\left[\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2\right] = \frac{1}{(n-1)} E\left[\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2\right]$$

$$= \frac{1}{(n-1)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \underbrace{E[(X_i - \mu)^2]}_{= Var(X)} - n \underbrace{E[(\bar{X} - \mu)^2]}_{= Var(\bar{X})} \right\} = \frac{1}{(n-1)} \left[n\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n} \right]$$

Assim

$$E(S^2) = \frac{1}{(n-1)} [\sigma^2 (n-1)] = \sigma^2.$$

Agora, calculando $Var(S^2)$, tem-se que

$Var(S^2) = E(S^4) - E^2(S^2) = E(S^4) - \sigma^4$. Como

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - n(\bar{X}-\mu)^2}{(n-1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \mu\right)^2}{(n-1)} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{n}\right)^2}{(n-1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - \frac{n}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right)^2}{(n-1)} =$$

$$= \frac{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right)^2}{n(n-1)}.$$

Fazendo, então, $(S^2)^2$, tem-se que e $Z_i = (X_i - \mu)$, $i = \{1, 2, \dots, n\}$,

$$S^4 = \left[n^2\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i^2\right)^2 - 2n\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)^4\right] \cdot \frac{1}{n^2(n-1)^2}$$

$$E(S^4) = \frac{n^2 E\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i^2\right)^2 - 2n\, E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)^2\right] + E\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)^4}{n^2(n-1)^2}.$$

Como $Z_1, \dots, Z_n$ são independentes, e $E(Z_i) = E(X_i) - \mu = \mu - \mu = 0$

$$E(Z_i Z_j) = 0, \qquad E(Z_i^3 Z_j) = 0, \qquad E(Z_i^3 Z_j Z_k) = 0,$$

$$E(Z_i^2 Z_j^2) = \mu_2^2 = \sigma^4, \quad E(Z_i^4) = \mu_4, \text{ para } i, j, k$$

distintos.

Então para os cálculos das esperanças em $E(S^4)$, alguns métodos foram usados como resolver os somatórios através do Binômio de Newton e aplicados as esperanças, assim de forma não detalhada obtemos que

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i^2\right)^2 = n\mu_4 + n(n-1)\sigma^4$$

$$E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)^2\right) = n\mu_4 + n(n-1)\sigma^4$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)^4 = n\mu_4 + 3n(n-1)\sigma^4$$

, substituindo em $E(S^4)$ e simplificando

$$E(S^4) = \frac{(n-1)\mu_4 + (n^2-2n+3)\sigma^4}{n(n-1)}.$$ Assim

$$Var(S^2) = E(S^4) - \sigma^4 =$$

$$= \frac{(n-1)\mu_4 + (n^2-2n+3)\sigma^4}{n(n-1)} - \sigma^4 = \frac{1}{n}\left(\mu_4 - \frac{(n-3)}{(n-1)}\sigma^4\right).$$

II) $\bar{X}_n$ é a média amostral de uma a.a. de tamanho n de uma distribuição normal com média μ e variância σ^2. Qual a distribuição de $\bar{X}_n$?

Usando a função geradora de momentos, temos que

$$M_{\bar{X}_n}(t) = E\left[\exp(t\bar{X}_n)\right] = E\left[\exp\left(t\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)\right] =$$

$$= E\left[\prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{tX_i}{n}\right)\right] = \prod_{i=1}^{n} E\left[\exp\left(\frac{tX_i}{n}\right)\right] =$$

por independência é possível reescrever assim

$$= \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right)$$, a fgm de uma V.A. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ é

$$M_X(t) = \exp\left[\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right]$$, assim

$$M_{\bar{X}_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right) = \prod_{i=1}^{n} \exp\left[\frac{\mu t}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma t}{n}\right)^2\right] =$$

$$= \exp\left[\frac{n\mu t}{n} + \frac{n}{2}\frac{(\sigma t)^2}{n^2}\right] = \exp\left[\mu t + \frac{1}{2}\frac{(\sigma t)^2}{n}\right],$$

isso implica que $\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

III) (Questão 7 do livro "Introduction to the theory of statistics", Mood. 1973, página 266)

(a) Use a inequação de Chebyshev para achar quantas vezes uma moeda deve ser arremessada para que a probabilidade que $\bar{x}$ esteja entre 0,4 e 0,6 seja pelo menos 0,9. (Assuma que a moeda é honesta).

Resposta:

A inequação de chebyshev é

$P(|X-E(X)| \geq \lambda) \leq \frac{Var(X)}{\lambda^2}$, $\forall \lambda > 0$, de forma equivalente $P(|X-E(X)| < \lambda) \geq 1 - \frac{Var(X)}{\lambda^2}$.

Assumindo que a moeda é honesta, temos que

$X \sim$ Bernoulli $(1/2)$ e, portanto, $E(\bar{X}) = \mu = 1/2$ ou $0,5$.

Desse modo,

$P(0,4 < \bar{x} < 0,6) = P(-0,1 < \bar{x} - 0,5 < 0,1) =$

$P(|\bar{x}-0,5| < 0,1) = P(|\bar{x}-0,5|^2 < 0,1^2) \geq 1 - \frac{Var(\bar{X})}{0,1^2} \Rightarrow$

$P(|\bar{x}-0,5|^2 < 0,1^2) \geq 1 - \frac{Var(X)}{n \cdot 0,1^2} \geq 1 - 0,1$

A última desigualdade sendo decorrente do Teorema 4 apresentado no livro na página 232.

Assim, como $Var(X) = 0{,}25$, $\frac{0{,}25}{n \cdot 0{,}1^2} < 0{,}1 \Rightarrow n \geq 250$.

(b) Como poderia ser determinado o número de arremessos que o item (a) pedia de forma mais acurada, i.e, fazendo a probabilidade ser mais próxima à 0,90? Qual é o número de arremessos nesse caso?

Resposta:

Usando o Teorema do limite central. O novo n fica calculado assim,

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \approx N(0,1)$$

$$P(0{,}4 < \bar{X} < 0{,}6) \approx P\left(\frac{0{,}4 - 0{,}5}{\sqrt{\frac{0{,}25}{n}}} < \frac{\bar{X} - 0{,}5}{\sqrt{\frac{0{,}25}{n}}} < \frac{0{,}6 - 0{,}5}{\sqrt{\frac{0{,}25}{n}}}\right) =$$

$$P\left(\frac{-0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}25}{n}}} < Z < \frac{0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}25}{n}}}\right) = \Phi\left(\frac{0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}25}{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{-0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}25}{n}}}\right) =$$

$$2\,\Phi\left(\frac{0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}25}{n}}}\right) = 0{,}9 \Rightarrow \frac{0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}25}{n}}} = 1{,}65 \Rightarrow 4n\,0{,}1^2 = 1{,}65^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \cong 68.$$