

# Redes Neurais Artificiais de Valor Hipercomplexo: Além dos Números Complexos e Quatérnios

*Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita*

E-mail: valle@ime.unicamp.br

## **Resumo**

Redes neurais artificiais (RNAs), incluindo as redes neurais convolucionais, têm demonstrado excelentes resultados em diversas áreas de aplicação, incluindo detecção e classificação de imagens. Concomitantemente, redes neurais de valor hipercomplexo mostraram desempenho competitivo ou superior, mas com menos parâmetros que suas redes neurais equivalentes definidas sobre os números reais. Entre as vantagens das RNAs de valor hipercomplexo, destacam-se a redução do número de parâmetros e o tratamento de múltiplos valores como uma única entidade. Apesar dos avanços significativos em RNAs de valor hipercomplexo, a maioria das pesquisas na área se concentra em redes baseadas em números complexos e quatérnios. No entanto, álgebras de números hipercomplexos alternativas, como os números hiperbólicos, os tessarinos e os coquatérnios, podem resultar RNAs de valores hipercomplexos eficientes. Nesse contexto, este projeto de pesquisa visa investigar RNAs definidas em álgebras de números hipercomplexos alternativas, considerando ambos aspectos teóricos e práticos desses modelos.

**Palavras-chave:** Rede neural artificial, rede neural convolucional, aprendizado de máquina, número hipercomplexo, quatérnio.

---

Campinas, 24 de fevereiro de 2022.

# Hypercomplex-Valued Neural Networks: Beyond Complex Numbers and Quaternions

*Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita*

E-mail: valle@ime.unicamp.br

## **Abstract**

Artificial neural networks (ANNs), including convolutional neural networks, have demonstrated outstanding results in several application areas, including image detection and classification. Concomitantly, hypercomplex-valued neural networks showed competitive or superior performance but with fewer parameters than their equivalent neural networks defined on the real numbers. Among the advantages of hypercomplex-valued ANNs, reducing the number of parameters and treating multiple values as a single entity stand out. Despite significant advances in hypercomplex-valued ANNs, most research in the area focuses on networks based on complex numbers and quaternions. However, alternative hypercomplex number algebras such as hyperbolic numbers, tessarines, and coquaternions can result in efficient hypercomplex-valued ANNs. In this context, this research project aims to investigate ANNs defined in alternative hypercomplex number algebras, considering both theoretical and practical aspects of these models.

**Key-words:** Artificial neural network, convolutional neural network, machine learning, hypercomplex number, quaternion.

# 1 Introdução Geral

Redes neurais artificiais (RNAs) de valor hipercomplexo são redes neurais cujos parâmetros e operações são definidas usando uma álgebra de números hipercomplexos, incluindo os números complexos [2], números hiperbólicos [50], quatérnios [5, 67], octônios [7, 13], entre outros [14, 30, 68, 70]. Diferente dos modelos reais, uma RNA de valor hipercomplexo processa dados multidimensionais como uma única entidade [18, 23, 48]. Além disso, as redes de valor hipercomplexo costumam apresentar maior funcionalidade e melhor flexibilidade que as redes com valores reais [2]. Aplicações de RNAs de valor hipercomplexo incluem controle [18, 4, 62], previsão [65, 44] e processamento de imagens e sinais [15, 39, 59, 63, 22].

As pesquisas sobre RNAs de valor hipercomplexo tiveram início na década de 70 com os trabalhos de Aizenberg et al. e permanecem como um campo ativo de pesquisa atualmente [1, 3, 15, 52]. Com efeito, a primeira rede neural baseada nos números complexos foi desenvolvida por Aizenberg e colaboradores em 1971, antes do desenvolvimento da rede de Hopfield e da popularização do algoritmo de retropropagação [3, 25, 55]. Um aumento significativo em pesquisas sobre redes neurais hipercomplexas ocorreu nos anos 90. Nesse período foram investigados algoritmos de retropropagação para redes complexas e foram desenvolvidas as chamadas redes neurais totalmente complexas [41, 24]. Nesse período também foram desenvolvidas versões da rede de Hopfield com valores complexos [29]. Recentes aplicações envolvendo redes neurais com valores complexos incluem, por exemplo, processamento de áudio [64], telecomunicação [60], classificação em imagens PolSAR (do inglês, *polarimetric synthetic aperture radar*) [17] e reconstrução de imagens de ultrassom [42].

Pesquisas em redes neurais com valores quaterniônicos tiveram início nos anos 90. Especificamente, Arena et al. apresentaram uma extensão do perceptron de múltiplas camadas real (MLP, do inglês *multilayer perceptron*) para parâmetros quaterniônicos, chamada Q-MLP (do inglês, *quaternion multilayer peceptron*) [6]. A Q-MLP possui muitas características atraentes incluindo a simplificação de operações, a diminuição no número total de parâmetros e a condensação de múltiplas informações referentes a um mesmo objeto numa única entidade. Diversos trabalhos destacam o excelente desempenho da Q-MLP em problemas de classificação e regressão [9, 31, 39] enquanto outros focam em aspectos teóricos desta rede neural, como a demonstração do teorema da aproximação universal [4], a proposição de algoritmos alternativos de treinamento [53] e a introdução de derivadas generalizadas de Hamilton-Riemann para ajuste de parâmetros [44]. Aspectos geométricos também foram considerados no desenvolvimento de RNAs de valor hipercomplexo. Por exemplo, Isokawa et al. desenvolveram uma rede neural de múltiplas camadas que considera a rotação realizada na multiplicação por quatérnios [27]. Versões quaterniônicas das máquinas de aprendizado extremo [43, 46] e da rede de Hopfield também foram propostas e investigadas nos últimos anos [26, 28, 34, 45, 66]. Revisões detalhadas sobre os avanços e aplicações de RNAs baseadas nos quatérnios podem ser encontradas nas referências [19, 51].

Além das redes com valores complexos e quaterniônicos, existem na literatura RNAs desenvolvidas usando outras álgebras de números hipercomplexos. Por exemplo, Buchholdz e Sommer desenvolveram uma versão da rede MLP baseada em números hiperbólicos [10]. Propriedades

Tabela 1: Números publicações na base Scopus em Fevereiro de 2022 contendo o termo.

	<b>Termo de busca</b>	<b>Número</b>
“neural network” AND	“complex number” OR “complex valued”	1.855
	“quaternion”	704
	“Clifford”	121
	“hypercomplex”	80
	“octonion”	22
	“hyperbolic number” OR “hyperbolic valued”	18
	“Bicomplex”	8
	“Cayley-Dickson”	5
	“tessarines”	1
	“coquaternion”	1
	“Klein four-group”	1

dos neurônios hiperbólicos e estudos sobre o algoritmo de retropropagação para redes baseadas em números hiperbólicos foram discutidos em [49, 50]. Versões da rede de Hopfield baseadas em números hiperbólicos também foram investigados nas última década [32, 33, 36]. Além das redes baseadas em números hiperbólicos, existe também pesquisas em RNAs baseadas nas álgebras de Clifford [11, 69, 38, 8], álgebras de Cayley-Dickson [71], octônios [54, 13, 57, 56], tessarinos [12, 58], e outras álgebras de números hipercomplexos [14, 35, 37, 68]. É importante destacar que essas álgebras alternativas apresentam propriedades diferentes dos números complexos e dos quatérnios. Por exemplo, tal como os quatérnios, os tessarinos constituem uma álgebra hipercomplexa de dimensão quatro. Porém, diferente dos quatérnios, os tessarinos formam uma álgebra comutativa com divisores de zero (ou seja, existem elementos não-nulos  $x$  e  $y$  tais que  $xy = 0$ ).

Apesar dos avanços em RNAs baseadas em álgebras de números hipercomplexos alternativas, a maioria das pesquisas na área é dedica as redes neurais baseadas em números complexos e quatérnios. Com efeito, uma pesquisa na base Scopus em Fevereiro de 2022, incluindo capítulos de livros e artigos de revista e conferências, pelos termos “neural network” combinada palavras relacionadas as álgebras de número hipercomplexos resultaram os números apresentados na Tabela 1. Embora alguns documentos tenham aparecido em mais de uma busca, fica claro que os modelos baseados em números complexos e quatérnios dominam a pesquisa sobre redes neurais de valor hipercomplexo. No entanto, podemos nos perguntar: São os números complexos e os quatérnios as melhores álgebras de números hipercomplexos para uma certa tarefa de aprendizado de máquina? De acordo com Navarro-Moreno et al., os quatérnios nem sempre são a melhor álgebra para processar sinais hipercomplexos 4D [47]. Da mesma forma, observamos que máquinas de aprendizado extremo baseadas em álgebras de Cayley-Dickson superaram os modelos de valor real e com valores quaterniônicos com um número comparável de parâmetros treináveis em uma tarefa de autocodificação [71]. Em vista dessa observação, nesse projeto de pesquisa propomos investigar aspectos teóricos e práticos de modelos de redes neurais baseadas em álgebras de números hipercomplexos que vão além dos números complexos e quatérnios.

## 2 Identificação e Caracterização do Problema

Nesse projeto de pesquisa investigaremos redes neurais baseadas em números hipercomplexos que vão além dos números complexos e quatérnios. Para tanto, consideraremos a abordagem proposta por Kantor e Solodovnikov que fornece uma ampla classe de álgebras de números hipercomplexos [30]. Com efeito, números complexos, números hiperbólicos, quatérnios, tessarinos, números bicomplexos, octônios, álgebras de Clifford e as álgebras de Cayley-Dickson podem todos ser descritos usando essa abordagem. Na próxima subseção revisamos os principais conceitos da álgebra de números hipercomplexos de Kantor e Solodovnikov.

### 2.1 Conceitos Básicos sobre Números Hipercomplexos

Um número hipercomplexo sobre o corpo dos reais é escrito como

$$p = p_0 \mathbf{i}_1 + \cdots + p_n \mathbf{i}_n, \quad (1)$$

em que  $n$  é um inteiro não-negativo,  $p_0, p_1, \dots, p_n$  são números reais e os símbolos  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_n$  são as chamadas *unidades hiper-imaginárias* [30]. O conjunto de todos os números dados por (1) será denotado por  $\mathbb{H}$ . Exemplos de números hipercomplexos incluem os números complexos, os números hiperbólicos, os quatérnios, os tessarinos e os octônios.

Uma álgebra de números hipercomplexos é um conjunto de números hipercomplexos com operações de soma e multiplicação (ou produto). A adição de dois números hipercomplexos  $p = p_0 \mathbf{i}_1 + \cdots + p_n \mathbf{i}_n$  e  $q = q_0 \mathbf{i}_1 + \cdots + q_n \mathbf{i}_n$  é definida como segue:

$$p + q = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1) \mathbf{i}_1 + \cdots + (p_n + q_n) \mathbf{i}_n. \quad (2)$$

O produto entre  $p$  e  $q$ , denotado pela justaposição de  $p$  e  $q$ , é definido usando a distributividade e uma tabela de multiplicação. A tabela de multiplicação estabelece o produto entre quaisquer duas unidades hiper-imaginárias através da identidade

$$\mathbf{i}_\mu \mathbf{i}_\nu = a_{\mu\nu,0} + a_{\mu\nu,1} \mathbf{i}_1 + \cdots + a_{\mu\nu,n} \mathbf{i}_n, \quad \forall \mu, \nu \in \{1, \dots, n\}, \quad (3)$$

Posteriormente, usando a distributividade e a tabela de multiplicação, encontramos

$$pq = \left( p_0 q_0 + \sum_{\mu, \nu=1}^n p_\mu q_\nu a_{\mu\nu,0} \right) + \left( p_0 q_1 + p_1 q_0 + \sum_{\mu, \nu=1}^n p_\mu q_\nu a_{\mu\nu,1} \right) \mathbf{i}_1 + \cdots + \left( p_0 q_n + p_n q_0 + \sum_{\mu, \nu=1}^n p_\mu q_\nu a_{\mu\nu,n} \right) \mathbf{i}_n. \quad (4)$$

Note que o produto das unidades hiper-imaginárias caracterizam uma álgebra de números hipercomplexos, e vice-versa. As tabelas de multiplicação dos quatérnios, coquatérnios, números bicomplexos, tessarinos, 4-grupo de Klein e da álgebra de Clifford  $\mathcal{C}\ell_{1,1}$  são apresentadas na Tabela

Tabela 2: Tabela de multiplicação de algumas álgebras de números hipercomplexos.

Quatérnios	$i$	$j$	$k$	Coquatérnios	$i$	$j$	$k$	$\mathcal{Cl}_{1,1}$	$i$	$j$	$k$
$i$	-1	$k$	$-j$	$i$	-1	$k$	$-j$	$i$	1	$k$	$j$
$j$	$-k$	-1	$i$	$j$	$-k$	1	$-i$	$j$	$-k$	-1	$i$
$k$	$j$	$-i$	-1	$k$	$j$	$i$	1	$k$	$-j$	$-i$	1

Bicomplexos	$i$	$j$	$k$	Tessarinos	$i$	$j$	$k$	Klein	$i$	$j$	$k$
$i$	-1	$k$	$-j$	$i$	-1	$k$	$-j$	$i$	1	$k$	$j$
$j$	$k$	-1	$-i$	$j$	$k$	1	$i$	$j$	$k$	1	$i$
$k$	$-j$	$-i$	1	$k$	$-j$	$i$	-1	$k$	$j$	$i$	1

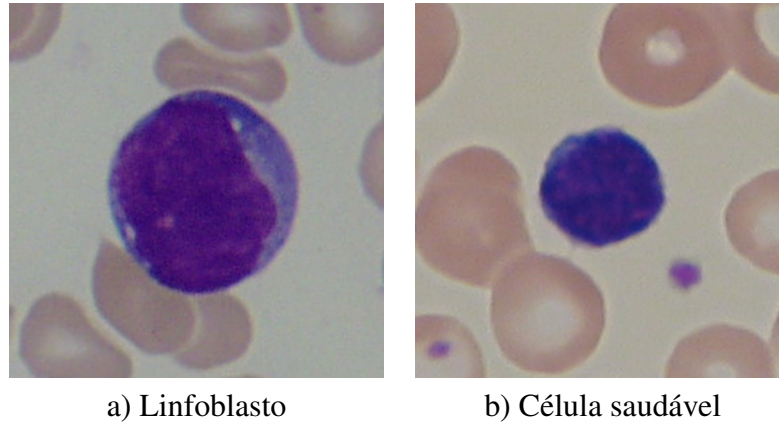


Figura 1: Linfoblasto e célula saudável em recortes de imagens microscópicas de esfregaço de sangue.

2. Na próxima subseção apresentamos um experimento computacional usando as seis álgebras de números hipercomplexos listadas na Tabela 2.

### 2.1.1 Experimento Computacional

Redes neurais, em particular as rede neurais convolucionais, tem demonstrado excelente desempenho em diversas tarefas, incluindo diagnóstico assistido por computador [16, 61]. Nessa subseção, apresentamos a aplicação de redes neurais convolucionais de valor hipercomplexo para classificação de imagens para auxiliar no diagnóstico da leucemia linfoblástica aguda [22]. A leucemia linfoblástica aguda (ALL, do inglês *Acute lymphoblastic leukemia*) é um tipo de câncer de sangue identificado por linfócitos imaturos, conhecidos como linfoblastos, no sangue e na medula óssea. Uma das principais formas de diagnóstico da ALL é através da inspeção da imagem microscópica do esfregaço de sangue [20, 21]. A Figura 1 ilustra recortes de células da imagem microscópica do esfregaço de sangue usados no diagnóstico da ALL. No caso mais simples, a célula deve ser classificada como uma célula saudável ou um linfoblasto. RNAs e técnicas de aprendizado de máquina tem sido amplamente utilizados para a classificação de imagens no diagnóstico automático de ALL [73]. Nesse projeto, usaremos redes neurais convolucionais reais e de valor hipercomplexo, baseadas nas álgebras listadas na Tabela 2, para a classificação de linfoblastos.

As redes neurais convolucionais consideradas nesse experimento computacional contém três

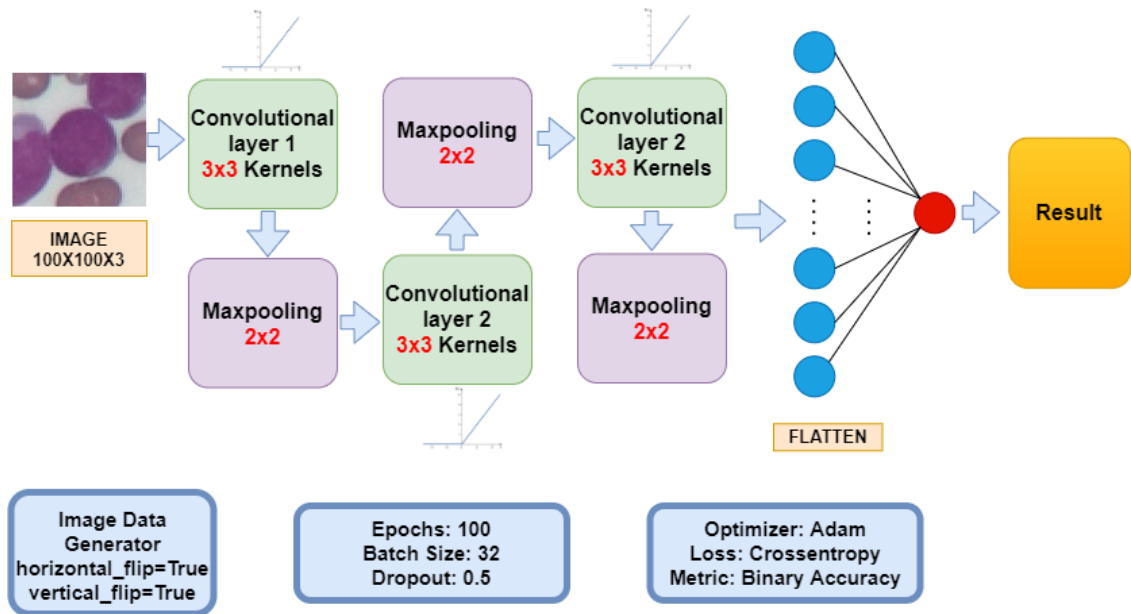


Figura 2: Arquitetura das redes convolucionais usadas no experimento computacional.

Tabela 3: Distribuição dos parâmetros das redes convolucionais real e de valor hipercomplexo.

		Real	Hipercomplexo
Camada Convolutacional 1	Número de Filtros (3,3)	32	8
	Número de Parâmetros	896	320
Camada Convolutacional 2	Número de Filtros (3,3)	64	16
	Número de Parâmetros	18,496	4,672
Camada Convolutacional 3	Número de Filtros (3,3)	128	32
	Número de Parâmetros	73,856	18,560
Camada Densa	Número de Neurônios	1	1
	Número de Parâmetros	12,801	12,801
<b>Total de Parâmetros</b>		106,049	36,353

camadas convolucionais, cada uma seguida de uma camada *max-pooling*, e uma camada densa na saída, tal como ilustrado na Figura 2. O número de filtros das camadas convolucionais e outros detalhes dos modelos real e de valor hipercomplexo estão detalhados na Tabela 3. Note que as redes de valor hipercomplexo possuem aproximadamente 1/4 do número de parâmetros treináveis da rede real nas camadas convolucionais. Com resultado, a rede com valores reais possui 106.049 parâmetros treináveis enquanto que as redes de valor hipercomplexo possuem apenas 36.353 parâmetros treináveis. Em outras palavras, apesar de terem números semelhantes de filtros, as redes convolucionais de valor hipercomplexo possuem aproximadamente 35% do número total de parâmetros do modelo real.

As redes neurais convolucionais foram projetadas para classificar imagens de dimensão  $100 \times 100$ , semelhantes as imagens mostradas na Figura 1. As imagens foram codificadas usando os sistemas de cores RGB e HSV, tal como descrito em [22]. A base de dados ALL-IDB2 foi utilizada para treinar e avaliar o desempenho das redes convolucionais [40]. Essa base de imagens contém 260 imagens rotuladas como linfoblastos ou células saudáveis. Tal como [20, 21], selecionamos aleatoriamente 50% das imagens da base de dados para treinamento e as 130 imagens restantes

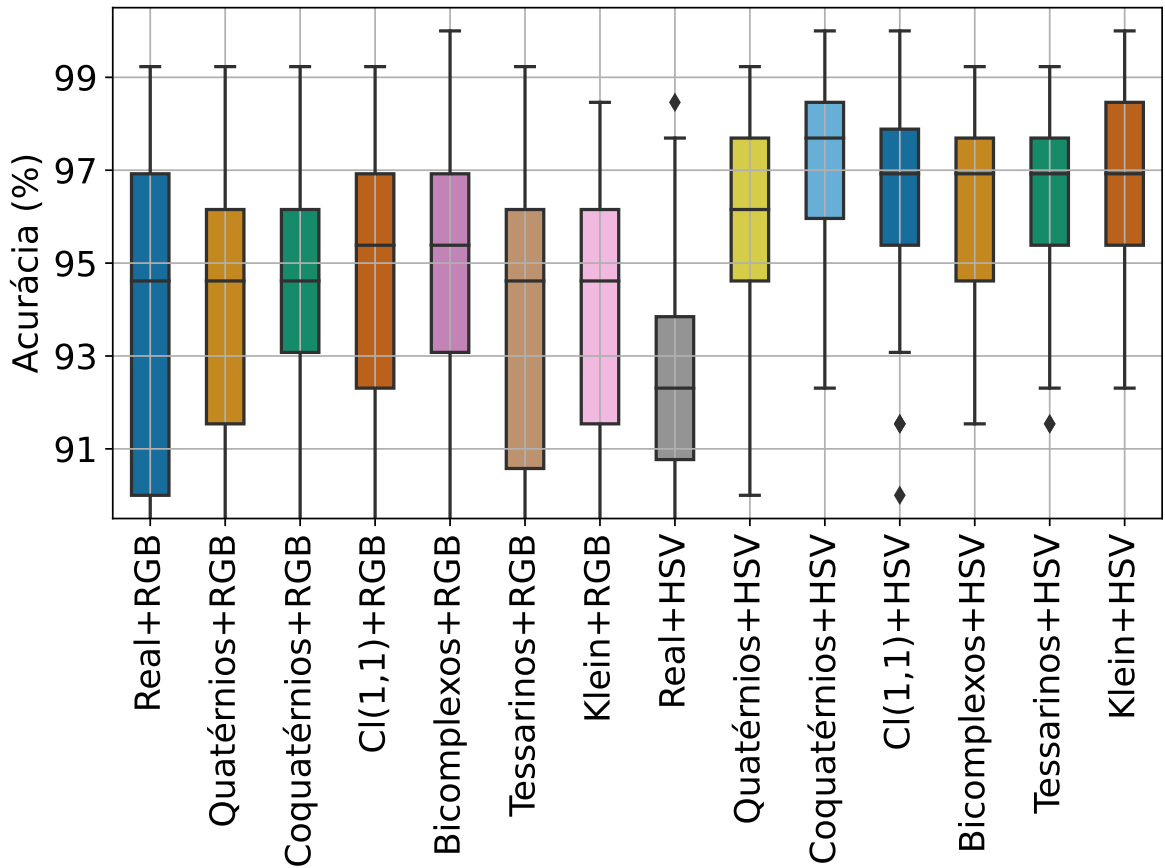


Figura 3: Acurácia das redes convolucionais para classificação de linfoblastos em recortes de imagens de esfregaço de sangue.

foram usadas para teste. Além disso, o conjunto de treinamento foi aumentado considerando reflexões horizontais e verticais das imagens. As redes neurais reais e de valor hipercomplexo foram treinadas por 100 épocas usando o algoritmo Adam com *batch* de tamanho 32. Para uma comparação mais robusta, repetimos o experimento computacional 100 vezes para cada partição da base de dados.

O gráfico da Figura 3 resume o desempenho das redes convolucionais nesse experimento computacional. Note que as redes convolucionais real e de valor hipercomplexo tiveram desempenhos semelhantes com codificação das imagens no espaço de cores RGB. Em outras palavras, as redes convolucionais com codificação RGB tiveram uma acurácia média próxima de 95%. A rede real aplicada as imagens coloridas na codificação HSV teve o pior desempenho, fornecendo uma acurácia média de 92.3%. As maiores acurácias médias foram obtidas pelas redes convolucionais de valor hipercomplexo com a codificação HSV. Especificamente, a rede baseada nos quatérnios produziu uma acurácia média de 96.02% enquanto que as redes baseadas na álgebra de Clifford  $\mathcal{C}_{1,1}$ , nos números bicomplexos, nos tessarinos e no grupo-4 de Klein forneceram uma acurácia média entre 96.26% e 96.58. Finalmente, a rede convolucional baseada nos coquatérnios apresentou o melhor desempenho, com uma acurácia média de 96.92%. Confirmamos que a rede convolucional baseada nos coquetérnios supera todas as outras redes exceto a rede baseada na álgebra de Klein



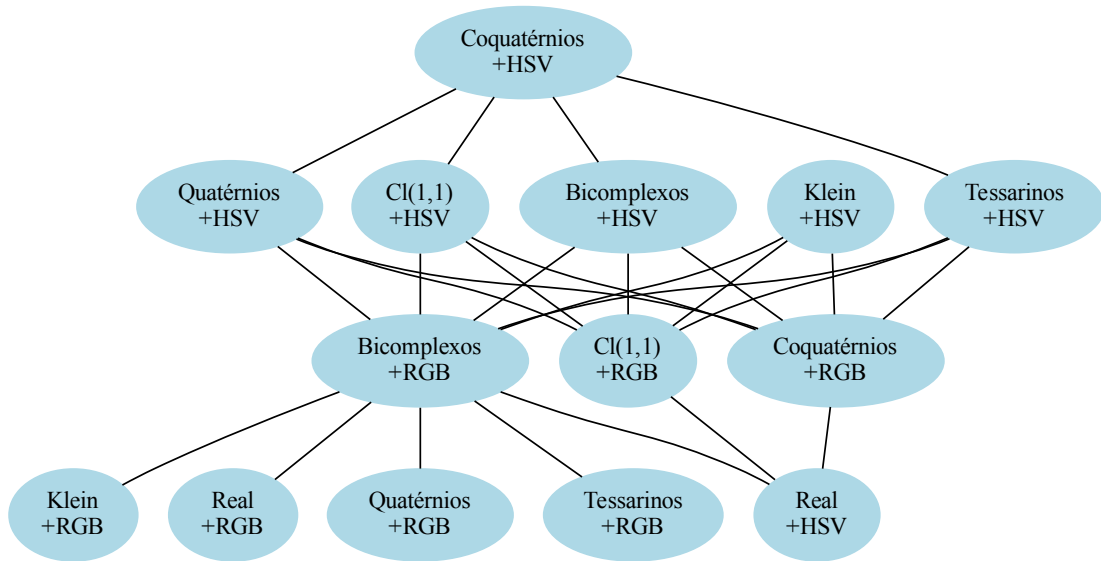


Figura 4: Diagrama de Hasse do teste t de Student.

usando o teste t de Student pareado com nível de confiança de 99%. Especificamente, o diagrama de Hasse na Figura 4 resume o desempenho das redes neurais convolucionais [72]. Nesse diagrama, uma linha indica que o método acima apresentou um desempenho melhor que o método abaixo usando o teste t de Student com 99% de confiança. Esse experimento computacional revela o potencial de álgebras diferentes dos quatérnios para o desenvolvimento de RNAs.

### 3 Objetivos, Plano de Trabalho e Cronograma

Nesse projeto de pesquisa investigaremos RNAs baseadas em números hipercomplexos, com ênfase em álgebras alternativas diferente dos números complexos e quatérnios. Para tanto, serão executadas as seguintes atividades:

#### 1. *Atividade 1 – Implementação e Experimentos Computacionais:*

Existe na literatura muitos trabalhos sobre RNAs usando números hipercomplexos. Nos primeiros 12 meses faremos uma revisão bibliográfica atualizada em RNAs de números hipercomplexos. Sobretudo, implementaremos e realizaremos experimentos computacionais comparando modelos definidos em diferentes álgebras de números hipercomplexos. Iniciaremos nossos experimentos computacionais considerando problemas práticos como a classificação de linfoblastos para o diagnóstico de leucemia, tal como descrito brevemente na Seção 2.1.1.

#### 2. *Atividade 2 – Análise dos Resultados e Fundamentação Teórica:*

Nos 12 meses seguintes faremos uma análise detalhada dos experimentos computacionais e buscaremos explicações teóricas para os resultados obtidos. Em particular, pretendemos

Tabela 4: Cronograma de Execução

Atividade 1	Atividade 2
Mai/2022 a Abril/2023	Mai/2023 a Abril/2024

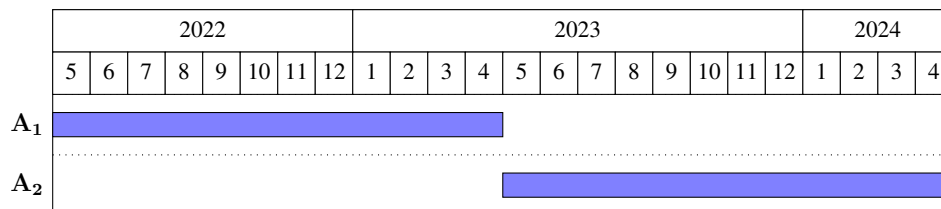


Figura 5: Cronograma de Execução das Atividades 1 e 2.

investigar possível relação entre as propriedades algébricas da multiplicação de números hipercomplexos, como comutatividade, associatividade e divisores de zero, com o desempenho da RNA em certas tarefas. Nessa atividade também investigaremos aspectos teóricos como a validade do teorema da aproximação universal para RNAs definidas em álgebras alternativas.

As duas atividades listadas acima seguirão o cronograma da Tabela 4, que também pode ser visualizado na Figura 5.

Durante todas as atividades, pretendemos divulgar os resultados obtidos em eventos científicos da área bem como envolver alunos de graduação e pós-graduação nessa área de pesquisa. Também serão redigidos artigos científicos que serão submetidos para revistas conceituadas, preferencialmente de circulação internacional.

## 4 Contribuições e Resultados Esperados

Nesse projeto de pesquisa investigaremos RNAs de valor hipercomplexo, com ênfase em álgebras diferentes dos números complexos e quaternions. Em particular, investigaremos o desempenho de redes convolucionais baseadas em álgebras de números hipercomplexos alternativas em problemas de classificação, tal como o problema descrito na Seção 2.1.1. Os resultados obtidos devem avançar o estado da arte em RNAs de valores hipercomplexos. É importante ressaltar que os todos resultados desenvolvidos terão forte fundamento matemático, conforme proposta na Atividade 2 do cronograma de execução. Sobretudo, os resultados desenvolvidos nesse projeto de pesquisa serão submetidos na forma de artigo para um periódico de circulação internacional como *IEEE Transactions on Neural Networks, Neural Networks, Neurocomputing*, dentre outros similares.

## 5 Orçamento Solicitado e Justificativa

Para execução do projeto de pesquisa, serão solicitados, além da reserva técnica e dos benefícios complementares, os seguintes itens:

- a) Computador de 10<sup>a</sup> ou 11<sup>a</sup> Geração ..... **R\$ 15.099,00**  
(Processador Intel i7, HD 1TB e SSD 256GB, 16GB RAM, Monitor 23.8”, Placa NVIDIA RTX com pelo menos 12GB)
- b) Notebook/Ultrabook ..... **R\$ 10.199,00**  
(Processador Intel i7, 10<sup>a</sup> ou 11<sup>a</sup> geração, 16GB RAM, SSD com pelo mais de 500GB, Placa NVIDIA com pelo menos 6GB.)
- TOTAL ..... R\$ 25.298,00**

O computador será utilizado pelo proponente para realização de experimentos computacionais enquanto que o *notebook* será utilizado principalmente para redigir trabalhos científicos e durante a participação eventos. Considerando os avanços na computação GPU, acrescentamos placa de vídeo na configuração de ambos computador e *notebook*.

## Referências

- [1] AIZENBERG, I., AND GONZALEZ, A. Image Recognition using MLMVN and Frequency Domain Features. In *2018 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)* (2018), pp. 1–8.
- [2] AIZENBERG, I. N. *Complex-Valued Neural Networks with Multi-Valued Neurons*, vol. 353 of *Studies in Computational Intelligence*. Springer, 2011.
- [3] AIZENBERG, N. N., IVASKIV, Y. L., AND POSPELOV, D. A. A certain generalization of threshold functions. *Doklady Akademii Nauk SSSR* 196 (1971), 1287–1290.
- [4] ARENA, P., FORTUNA, L., MUSCATO, G., AND XIBILIA, M. G. Multilayer perceptrons to approximate quaternion valued functions. *Neural Networks* 10, 2 (3 1997), 335–342.
- [5] ARENA, P., FORTUNA, L., MUSCATO, G., AND XIBILIA, M. G. Quaternion algebra. In *Neural Networks in Multidimensional Domains*, vol. 234 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer London, 1998, pp. 43–47.
- [6] ARENA, P., FORTUNA, L., OCCHIPINTI, L., AND XIBILIA, M. G. Neural networks for quaternion-valued function approximation. *Proceedings - IEEE International Symposium on Circuits and Systems* 6 (1994), 307–310.
- [7] BAEZ, J. C. The octonions. *Bulletin of the American Mathematical Society* 39 (2002), 145–205.

- [8] BAYRO-CORROCHANO, E., VALLEJO, R., AND ARANA-DANIEL, N. Geometric preprocessing, geometric feedforward neural networks and Clifford support vector machines for visual learning. *Neurocomputing* 67, 1-4 SUPPL. (8 2005), 54–105.
- [9] BUCHHOLZ, S., AND LE BIHAN, N. Polarized signal classification by complex and quaternionic multi-layer perceptrons. In *International Journal of Neural Systems* (4 2008), vol. 18, pp. 75–85.
- [10] BUCHHOLZ, S., AND SOMMER, G. Hyperbolic Multilayer Perceptron. In *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks* (2000), vol. 2, pp. 129–133.
- [11] BUCHHOLZ, S., AND SOMMER, G. On Clifford neurons and Clifford multi-layer perceptrons. *Neural Networks* 21, 7 (9 2008), 925–935.
- [12] CARNIELLO, R. A. F., VITAL, W. L., AND VALLE, M. E. Universal Approximation Theorem for Tessarine-Valued Neural Networks. *Anais do Encontro Nacional de Inteligência Artificial e Computacional (ENIAC)* (11 2021), 233–243.
- [13] CASTRO, F. Z., AND VALLE, M. E. Continuous-Valued Octonionic Hopfield Neural Network. In *Proceedings Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional*. (São José dos Campos – Brazil, 2017), vol. 6.
- [14] DE CASTRO, F. Z., AND VALLE, M. E. A broad class of discrete-time hypercomplex-valued Hopfield neural networks. *Neural Networks* 122 (2020), 54–67.
- [15] DING, T., AND HIROSE, A. Online Regularization of Complex-Valued Neural Networks for Structure Optimization in Wireless-Communication Channel Prediction. *IEEE Access* 8 (2020), 143706–143722.
- [16] EADIE, L. H., TAYLOR, P., AND GIBSON, A. P. A systematic review of computer-assisted diagnosis in diagnostic cancer imaging. *European Journal of Radiology* 81, 1 (1 2012), e70–e76.
- [17] FANG, Z., ZHANG, G., DAI, Q., AND XUE, B. PolSAR Image Classification Based on Complex-Valued Convolutional Long Short-Term Memory Network. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters* 19 (2022), 1–5.
- [18] FORTUNA, L., MUSCATO, G., AND XIBILIA, M. G. An hypercomplex neural network platform for robot positioning. In *Circuits and Systems, 1996. ISCAS '96., Connecting the World., 1996 IEEE International Symposium on* (1996), vol. 3, pp. 609–612 vol.3.
- [19] GARCÍA-RETUERTA, D., CASADO-VARA, R., MARTIN-DEL REY, A., DE LA PRIETA, F., PRIETO, J., AND CORCHADO, J. M. Quaternion Neural Networks: State-of-the-Art and Research Challenges. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture*

*Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics*) 12490 LNCS (11 2020), 456–467.

- [20] GENOVESE, A., HOSSEINI, M. S., PIURI, V., PLATANIOTIS, K. N., AND SCOTTI, F. Acute lymphoblastic leukemia detection based on adaptive unsharpening and deep learning. *ICASSP, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing - Proceedings 2021-June* (2021), 1205–1209.
- [21] GENOVESE, A., HOSSEINI, M. S., PIURI, V., PLATANIOTIS, K. N., AND SCOTTI, F. Histopathological transfer learning for acute lymphoblastic leukemia detection. *CIVEMSA 2021 - IEEE International Conference on Computational Intelligence and Virtual Environments for Measurement Systems and Applications, Proceedings* (6 2021).
- [22] GRANERO, M. A., HERNÁNDEZ, C. X., AND VALLE, M. E. Quaternion-Valued Convolutional Neural Network Applied for Acute Lymphoblastic Leukemia Diagnosis. In *Brazilian Conference on Intelligent Systems. BRACIS 2021. Lecture Notes in Computer Science* (11 2021), Springer, Cham, pp. 280–293.
- [23] HIROSE, A. *Complex-Valued Neural Networks*, 2nd editio ed. Studies in Computational Intelligence. Springer, Heidelberg, Germany, 2012.
- [24] HIROSE, A. Complex-valued neural networks. *Studies in Computational Intelligence* 400 (2012), 1–214.
- [25] HOPFIELD, J. J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 79, 8 (1982), 2554–2558.
- [26] ISOKAWA, T., HISHIMURA, H., KAMIURA, N., AND MATSUI, N. Associative Memory in Quaternionic Hopfield Neural Network. *International Journal of Neural Systems* 18, 02 (2008), 135–145.
- [27] ISOKAWA, T., KUSAKABE, T., MATSUI, N., AND PEPER, F. Quaternion neural network and its application. In *Lecture Notes in Artificial Intelligence (Subseries of Lecture Notes in Computer Science)* (2003), vol. 2774 PART 2, Springer Verlag, pp. 318–324.
- [28] ISOKAWA, T., NISHIMURA, H., AND MATSUI, N. On the fundamental properties of fully quaternionic Hopfield network. In *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)* (Brisbane, Australia, 2012), pp. 1–4.
- [29] JANKOWSKI, S., LOZOWSKI, A., AND ZURADA, J. M. Complex-valued multistate neural associative memory. *IEEE Transactions on Neural Networks* 7, 6 (1996), 1491–1496.
- [30] KANTOR, I. L., AND SOLODOVNIKOV, A. S. *Hypercomplex Numbers: An Elementary Introduction to Algebras*. Springer New York, 1989.

- [31] KIM, T., AND ADALI, T. Approximation by fully complex multilayer perceptrons. *Neural Computation* 15, 7 (2003).
- [32] KOBAYASHI, M. Hyperbolic Hopfield Neural Networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems* 24, 2 (2013).
- [33] KOBAYASHI, M. Global Hyperbolic Hopfield Neural Networks. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences E99.A*, 12 (2016), 2511–2516.
- [34] KOBAYASHI, M. Rotational invariance of quaternionic hopfield neural networks. *IEEJ Transactions on Electrical and Electronic Engineering* 11, 4 (2016), 516–520.
- [35] KOBAYASHI, M. Hopfield neural networks using Klein four-group. *Neurocomputing* 387 (4 2020), 123–128.
- [36] KOBAYASHI, M. Noise Robust Projection Rule for Hyperbolic Hopfield Neural Networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems* 31, 1 (1 2020), 352–356.
- [37] KOBAYASHI, M. Bicomplex-valued twin-hyperbolic Hopfield neural networks. *Neurocomputing* 434 (4 2021), 203–210.
- [38] KUROE, Y. Models of Clifford recurrent neural networks and their dynamics. In *The 2011 International Joint Conference on Neural Networks* (2011), pp. 1035–1041.
- [39] KUSAMICHI, H., ISOKAWA, T., MATSUI, N., OGAWA, Y., AND MAEDA, K. A New Scheme for Color Night Vision by Quaternion Neural Network. In *Proceedings of the 2nd International Conference on Autonomous Robots and Agents (ICARA 2004)* (2004), pp. 101–106.
- [40] LABATI, R. D., PIURI, V., AND SCOTTI, F. {All-IDB:} The acute lymphoblastic leukemia image database for image processing. In *Proceedings - International Conference on Image Processing, ICIP* (2011), pp. 2045–2048.
- [41] LEUNG, H., AND HAYKIN, S. The Complex Backpropagation Algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing* 39, 9 (1991), 2101–2104.
- [42] LU, J., MILLIOZ, F., GARCIA, D., SALLES, S., YE, D., AND FRIBOULET, D. Complex Convolutional Neural Networks for Ultrafast Ultrasound Imaging Reconstruction From In-Phase/Quadrature Signal. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 69, 2 (2 2022), 592–603.
- [43] LV, H., AND ZHANG, H. Quaternion Extreme Learning Machine. In *Proceedings of ELM-2016*. Springer, 2018, pp. 27–36.
- [44] MANDIC, D. P., JAHANCHAH, C., AND TOOK, C. C. A Quaternion Gradient Operator and Its Applications. *Signal Processing Letters, IEEE* 18, 1 (1 2011), 47–50.

- [45] MINEMOTO, T., ISOKAWA, T., NISHIMURA, H., AND MATSUI, N. Quaternionic multistate Hopfield neural network with extended projection rule. *Artificial Life and Robotics* 21, 1 (3 2016), 106–111.
- [46] MINEMOTO, T., ISOKAWA, T., NISHIMURA, H., AND MATSUI, N. Feed forward neural network with random quaternionic neurons. *Signal Processing* 136 (2017), 59–68.
- [47] NAVARRO-MORENO, J., AND RUIZ-MOLINA, J. C. Wide-sense Markov signals on the tessarine domain. A study under properness conditions. *Signal Processing* 183 (6 2021), 108022.
- [48] NITTA, T. *Complex-Valued Neural Networks: Utilizing High-Dimensional Parameters*. Igi Global, Hershey - PA, USA, 2009.
- [49] NITTA, T., AND BUCHHOLZ, S. On the decision boundaries of hyperbolic neurons. In *2008 IEEE International Joint Conference on Neural Networks (IEEE World Congress on Computational Intelligence)* (2008), pp. 2974–2980.
- [50] NITTA, T., AND KUROE, Y. Hyperbolic gradient operator and hyperbolic back-propagation learning algorithms. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems* 29, 5 (2018), 1689–1702.
- [51] PARCOLLET, T., MORCHID, M., AND LINARÈS, G. A survey of quaternion neural networks. *Artificial Intelligence Review* 53, 4 (4 2020), 2957–2982.
- [52] POPA, C. A. Complex-Valued Deep Boltzmann Machines. In *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks* (10 2018), vol. 2018-July, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.
- [53] POPA, C. A. Learning Algorithms for Quaternion-Valued Neural Networks. *Neural Processing Letters* 47, 3 (2018).
- [54] POPA, C. A.-A. Octonion-Valued Neural Networks. In *Artificial Neural Networks and Machine Learning – ICANN 2016: 25th International Conference on Artificial Neural Networks, Barcelona, Spain, September 6-9, 2016, Proceedings, Part I*, A. E. P. Villa, P. Masulli, and A. J. Pons Rivero, Eds. Springer International Publishing, Cham, 2016, pp. 435–443.
- [55] RUMELHART, D. E., AND MCCLELLAND, J. L. *Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructures of Cognition*, vol. 1. MIT Press, Cambridge, MA, 1986.
- [56] SAOUD, L. S., AND AL-MARZOUQI, H. Metacognitive Sedenion-Valued Neural Network and its Learning Algorithm. *IEEE Access* 8 (2020), 144823–144838.
- [57] SAOUD, L. S., AND GHORBANI, R. Metacognitive Octonion-Valued Neural Networks as They Relate to Time Series Analysis. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems* 31, 2 (2 2020), 539–548.

- [58] SENNA, F. R. D., AND VALLE, M. E. Tessarine and Quaternion-Valued Deep Neural Networks for Image Classification. *Anais do Encontro Nacional de Inteligência Artificial e Computacional (ENIAC)* (11 2021), 350–361.
- [59] SHANG, F., AND HIROSE, A. Quaternion Neural-Network-Based PolSAR Land Classification in Poincare-Sphere-Parameter Space. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 52 (2014), 5693–5703.
- [60] SOARES, J. A., MAYER, K. S., DE CASTRO, F. C. C., AND ARANTES, D. S. Complex-Valued Phase Transmittance RBF Neural Networks for Massive MIMO-OFDM Receivers. *Sensors* 2021, Vol. 21, Page 8200 21, 24 (12 2021), 8200.
- [61] SPYRIDONOS, P., GAITANIS, G., LIKAS, A., AND BASSUKAS, I. Characterizing Malignant Melanoma Clinically Resembling Seborrheic Keratosis Using Deep Knowledge Transfer. *Cancers* 2021, Vol. 13, Page 6300 13, 24 (12 2021), 6300.
- [62] TAKAHASHI, K. Comparison of high-dimensional neural networks using hypercomplex numbers in a robot manipulator control. *Artificial Life and Robotics* 26, 3 (8 2021), 367–377.
- [63] TERABAYSASHI, K., AND HIROSE, A. Ultra-short acoustic imaging using complex-valued spatio-temporal neural-network for null-steering: experimental results. In *Proceedings of the IEEE World Conference on Computational Intelligence 2014 ({WCCI} 2014)* (Beijing, China, 2014).
- [64] TRABELSI, C., BILANIUK, O., ZHANG, Y., SERDYUK, D., SUBRAMANIAN, S., SANTOS, J. F., MEHRI, S., ROSTAMZADEH, N., BENGIO, Y., AND PAL, C. J. Deep complex networks, 5 2017.
- [65] UJANG, B. C., TOOK, C. C., AND MANDIC, D. P. Quaternion-valued nonlinear adaptive filtering. *IEEE Transactions on Neural Networks* 22, 8 (2011).
- [66] VALLE, M. E., AND CASTRO, F. Z. On the Dynamics of Hopfield Neural Networks on Unit Quaternions. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems* 29, 6 (2018), 2464–2471.
- [67] VALLE, M. E., AND LOBO, R. A. Quaternion-valued recurrent projection neural networks on unit quaternions. *Theoretical Computer Science* 843 (12 2020), 136–152.
- [68] VALLE, M. E., AND LOBO, R. A. Hypercomplex-valued recurrent correlation neural networks. *Neurocomputing* 432 (4 2021), 111–123.
- [69] VALLEJO, J. R., AND BAYRO-CORROCHANO, E. Clifford Hopfield Neural Networks. In *2008 IEEE International Joint Conference on Neural Networks (IEEE World Congress on Computational Intelligence)* (2008), pp. 3609–3612.



- [70] VAZ, J., AND DA ROCHA, R. *An Introduction to Clifford Algebras and Spinors*. Oxford University Press, 2016.
- [71] VIEIRA, G., AND EDUARDO VALLE, M. Extreme Learning Machines on Cayley-Dickson Algebra Applied for Color Image Auto-Encoding. In *2020 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN) (7 2020)*, IEEE, pp. 1–8.
- [72] WEISE, T., AND CHIONG, R. An alternative way of presenting statistical test results when evaluating the performance of stochastic approaches. *Neurocomputing 147* (2015), 235–238.
- [73] ZOLFAGHARI, M., AND SAJEDI, H. A survey on automated detection and classification of acute leukemia and WBCs in microscopic blood cells. *Multimedia Tools and Applications* (1 2022), 1–31.