



Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática Aplicada

RELATÓRIO CIENTÍFICO FINAL

TÍTULO DO PROJETO:

Estudo sobre Modelos de Memórias Associativas para Imagens
Coloridas

NÚMERO DO PROCESSO: **304240/2011-7**

EDITAL/CHAMADA: **Produtividade em Pesquisa - PQ - 2011**

PESQUISADOR RESPONSÁVEL:

Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita

Campinas, 25 de fevereiro de 2015.

1 Resumo do Projeto Aprovado em 2012

Memórias associativas (AMs) são modelos matemáticos inspirados na capacidade do cérebro humano de armazenar e recordar por associação. Sobretudo, assim como o cérebro, AMs também são capazes de recordar um certo padrão mesmo quando a entrada representa uma versão incompleta ou ruidosa de um item armazenado. O proponente introduziu recentemente uma classe de modelos de AMs, chamadas *memórias auto-associativas morfológicas esparsas* (SCAMMs). As SCAMMs são redes neurais progressivas de camada única cujos neurônios calculam ou o máximo ou o mínimo de algumas das entradas. Essas memórias são computacionalmente mais baratas que modelos tradicionais e possuem um vasto campo de aplicações pois estão baseadas apenas numa estrutura de reticulado completo. Em particular, as SCAMMs podem ser usadas para o armazenamento e recordação de imagens coloridas.

Nesse projeto de pesquisa, daremos continuação aos estudos sobre os modelos de memórias associativas para imagens coloridas. Em particular, investigaremos propriedades teóricas das SCAMMs definidas em diferentes espaços de cores e com diferentes esquemas de ordem. Além disso, compararemos o desempenho das SCAMMs com outros modelos da literatura, como a memória bidirecional hetero-associativa de Monteros e Azuela e a classe de redes de Cohen-Grossberg desenvolvida por Zheng et al. para imagens coloridas.

Palavras-chave: Memórias associativas, redes neurais artificiais, morfologia matemática, reticulado, reconstrução de imagens.

2 Introdução Geral

Memórias associativas (AMs, do inglês *associative memories*) são modelos matemáticos inspirados na habilidade do cérebro humano de armazenar e recordar informações [10, 14]. Tais como as redes neurais biológicas, uma AM deve ser capaz de recuperar uma informação memorizada mesmo diante da apresentação de um item incompleto ou distorcido. Aplicações de AMs incluem classificação [24, 42], previsão [25, 26, 27, 23] e reconhecimento de padrões [40, 41]. Modelos de AMs também foram aplicados para o armazenamento e recuperação de imagens coloridas [35, 29, 43].

A maioria dos modelos de AM para imagens coloridas estão baseados em duas abordagens que permitem generalizar de forma direta um modelo em tons de cinza para imagens coloridas. A primeira abordagem está baseada no sistema RGB, no qual um elemento de cor c é expresso em termos das componentes vermelho (*red*), verde (*green*) e azul (*blue*), ou seja, $c = [c_r, c_g, c_b]$ [1, 9]. Desta forma, uma imagem pode ser decomposta em três imagens em tons de cinza que são geralmente armazenadas em modelos distintos de AM (projetadas para armazenar imagens em tons de cinza). Zheng et al. empregaram essa abordagem para imagens coloridas usando uma classe de redes de Cohen-Grossberg [43]. Embora qualquer AM em tons de cinza pode ser estendida para armazenar imagens coloridas usando essa estratégia, a falta de interação entre os canais de cores pode influenciar a tolerância a ruído da memória colorida.

A segunda abordagem está baseada na representação de 24-bit de uma imagem digital colorida e foi usada, por exemplo, por Vázquez e Sossa [35, 36]. Especificamente, um elemento de cor $c = [c_r, c_g, c_b]$, em que $c_r, c_g, c_b \in \{0, 1, \dots, 255\}$ representam as componentes vermelho, verde e azul no sistema digital 8-bit, é associado a um inteiro q entre 0 e $2^{24} - 1$ através da equação $q = 256^2 c_r + 256 c_g + c_b$. Em vista dessa representação, qualquer AM projetada para armazenar padrões com valores inteiro ou reais pode também armazenar imagens coloridas. A desvantagem dessa abordagem é que elementos de cor visualmente diferentes podem ser associados a inteiros próximos. Por exemplo, um elemento visualmente preto cuja representação no sistema RGB é $[0, 1, 0]$ e o azul puro $[0, 0, 255]$ são associados respectivamente aos inteiros 256 e 255, respectivamente.

Diferente das duas abordagens mencionadas acima, o proponente desenvolveu uma classe de AMs, chamadas *memórias autoassociativas morfológicas esparsas* (SCAMMs, do inglês *sparsely connected autoassociative morphological memories*), que não estão baseadas em modelos em tons de cinza [29, 32]. De fato, as SCAMMs foram concebidas para armazenar e recordar padrões multi-valores, que incluem as imagens coloridas como caso particular. As SCAMMs são equipadas com neurônios que calculam ou uma dilatação ou uma erosão da morfologia matemática (MM), uma teoria muito empregada no processamento e análise de imagens e sinais [20, 21, 11, 22]. Especificamente, a saída de um neurônio de uma SCAMM é dada ou pelo máximo ou pelo mínimo de algumas de suas entradas. Esses são, portanto, modelos muito gerais de neurônios, pois requerem apenas uma estrutura de reticulado completo, i.e., um conjunto parcialmente ordenado no qual o supremo (ou máximo) e o ínfimo (ou mínimo) estão bem definidos [2]. Além disso, as SCAMMs são sintetizadas utilizando uma técnica de armazenamento que geralmente produz uma rede de estrutura esparsa. Consequentemente, elas requerem menos esforço computacional que muitos modelos tradicionais de AMs. Por exemplo, uma SCAMM consumiu aproximadamente 83MB para o armazenamento de doze imagens coloridas de tamanho 512×512 pixels [29]. Por outro lado, mais de 1TB seria necessário para o armazenamento do mesmo conjunto de imagens na rede de Cohen-Grossberg usando a abordagem baseada no sistema RGB [43].

Conforme o cronograma do projeto de pesquisa, investigamos as propriedades teóricas e realizamos experimentos computacionais com as SCAMMs na primeira etapa do projeto de pesquisa (primeiros três semestres). A Seção 4 apresenta um resumo dos principais resultados obtidos. Conforme o cronograma, na segunda etapa do projeto de pesquisa (demais três semestres) desenvolvemos duas classes de memórias associativa para imagens coloridas: as memórias associativas morfológicas Brouwerianas e as memórias associativas baseadas em quantales, que são brevemente apresentadas nas Seções 5 e 6, respectivamente. Uma breve descrição de um experimento computacional com imagens coloridas é apresentado na Seção 7. O relatório termina com a conclusão e uma lista das principais publicações resultantes do auxílio.

3 Alguns Conceitos Matemáticos Relevantes

Os principais modelos de memória associativa desenvolvidos nesse projeto de pesquisa estão baseados na morfologia matemática que, por sua vez, pode ser definida de forma elegante usando uma estrutura matemática chamada reticulados completos [11, 12]. Um conjunto parcialmente ordenado \mathbb{L} é um reticulado completo se todo subconjunto $X \subseteq \mathbb{L}$ admite supremo e ínfimo em \mathbb{L} , denotados respectivamente por $\bigvee X$ e $\bigwedge X$ [2]. Se $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ é um subconjunto finito de \mathbb{L} , então também denotamos $\bigvee X$ e $\bigwedge X$ respectivamente por

$$\bigvee_{i=1}^n x_i = x_1 \vee \dots \vee x_n \quad \text{e} \quad \bigwedge_{i=1}^n x_i = x_1 \wedge \dots \wedge x_n. \quad (1)$$

Qualquer reticulado completo admite um maior e um menor elemento, denotadas respectivamente por $\top = \bigvee \mathbb{B}$ and $\perp = \bigwedge \mathbb{B}$.

Um reticulado completo \mathbb{B} é dito Brouweriano se e somente se a equação

$$a \wedge \left(\bigvee X \right) = \bigvee_{x \in X} (a \wedge x), \quad (2)$$

é verdadeira para qualquer $a \in \mathbb{B}$ e $X \subseteq \mathbb{B}$ [2]. Neste caso, para quaisquer elementos $a, b \in \mathbb{B}$, o conjunto $S = \{x \in \mathbb{B} : a \wedge x \leq b\}$ tem um elemento máximo (ou seja, o supremo de S pertence à S), chamado *pseudo-complemento* de a relativo a b e denotado por b/a . O ínfimo e o pseudo-complemento relativo satisfazem as seguintes equivalências para $a, b, x \in \mathbb{B}$:

$$a \wedge x \leq b \quad \iff \quad x \leq b/a. \quad (3)$$

Qualquer conjunto totalmente ordenado é um reticulado completo Brouweriano [2]. Logo, o conjunto dos reais estendidos $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ é um reticulado completo Brouweriano. Reticulados Brouwerianos foram estudados por Brouwer e Heyting como uma generalização da álgebra Booleana. Eles também representam uma modificação rica da lógica binária na qual não se assume a veracidade da prova por contradição [2].

Um reticulado completo \mathbb{Q} equipado com uma operação binária que distribui em ambos argumentos com o supremo é chamado quantale. O conceito de quantale foi desenvolvido por Mulvey com intuito de formalizar a lógica da mecânica quântica [16]. A noção de quantale também está relacionado com a lógica linear de Girard [8, 39], o conceito de reticulados residuais [37, 19], e a estrutura algébrica chamada *complete lattice-ordered double monoid* (clodum) introduzida por Maragos com objetivo de unificar abordagens da morfologia matemática [15].

Neste artigo, denotaremos a operação binária por “ \cdot ” e chamaremos ela multiplicação do quantale. A operação “ \cdot ” distribui com o supremo se as seguintes identidades são válidas para quaisquer $q \in \mathbb{Q}$ e para todo conjunto não-vazio $X \subseteq \mathbb{Q}$:

$$q \cdot \left(\bigvee X \right) = \bigvee_{x \in X} \{q \cdot x\} \quad \text{e} \quad \left(\bigvee X \right) \cdot q = \bigvee_{x \in X} \{x \cdot q\}. \quad (4)$$

As equações acima mostram que a multiplicação é crescente em ambos os argumentos, ou seja, $x \leq y$ então $x \cdot q \leq y \cdot q$ e $q \cdot x \leq q \cdot y$ para todo $q \in \mathbb{Q}$. Além disso, o menor elemento de \mathbb{Q} é um zero de “ \cdot ”, ou seja, $q \cdot \perp = \perp \cdot q = \perp$ para todo $q \in \mathbb{Q}$ [19].

Dizemos que um quantale é comutativo se a multiplicação é comutativa. Se a multiplicação possui identidade ou elemento neutro, ou seja, se existe $e \in \mathbb{Q}$ tal que $e \cdot x = x \cdot e = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, então tem-se um quantale unital. Por simplicidade, consideraremos apenas quantales unitais comutativos.

Finalmente, a multiplicação de um quantale \mathbb{Q} é sempre residuada [19, 3, 4]. Consequentemente, existe uma operação binária “/” em \mathbb{Q} tal que vale a seguinte equivalência $a, b, x \in \mathbb{Q}$:

$$a \cdot x \leq b \iff x \leq b/a. \quad (5)$$

A operação “/” é chamada resíduo ou divisão de “ \cdot ”. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$, esta operação é unicamente determinada pela equação

$$y/x = \bigvee \{z \in \mathbb{Q} : z \cdot x \leq y\}. \quad (6)$$

Note que o resíduo de um quantale é denotado pelo mesmo símbolo do pseudo-complemento relativo de um reticulado completo Brouweriano. Com efeito, um reticulado completo Brouweriano é um quantale em que a operação de mínimo “ \wedge ” corresponde à uma multiplicação.

4 Memórias AutoAssociativas Morfológicas Esparsas

As memórias autoassociativas morfológicas esparsas (SCAMMs, do inglês *sparsely connected morphological autoassociative memories*), introduzidas por Valle [29] e investigada por Valle e Grande Vicente [33], são definidas em um reticulado completo arbitrário e não requerem nenhuma operação além do supremo (máximo) e ínfimo (mínimo).

Especificamente, seja \mathbb{L} um reticulado completo. Considere um conjunto $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\} \subseteq \mathbb{L}^n$, em que cada $\mathbf{x}^\xi = [x_1^\xi, \dots, x_n^\xi]^T$ é um vetor com n componentes no qual desejamos memorizar. Primeiramente, sintetizamos o conjunto

$$\mathcal{S} = \{(i, j) : x_j^\xi \leq x_i^\xi, \forall \xi = 1, \dots, p\}, \quad (7)$$

chamado conjunto das junções sinápticas. Posteriormente, dado um padrão de entrada $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{L}^n$, que pode ser uma versão corrompida ou distorcida de um dos itens memorizados, a operação de supremo é empregada da seguinte forma determinar o vetor \mathbf{y} recuperado pela SCAMMs \mathcal{W} :

$$y_i = \bigvee_{(i,j) \in \mathcal{S}} x_j, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Pode-se observar que a SCAMM é equipada com neurônios que efetuam operações da morfologia matemática baseada da abordagem de *threshold* [28, 31]. Neste contexto, podemos

identificar o conjunto das junções sinápticas \mathcal{S} em (8) com o elemento estruturante. Além disso, pode-se mostrar que a SCAMM pode ser derivada de uma memória autoassociativa morfológica tradicional (TAMM, do inglês *traditional autoassociative morphological memories*) de Ritter e Sussner [18] usando uma operação de *threshold* [33]. Finalmente, pode-se mostrar que a SCAMM apresentada acima satisfaz o seguinte teorema [33]:

Teorema 1. *Considere um conjunto de vetores $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k\} \subseteq \mathbb{L}^n$ e defina o conjunto \mathcal{S} das junções sinápticas através de (7). Dado um vetor de entrada $\mathbf{x} \in \mathbb{L}^n$, o vetor $\mathbf{y} = \mathcal{W}(\mathbf{x})$, recordado pela SCAMM $\mathcal{W} : \mathbb{L}^n \rightarrow \mathbb{L}^n$ usando (8), é o menor ponto fixo \mathbf{z} de \mathcal{W} tal que $\mathbf{z} \geq \mathbf{x}$. Em outras palavras, tem-se*

$$\mathcal{W}(\mathbf{x}) = \bigwedge \{ \mathbf{z} \in \mathbb{L}^n : \mathcal{W}(\mathbf{z}) = \mathbf{z} \text{ e } \mathbf{z} \geq \mathbf{x} \}. \quad (9)$$

Além disso, o conjunto dos pontos fixos de \mathcal{W} contém as memórias fundamentais $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\}$. Em outras palavras, a equação $\mathcal{W}(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{x}^\xi$ vale para todo $\xi = 1, \dots, p$.

Como consequência do Teorema 1, podemos listar as seguintes propriedades:

1. A SCAMM \mathcal{W} exibe ótima capacidade absoluta de armazenamento. Portanto, pode-se armazenar quantos padrões forem desejados nesses modelos.
2. O padrão recordado por \mathcal{W} permanece o mesmo após repetidas aplicações do modelo. Em outras palavras, esse modelo apresenta convergência numa única iteração se empregado com realimentação (*feedback*).
3. O padrão recordado pela SCAMM representa o menor ponto fixo de \mathcal{W} maior ou igual ao padrão de entrada. Logo, para que um padrão original \mathbf{x}^ξ seja recordado pela memória, é necessário que o padrão de entrada \mathbf{x} satisfaça $x_i \leq x_i^\xi$, para todo $i = 1, \dots, n$.
4. A SCAMM \mathcal{W} apresenta uma grande quantidade de memórias espúrias que são armazenadas indiretamente no modelo. Essa observação segue do fato dos conjuntos dos pontos fixos de \mathcal{W} inclui uma grande quantidade de pontos fixos diferentes das memórias fundamentais $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p$.

Em particular, pode-se mostrar que o conjunto dos pontos fixos da TAMM W_{XX} está contido no conjunto dos pontos fixos de \mathcal{W} [33]. Esta observação explica porque a TAMM W_{XX} apresenta uma melhor tolerância a ruído que a SCAMM \mathcal{W} em certas aplicações com respeito a reconstrução de imagens em tons de cinza [29]. Contudo, a TAMM W_{XX} é computacionalmente muito mais cara que a SCAMM \mathcal{W} e, portanto, W_{XX} não pode ser aplicada em problemas de dimensão n grande.

5 Memórias Autoassociativas Morfológicas Brouwerianas

Na seção anterior, apresentamos a SCAMM e observamos que esse modelo de memória associativa está baseado na abordagem do *threshold* da morfologia matemática. Nesta seção, intro-

duzimos um modelo de memória associativa cujos neurônios realizam dilatações da abordagem *level-set* da morfologia matemática. O novo modelo é chamado memória associativa morfológica Brouweriana (BAMMs, do inglês *Brouwerian autoassociative morphological memories*) em vista da estrutura matemática usada para defini-las.

Seja \mathbb{B} um reticulado completo Brouweriano e considere um conjunto $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\} \subseteq \mathbb{B}^n$ de vetores que desejamos armazenar. Como o número de conexões sinápticas pode inviabilizar o modelo em aplicações nas quais n é grande, consideraremos modelos com estrutura esparsa. A estrutura esparsa de uma rede é caracterizada por um conjunto $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, em que $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$. O i -ésimo neurônio de saída recebe a j -ésima entrada se e somente se $(i, j) \in \mathcal{T}$. Conseqüentemente, guardamos apenas os pesos w_{ij} tais que $(i, j) \in \mathcal{T}$. Uma rede totalmente conectada é obtida considerando $A = \mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Sobretudo, estes pesos são determinados através da seguinte equação para $(i, j) \in \mathcal{T}$, em que o símbolo “/” denota o pseudo-complemento relativo:

$$w_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^p (x_i^\xi / x_j^\xi). \quad (10)$$

Diferente da TAMM W_{XX} e da SCAMM \mathcal{W} , a BAMM é uma rede neural recorrente. Em outras palavras, a fase de recordação da BAMM é descrita por um processo dinâmico tal como na rede de Hopfield discreta no tempo [13]. Formalmente, dado um vetor de entrada $\mathbf{x} \in \mathbb{B}^n$, primeiramente definimos $\mathbf{y}(0) = \mathbf{z}(0) = \mathbf{x}$ e calculamos a sequência $\{\mathbf{y}(t)\}_t$ recursivamente da seguinte forma para um inteiro positivo t :

$$y_i(t+1) = \bigvee_{(i,j) \in \mathcal{T}} (y_j(t) \wedge w_{ij}), \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Finalmente, a t -BAMM $\mathcal{B}_t : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ é a aplicação dada por

$$\mathcal{B}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{y}(t). \quad (12)$$

Observe que $\mathbf{y}(1)$ corresponde ao vetor recordado pelo modelo de passo-único \mathcal{B}_1 . Além disso, $\mathcal{B}_{t+1}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}_1(\mathcal{B}_t(\mathbf{x}))$ para quaisquer t e \mathbf{x} . Definimos a $*$ -BAMM como a aplicação $\mathcal{B}_* : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ dada por

$$\mathcal{B}_*(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t), \quad (13)$$

sempre que a sequência $\{\mathbf{y}(t)\}_t$ converge para qualquer $\mathbf{x} = \mathbf{y}(0) \in \mathbb{B}^n$. A convergência da sequência $\{\mathbf{y}(t)\}_t$ depende da arquitetura \mathcal{T} da BAMMs.

O seguinte teorema fornece condições suficientes para a existência do limite $\mathbf{y}_* = \lim_t \mathbf{y}(t)$. Além disso, o teorema revela que \mathbf{y}_* pertence ao conjunto dos pontos fixos da BAMM de passo único \mathcal{B}_1 [31]:

Teorema 2. *Dado um conjunto $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\} \subseteq \mathbb{B}^n$, defina $w_{i,j}$ por (10) usando uma arquitetura de rede \mathcal{T} tal que $(i, i) \in \mathcal{T}$ para todo $i \in \mathcal{N}$. A BAMM \mathcal{B}_* dada pelo limite da sequência (11) está bem definida e satisfaz as seguintes desigualdades para qualquer vetor de entrada $\mathbf{x} \in \mathbb{B}^n$*

e para qualquer inteiro $t \geq 1$:

$$\mathbf{x} \leq \mathcal{B}_t(\mathbf{x}) \leq \mathcal{B}_{t+1}(\mathbf{x}) \leq \mathcal{B}_*(\mathbf{x}) = \bigwedge \{ \mathbf{z} \in \mathbb{B}^n : \mathcal{B}_1(\mathbf{z}) = \mathbf{z} \text{ e } \mathbf{x} \leq \mathbf{v} \}. \quad (14)$$

Além disso, tem-se $\mathcal{B}_t(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{x}^\xi$ para todo $\xi = 1, \dots, p$ e para qualquer inteiro positivo t .

O Teorema 2 mostre que \mathcal{B}_* compartilha com a TAMM W_{XX} e a SCAMMs \mathcal{W} as cinco propriedades listadas na Seção 4. Em particular, \mathcal{B}_* apresenta ótima capacidade absoluta de armazenamento. Sobretudo, a fase de recordação da BAMM \mathcal{B}_* também é completamente caracterizada pelo conjunto dos seus pontos fixos.

Vamos concluir a seção apresentando uma relação entre a BAMM \mathcal{B}_* e a SCAMM \mathcal{W} :

Teorema 3. *Considere um conjunto de vetores $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\} \subseteq \mathbb{B}^n$, em que \mathbb{B} é um reticulado completo Brouweriano. Defina a SCAMM \mathcal{W} através de (7) e (8). Neste caso, existe uma BAMM de passo único \mathcal{B}_1 tal que $\mathcal{B}_1(\mathbf{x}) = \mathcal{W}(\mathbf{x})$ para todo vetor de entrada $\mathbf{x} \in \mathbb{B}^n$. Sobretudo, a arquitetura \mathcal{T} da BAMMs coincide com o conjunto \mathcal{S} das junções sinápticas da SCAMM.*

O Teorema 3 mostra que uma SCAMMs pode ser vista como uma BAMMs considerando um arquitetura específica (i.e., $\mathcal{T} = \mathcal{S}$). O Teorema 3 também mostra que as BAMMs são potencialmente melhores que as SCAMMs pois podemos obter resultados melhores escolhendo uma arquitetura \mathcal{T} diferente do conjunto das junções sinápticas \mathcal{S} . Confirmamos essa observação por meio de experimentos computacionais com respeito a reconstrução de imagens coloridas [6]. Sobretudo, adotando uma arquitetura de rede apropriada, as BAMMs consumiram menos recursos computacionais que a SCAMM \mathcal{W} .

6 Memórias AutoAssociativas Baseadas em Quantales

As memórias autoassociativas baseadas em quantales (QAMs, do inglês *quantale-based autoassociative memories*) apresentadas nesta seção são semelhantes as BAMMs discutidas na Seção 5. Porém, no lugar de um reticulado completo Brouweriano, considera-se um quantale comutativo unital (\mathbb{Q}, \cdot) [34].

Suponha que desejamos armazenar na memória um conjunto de vetores $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^p\}$, em que cada $\mathbf{x}^\xi = [x_1, \dots, x_n]^\top$ é um vetor com n componentes em um quantale (\mathbb{Q}, \cdot) . Tal como nas BAMMs, vamos denotar por $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$, a arquitetura da rede. Desta forma, iremos considerar apenas os pesos $h_{ij} \in \mathbb{Q}$ tais que $(i, j) \in \mathcal{T}$. Especificamente, dado um vetor de entrada $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^\top \in \mathbb{Q}^n$, consideramos $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}$ e definimos a t -QAM, para $t = 1, 2, \dots$, como a aplicação $\mathcal{H}_t : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ que fornece o t -ésimo vetor da sequência $\{\mathbf{x}(t)\}_{t \geq 0}$ definida recursivamente através da equação

$$x_i(t) = \bigvee_{(i,j) \in \mathcal{T}} \{h_{ij} \cdot x_j(t-1)\}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Se a sequência $\{\mathbf{x}(t)\}_{t=0}^\infty$ é convergente para qualquer entrada $\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^n$, definimos a $*$ -QAM como a aplicação $\mathcal{H}_* : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ dada por $\mathcal{H}_*(\mathbf{x}) = \lim \mathbf{x}(t)$.

Agora, dado um conjunto $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^p\} \subseteq \mathbb{Q}^n$ de vetores que desejamos armazenar e uma certa arquitetura de rede $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, os pesos h_{ij} , $(i, j) \in \mathcal{T}$, são determinados através da equação

$$h_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^p \left(x_i^\xi / x_j^\xi \right), \quad \forall (i, j) \in \mathcal{T}. \quad (16)$$

Como os pesos h_{ij} são determinados usando o resíduo “/” da multiplicação do quantale \mathbb{Q} , referimos à (16) como regra de armazenamento por resíduo (em inglês, *residual recording recipe*).

A regra de armazenamento por resíduo é ótima no seguinte sentido: Se existem pesos $a_{ij} \in \mathbb{Q}$ tais que $x_i^\xi = \bigvee_{(i,j) \in \mathcal{T}} \{a_{ij} \cdot x_j^\xi\}$, então (16) fornece h_{ij} tais que $x_i^\xi = \bigvee_{(i,j) \in \mathcal{T}} \{h_{ij} \cdot x_j^\xi\}$ e $a_{ij} \leq h_{ij}$ para todo $(i, j) \in \mathcal{T}$. Além disso, tal como a BAMB, a sequência $\{\mathbf{x}(t)\}_{t=0}^\infty$ dada por (15), com a regra de armazenamento por resíduo, está bem definida e é convergente se $(i, i) \in \mathcal{T}$ para todo $i \in \mathcal{N}$. Sobretudo, o seguinte teorema, que é muito semelhante ao Teorema 2, revela que a sequência $\{\mathbf{x}(t)\}$ está fortemente relacionada ao conjunto

$$\mathcal{F} = \left\{ \mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T \in \mathbb{Q}^n : z_i = \bigvee_{(i,j) \in \mathcal{T}} \{h_{ij} \cdot z_j\}, \forall i \in \mathcal{N} \right\}, \quad (17)$$

de todos os pontos fixos de \mathcal{H}_1 . O seguinte teorema também mostra que, independente do número p , todos os vetores $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p$ que desejamos armazenar pertencem a \mathcal{F} . Consequentemente, a QAM exibe ótima capacidade de armazenamento.

Teorema 4. *Dado um conjunto de vetores $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^p\} \subseteq \mathbb{Q}$ e uma arquitetura de rede \mathcal{T} com $(i, i) \in \mathcal{T}$, defina h_{ij} através da equação (16) para $(i, j) \in \mathcal{T}$. Neste caso, as seguintes desigualdades são válidas para qualquer entrada $\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^n$ e para todo $t \geq 1$:*

$$\mathbf{x} \leq \mathcal{H}_t(\mathbf{x}) \leq \mathcal{H}_{t+1}(\mathbf{x}) \leq \mathcal{H}_*(\mathbf{x}) = \bigwedge \{\mathbf{z} \in \mathcal{F} : \mathbf{z} \geq \mathbf{x}\}. \quad (18)$$

Além disso, $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^p\} \subseteq \mathcal{F}$ e, portanto, a equação $\mathcal{H}_t(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{x}^\xi$ é verdadeira para todo $\xi = 1, \dots, p$ e para qualquer $t \geq 1$.

A TAMB W_{XX} , que é definida no quantale $(\mathbb{R}_{\pm\infty}, +)$ ou $(\mathbb{Z}_{\pm\infty}, +)$, é um exemplo de QAM com a regra de armazenamento por resíduo [24]. As memórias associativas nebulosas implicativas, (IFAMs, do inglês *Implicative fuzzy associative memories*), definidas no quantale obtido considerando o intervalo $[0, 1]$ com uma norma triangular contínua, também representa uma QAM com a regra de armazenamento por resíduo [25]. Como tanto a TAMB W_{XX} como as IFAMs são redes totalmente conectadas, ou seja, $\mathcal{T} = \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, elas satisfazem o Teorema 4.

7 Experimento Computacional com Imagens Coloridas

Nesta seção ilustraremos brevemente a aplicação de modelos de AMs para a reconstrução de imagens coloridas usando os experimentos computacionais descritos em [34].

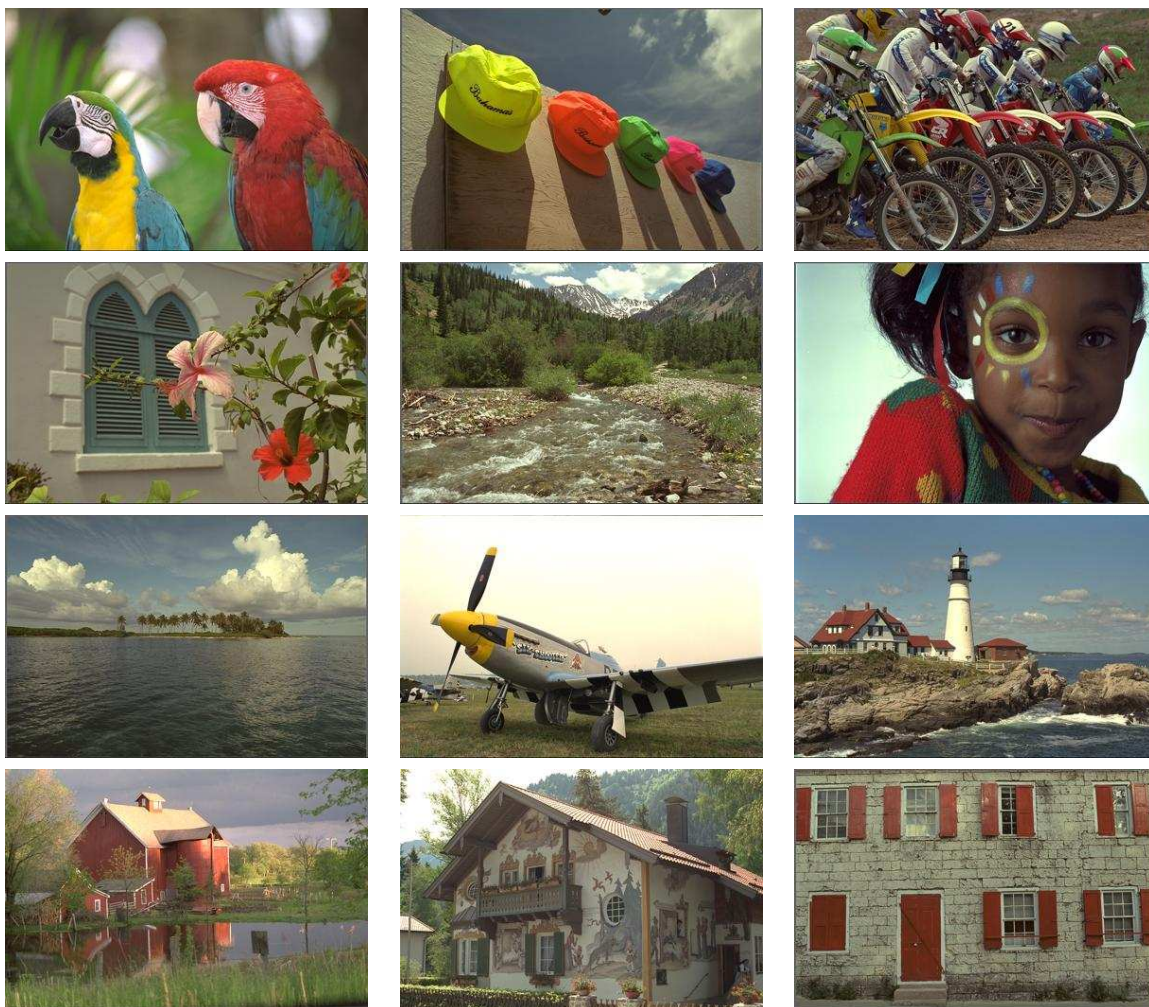


Figura 1: Imagens coloridas x^1, x^2, \dots, x^{12} com 256×384 pixels.

Considere as 12 imagens x^1, \dots, x^p de tamanho 256×384 mostradas na Figura 1. Estas imagens, interpretadas como vetores com $n = 98304$ componentes, foram armazenadas numa QAM cujo quantale é construído usando o sistema de cores CIELab em coordenadas esféricas. Além disso, a QAM foi sintetizada usando a regra de armazenamento por resíduo usando uma arquitetura de rede do tipo *small-world*. Neste ponto lembramos que, além das aplicações em modelos de memórias associativas [5, 30], a arquitetura de redes *small-world* pode ser encontrada em muitas redes grandes e esparsas como a rede neural biológica do nematódeo *Caenorhabditis Elegans*, a rede elétrica do oeste dos Estados Unidos e o grafo de colaborações de atores de filmes [38]. Com esta arquitetura esparsa, foram usadas aproximadamente 0,03% do número de pesos sinápticos de uma rede totalmente conectada.

Confirmamos que a QAM recordou corretamente todas as 12 imagens coloridas originais, conforme prescrito pelo Teorema 4. Posteriormente, avaliamos a tolerância à ruídos das QAMs \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_* apresentando como entrada as imagens distorcidas mostradas na Figura 2. A primeira imagem da Figura 2 foi obtida introduzindo ruído impulsivo – que pode surgir, por exemplo, devido à sensores defeituosos – com probabilidade 0,1. A segunda foi obtida introduzindo ruído Gaussiano, com média 0 e variância 0,01. O ruído Gaussiano pode surgir, por exemplo,



Figura 2: Duas versões corrompidas da imagem x^1 .

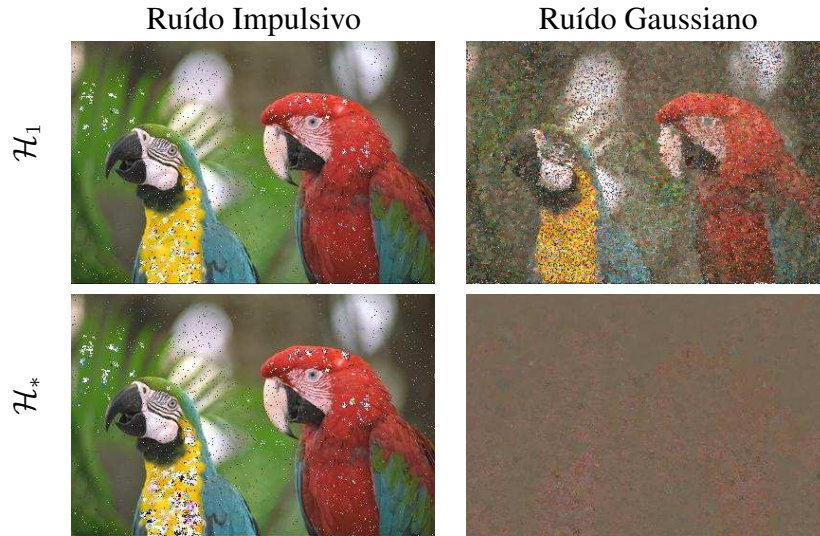


Figura 3: Imagens recuperadas por \mathcal{H}_1 (primeira linha) e \mathcal{H}_* (segunda linha) após a apresentação das imagens mostradas na Figura 2.

devido a interferências do ambiente [17]. As imagens coloridas recordadas pelas QAMs \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_* podem ser visualizadas na Figura 3. Observamos que a QAM recursiva convergiu em 5 iterações.

A Figura 3 mostra que ambas QAMs \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_* removeram parte do ruído impulsivo mas falharam quando a imagem de entrada está corrompida com ruído Gaussiano. Em particular, a QAM \mathcal{H}_* produziu uma imagem praticamente marrom após a apresentação da imagem corrompida com ruído Gaussiano. A baixa tolerância à ruído Gaussiano é justificado pelo Teorema 4. Com efeito, o maior ponto fixo de \mathcal{H}_* maior que a imagem corrompida com ruído Gaussiano é a imagem praticamente marrom apresentada na segunda linha, segunda coluna da Figura 3.

Vamos concluir os experimentos computacionais comparando a tolerância à ruído das QAMs com a rede de Cohen-Grossberg proposta por Zheng *et al.* [43], o modelo proposto por Vázquez e Sossa para imagens coloridas [36] e duas SCAMMs: \mathcal{W}_{RGB}^L e \mathcal{W}_{Lab}^r , que são obtidas considerando diferentes reticulados completos para o conjunto das cores [29, 33]. Especificamente, armazenamos as 12 imagens coloridas nessas quatro memórias e apresentamos como entrada as imagens corrompidas mostradas na Figura 2. Devido a restrição no tamanho do arquivo contendo o relatório técnico, não apresentamos as imagens recuperadas por essas quatro memórias.

Tabela 1: Distância ΔE_{ab}^* da imagem desejada com a imagem recuperada pelos modelos de memória associativa.

	\mathcal{H}_1	\mathcal{H}_*	\mathcal{W}_{RGB}^L	\mathcal{W}_{Lab}^r	Zheng <i>et al.</i>	Vázquez e Sossa
Impulsive Noise:	2.12	3.40	24.22	3.59	5.34	45.78
Gaussian Noise:	19.08	23.84	27.35	19.21	8.97	48.84

A Tabela 1 contém a distância ΔE_{ab}^* entre a imagem desejada e a imagem colorida recordada por cada um dos modelos. Lembramos que a distância ΔE_{ab}^* leva em conta a percepção de cores pelo olho humano [7]. Observe que a QAM \mathcal{H}_1 apresentou a melhor tolerância à ruído impulsivo enquanto que a rede de Cohen-Grossberg de Zheng *et al.* exibiu a melhor tolerância com respeito à ruído Gaussiano. Contudo, a rede de Cohen-Grossberg de Zheng *et al.*, bem como a abordagem de Vázquez e Sossa, são extremamente caras do ponto de vista computacional.

8 Conclusão

Neste projeto de pesquisa desenvolvemos modelos de memórias associativas para imagens coloridas. Especificamente, primeiro investigamos a classe das memórias autoassociativas morfológicas esparsas (SCAMMs). Em particular, mostramos que esses modelos podem ser obtidos das memórias associativas morfológicas tradicionais (TAMM) de Ritter e Susssner e, conseqüentemente, as SCAMMs herdam muitas características das TAMMs como convergência numa única iteração e ótima capacidade absoluta de armazenamento. Em particular, caracterizamos a fase de recordação desses modelos esparsos e mostramos que eles possuem mais pontos fixos que as TAMMs.

Posteriormente, introduzimos a classe das memórias associativas morfológicas Brouwerianas (BAMMs), que são definidas em um reticulado completo Brouweriano. As BAMMs generalizam as SCAMMs, porém, são definidas como um modelo recursivo. Apresentamos condições que garantem a convergência e caracterizamos a fase de recordação das BAMMs. Em particular, mostramos que as BAMMs também apresentam ótima capacidade absoluta de armazenamento e verificamos que a Bamm são potencialmente melhores que as SCAMMs.

Neste projeto de pesquisa também introduzimos as memórias associativas baseadas em quantales (QAMs), que generalizam as TAMMs, as BAMMs e outros modelos da literatura como as memórias associativas nebulosas implicativas. Tal como as BAMMs, a QAMs são modelos recursivos. Novamente, apresentamos condições que garantem a convergência e caracterizamos completamente a fase de recordação dessas memórias.

Experimentos computacionais com imagens coloridas mostraram que uma certa QAM apresenta uma certa tolerância com respeito a ruído impulsivo, superando a rede de Cohen-Grossberg de Zheng *et al.*, a abordagem de Vázquez e Sossa e duas SCAMMs. Sobretudo, os modelos desenvolvidos nesse projeto de pesquisa, em particular as QAMs, são computacionalmente muito mais baratos que a rede de Cohen-Grossberg de Zheng *et al.* e a abordagem de Vázquez e Sossa disponíveis na literatura.

Finalmente, durante a execução do projeto, também desenvolvemos outros modelos de memórias associativas que, eventualmente, podem ser usadas para armazenar imagens coloridas usando abordagens semelhantes àquelas empregadas por Zheng *et al* ou Vázquez e Sossa. Esses modelos, que vão além do cronograma proposto, não foram apresentados nesse relatório. Eles, porém, formaram a base para o próximo projeto de pesquisa, que foi aprovado e será desenvolvido nos próximos três anos.

9 Lista das Publicações Resultantes do Auxílio

- **Artigos em revistas científicas:**

1. M.E. Valle and D.M. Grande Vicente: Sparsely Connected Autoassociative Lattice Memories with an Application for the Reconstruction of Color Images, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Volume 44, Issue 3, November 2012. Page(s): 195 - 222.
2. R.A. Rosa and M.E. Valle: Um Estudo da Aplicação de Redes Neurais Auto-Organizáveis para a Identificação Autônoma de Fonemas Portugueses, *RECEN - Revista Ciências Exatas e Naturais*, Volume 14, Issue 2, 2012. Page(s): 198 - 217.
3. M.E. Valle and R.V. Costa: Brouwerian Autoassociative Morphological Memories and Their Relation to Traditional and Sparsely Connected Autoassociative Morphological Memories, *Mathware and Soft Computing Magazine*, Volume 20, Issue 1, June 2013. Pages(s): 35 - 41.
4. M.E. Valle and P. Sussner: Quantale-based autoassociative memories with an application to the storage of color images, *Pattern Recognition Letters*, Volume 34, Issue 14, October 2013. Page(s): 1589 - 1601.
5. M.E. Valle: Complex-Valued Recurrent Correlation Neural Networks, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, Volume 25, Issue 09, September 2014. Page(s): 1600 - 1612.
6. M.E. Valle: A Robust Subspace Projection Autoassociative Memory Based on the M-Estimation Method, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, Volume 25, Issue 07, July 2014. Page(s): 1372 - 1377.
7. E.L. Esmi and M.E. Valle: Uma Visão Geral de Algumas Abordagens para Processamento de Dados, *Biomatemática*, Volume 24, Issue 1, 2014. Page(s): 91 - 108.
8. M.E. Valle and F. Sakuray: On the criteria for receiving a research productivity fellowship from the Brazilian National Council for Scientific and Technological Development in Mathematics, *TEMA (São Carlos)*, Volume 15, Issue 3, Sept./December 2014. Pages(s): 237 - 248.

- **Trabalhos apresentados em conferências:**

1. E. Esmi, P. Sussner, M.E. Valle, F. Sakuray, and L. Barros: Fuzzy Associative Memories Based on Subsethood and Similarity Measures with Applications to Speaker Identification, In: Proceedings of the 7th International Conference on Hybrid Artificial Intelligent System (HAIS 2012) Part II, LNCS 7209. Page(s): 479 - 490. Salamanca, Spain, March 2012.
2. M.E. Valle, P. Sussner, and E. Esmi: Spherical CIELab QAMs: Associative Memories Based on the CIELab System and Quantaes for the Storage of Color Images, In: Proceedings of the 7th International Conference on Hybrid Artificial Intelligent System (HAIS 2012) Part II, LNCS 7209. Page(s): 467 - 478. Salamanca, Spain, March 2012.
3. P. Sussner, and M.E. Valle: Sparsely Connected Semilattice Associative Memories on Certain L-Fuzzy Sets, In: II CBSF - Second Brazilian Congress on Fuzzy Systems. Recent Advances on Fuzzy Systems Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, Volume 1. Page(s): 1084-1098. Natal, Brazil, November 2012.
4. R. V. Costa and M.E. Valle: Memória Associativa Morfológica Brouweriana no Reticulado HSV com Ordem Baseada num Sistema Fuzzy, In: II CBSF - Second Brazilian Congress on Fuzzy Systems. Recent Advances on Fuzzy Systems Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, Volume 1. Page(s): 1158-1172. Natal, Brazil, November 2012.
5. E. Esmi, P. Sussner, and M.E. Valle: Introdução as Memórias Associativas Fuzzy - Theta, In: II CBSF - Second Brazilian Congress on Fuzzy Systems. Recent Advances on Fuzzy Systems Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, Volume 1. Page(s): 352-366. Natal, Brazil, November 2012.
6. P. Sussner and M.E. Valle: A Semilattice Approach towards Sparsely Connected Associative Memories, In: Advances in Knowledge-Based and Intelligent Information and Engineering Systems. IOS Press. Volume 243. Page(s): 2180-2190. San Sebastian, Spain, September 2012.
7. M.E. Valle and R. A. Valente Neto : A Brief Account on Morphological Perceptron with Competitive Layer Trained by a Certain Genetic Algorithm, In: 1st BRICS Countries Congress (BRICS-CCI) and 11th Brazilian Congress (CBIC) on Computational Intelligence. Porto de Galinhas, Brazil, September 2013.
8. M.E. Valle: An Introduction to the Max-plus Projection Autoassociative Morphological Memory and Some of Its Variations. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems 2014 (FUZZ-IEEE 2014)*. Page(s): 53 - 60, Beijing, China, July 2014.
9. M.E. Valle: An Introduction to Complex-Valued Recurrent Correlation Neural Networks. In: *Proceedings of IEEE International Joint Conference on Neural Networks 2014 (IJCNN 2014)*. Page(s): 3387 - 3394, Beijing, China, July 2014.

10. M.E. Valle: Fuzzy Exponential Recurrent Neural Networks for Gray-scale Image Retrieval. In: *Proceedings of Third Brazilian Congress on Fuzzy Systems (III CBSF)*. João Pessoa, Brazil, August 2014.
11. M.E. Valle: A Novel Continuous-Valued Quaternionic Hopfield Neural Network. Aceito em: *Proceedings of 2014 Brazilian Conference on Intelligent Systems (BRACIS 2014)*. São Carlos, Brazil, October 2014.

Referências

- [1] ACHARYA, T., AND RAY, A. *Image Processing: Principles and Applications*. John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey, 2005.
- [2] BIRKHOFF, G. *Lattice Theory*, 3 ed. American Mathematical Society, Providence, 1993.
- [3] BLYTH, T., AND JANOWITZ, M. *Residuation Theory*. Pergamon Press, Oxford, 1972.
- [4] BLYTH, T. S. *Lattices and Ordered Algebraic Structures*, 1st edition ed. Springer, 2005.
- [5] BOHLAND, J., AND MINAI, A. Efficient associative memory using small-world architecture. *Neurocomputing* 38–40 (2001).
- [6] COSTA, R. V. Memórias Associativas Morfológicas Brouwerianas. Master’s thesis, Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, Brasil, Fevereiro 2013.
- [7] FAIRCHILD, M. D. *Color Appearance Models*, 2nd edition ed. John Wiley and Sons, Feb. 2005.
- [8] GIRARD, J.-Y. Linear Logic. *Theoretical Computer Science* 50, 1 (1987), 1–101.
- [9] GONZALEZ, R. C., AND WOODS, R. E. *Digital Image Processing*, second ed. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [10] HASSOUN, M. H., Ed. *Associative Neural Memories: Theory and Implementation*. Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.
- [11] HEIJMANS, H. *Morphological Image Operators*. Academic Press, New York, NY, 1994.
- [12] HEIJMANS, H. J. A. M. Mathematical Morphology: A Modern Approach in Image Processing Based on Algebra and Geometry. *SIAM Review* 37, 1 (1995), 1–36.
- [13] HOPFIELD, J. J. Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 79 (Apr. 1982), 2554–2558.
- [14] KOHONEN, T. *Self-organization and associative memory*, 2nd edition ed. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1987.

- [15] MARAGOS, P. Lattice Image Processing: A Unification of Morphological and Fuzzy Algebraic Systems. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 22, 2-3 (2005), 333–353.
- [16] MULVEY, C. J. &. *Rend. Circ. Mat. Palermo* 12 (1986), 99–104.
- [17] PLATANIOTIS, K., ANDROUTSOS, D., AND VENETSANOPOULOS, A. Adaptive Fuzzy Systems for Multichannel Signal Processing. *Proceedings of the IEEE* 87, 9 (Sept. 1999), 1601–1622.
- [18] RITTER, G. X., SUSSNER, P., AND DE LEON, J. L. D. Morphological Associative Memories. *IEEE Transactions on Neural Networks* 9, 2 (1998), 281–293.
- [19] RUSSO, C. Quantale Modules and their Operators, with Applications. *Journal of Logic and Computation* 20, 4 (Aug. 2010), 917–946.
- [20] SERRA, J. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London, 1982.
- [21] SERRA, J. *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2: Theoretical Advances*. Academic Press, New York, 1988.
- [22] SOILLE, P. *Morphological Image Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1999.
- [23] SUSSNER, P., MIYASAKI, R., AND VALLE, M. E. An Introduction to Parameterized IFAM Models with Applications in Prediction. In *Proceedings of the 2009 IFSA World Congress and 2009 EUSFLAT Conference* (Lisbon, Portugal, July 2009), pp. 247–252.
- [24] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Grayscale Morphological Associative Memories. *IEEE Transactions on Neural Networks* 17, 3 (May 2006), 559–570.
- [25] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Implicative Fuzzy Associative Memories. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 14, 6 (Dec. 2006), 793–807.
- [26] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Recall of Patterns Using Morphological and Certain Fuzzy Morphological Associative Memories. In *Proceedings of the IEEE World Conference on Computational Intelligence 2006* (Vancouver, Canada, 2006), pp. 209–216.
- [27] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Morphological and Certain Fuzzy Morphological Associative Memories for Classification and Prediction. In *Computational Intelligence Based on Lattice Theory*, V. Kambhampati and G. Ritter, Eds. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 2007, ch. 8, pp. 149–172.
- [28] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Classification of Fuzzy Mathematical Morphologies Based on Concepts of Inclusion Measure and Duality. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 32, 2 (Oct. 2008), 139–159.

- [29] VALLE, M. E. A Class of Sparsely Connected Autoassociative Morphological Memories for Large Color Images. *IEEE Transactions on Neural Networks* 20, 6 (June 2009), 1045–1050.
- [30] VALLE, M. E. Sparsely connected autoassociative fuzzy implicative memories and their application for the reconstruction of large gray-scale images. *Neurocomputing* 74, 1-3 (Dec. 2010), 343–353.
- [31] VALLE, M. E., AND COSTA, R. V. Brouwerian Autoassociative Morphological Memories and Their Relation to Traditional and Sparsely Connected Autoassociative Morphological Memories. *Mathware and Softcomputing Magazine* 20, 1 (June 2013), 35–41.
- [32] VALLE, M. E., AND GRANDE VICENTE, D. M. Some Experimental Results on Sparsely Connected Autoassociative Morphological Memories for the Reconstruction of Color Images Corrupted by Either Impulsive or Gaussian Noise. In *Proceedings of the IEEE International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN 2011)* (San Jose, CA, USA, Aug. 2011), pp. 275–282.
- [33] VALLE, M. E., AND GRANDE VICENTE, D. M. Sparsely Connected Autoassociative Lattice Memories with an Application for the Reconstruction of Color Images. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 44, 3 (Nov. 2012), 195–222.
- [34] VALLE, M. E., AND SUSSNER, P. Quantale-based autoassociative memories with an application to the storage of color images. *Pattern Recognition Letters* 34, 14 (Oct. 2013), 1589–1601.
- [35] VAZQUEZ, R. A., AND SOSSA, H. A Bidirectional Hetero-Associative Memory for True-Color Patterns. *Neural Processing Letters* 28, 3 (2008), 131–153.
- [36] VAZQUEZ, R. A., AND SOSSA, H. Behavior of morphological associative memories with true-color image patterns. *Neurocomputing* 73, 1-3 (December 2009), 225–244.
- [37] WARD, M., AND DILWORTH, R. P. Residuanted Lattices. *Transactions of the American Mathematical Society* 45, 3 (May 1939), 335–354.
- [38] WATTS, D., AND STROGATZ, S. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature* 393, 6684 (June 1998), 440–442.
- [39] YETTER, D. N. Quantales and (Noncommutative) Linear Logic. *The Journal of Symbolic Logic* 55, 1 (Mar. 1990), 41–64.
- [40] ZHANG, B.-L., ZHANG, H., AND GE, S. S. Face Recognition by Applying Wavelet Subband Representation and Kernel Associative Memory. *IEEE Transactions on Neural Networks* 15, 1 (Jan. 2004), 166–177.
- [41] ZHANG, D., AND ZUO, W. Computational Intelligence-Based Biometric Technologies. *IEEE Computational Intelligence Magazine* 2, 2 (May 2007), 26–36.

- [42] ZHANG, H., HUANG, W., HUANG, Z., AND ZHANG, B. A Kernel Autoassociator Approach to Pattern Classification. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B* 35, 3 (June 2005), 593–606.
- [43] ZHENG, P., ZHANG, J., AND TANG, W. Color image associative memory on a class of Cohen–Grossberg networks. *Pattern Recognition* 43, 10 (Oct. 2010), 3255–3260.