



Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática Aplicada

---

# Morfologia Matemática para Imagens Coloridas: Abordagens Baseadas em Ordenação Total

---

Mathematical Morphology for Color Images:  
Total Ordering Approaches

---

*Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita*

E-mail: valle@ime.unicamp.br

## Resumo

A morfologia matemática é uma teoria com aplicações em processamento e análise de imagens. Nesse projeto de pesquisa, investigaremos operadores morfológicos para o tratamento de imagens coloridas. Especificamente, investigaremos operadores morfológicos que são definidos considerando uma ordem total no conjunto das cores. Um operador morfológico baseado num conjunto totalmente ordenado tem vantagem em não introduzir as chamadas cores falsas, isto é, cores que não pertencem a imagem original. Exemplos de ordenação total no conjunto das cores inclui a ordem lexicográfica e a grande maioria das ordens baseadas em distância. Nesse projeto de pesquisa, investigaremos também aplicações da morfologia matemática baseada em conjuntos totalmente ordenados. Por exemplo, estudaremos aplicações em problemas de detecção de contornos em imagens coloridas.

---

**Palavras-chave:** Morfologia matemática, reticulado completo, análise e processamento de imagens.

---

**Keywords:** Mathematical morphology, complete lattice, image processing and analysis.

---

Campinas, 31 de agosto de 2017.

# Metas Atingidas em Relação à Proposta Anterior

No projeto de pesquisa em andamento, intitulado “*Memórias Associativas Dinâmicas Baseadas em Números Hipercomplexos*”, investigamos generalizações da rede de Hopfield para padrões com valores representados por números hipercomplexos, incluindo números complexos e quaternions. Conforme proposto no cronograma de execução, investigamos em detalhes a rede de Hopfield quaterniônica e desenvolvemos generalizações desse modelo. Como fruto das pesquisas do projeto em andamento, destacamos o artigo “M.E. Valle and F.Z. Castro: On the Dynamics of Hopfield Neural Networks on Unit Quaternions” aceito para publicação na IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems”. Outros trabalhos, que estão em fase de conclusão, serão submetidos para revistas de circulação internacional.

## 1 Introdução Geral

A morfologia matemática (MM) é uma teoria que utiliza conceitos geométricos e topológicos para processamento e análise de imagem [20, 34]. Aplicações da MM incluem, por exemplo, detecção de contornos, segmentação e reconstrução automática de imagem, reconhecimento de padrões e decomposição de sinais e imagens [9, 16, 29, 32].

Os primeiros operadores morfológicos foram desenvolvidos por Matheron e Serra nos anos 1960 para análise de imagens binárias. Posteriormente, muitas abordagens – incluindo umbra, conjuntos de níveis (*level-sets*), e abordagem de cortes (*threshold*) – foram desenvolvidas com sucesso para generalizar os operadores binários da MM para lidar com imagens em tons de cinza [35, 36]. Alguns operadores morfológicos em tons de cinza também foram desenvolvidos usando conceitos da teoria dos conjuntos fuzzy e lógica fuzzy [8, 13, 15, 26, 36].

Do ponto de vista teórico, a MM pode ser muito bem definida numa estrutura matemática denominada reticulado completo [20, 30, 27]. Um reticulado completo é um conjunto não-vazio parcialmente ordenado em que qualquer subconjunto admite um supremo e um ínfimo [7, 18]. Uma vez que o requisito é uma ordem parcial com operadores de supremo e ínfimo bem definidos, reticulados completos permitiram o desenvolvimento de operadores morfológicos para dados multivalorados, tais como imagens coloridas [4, 23].

Precisamente, a MM multivalorada atraiu a atenção de muitos pesquisadores desde 1990 [12, 17, 37]. Em termos gerais, as pesquisas sobre a MM multivalorada está focada em esquemas apropriados de ordenação. Uma discussão completa sobre várias abordagens para MM multivalorada, incluindo a MM colorida, pode ser encontrada em [4]. Em particular, ordens totais como os esquemas de ordenação condicional têm sido amplamente utilizados na MM multivalorada em parte porque impedem o aparecimento de cores falsas [5, 33]. Por exemplo, Hanbury e Serra introduziram uma ordenação condicional no espaço CIELab para MM colorida [19]. Além disso, Sartor e Weeks propuseram um esquema de ordenação baseada na distância de uma cor de referência seguidos por uma cascata lexicográfica utilizada para resolver ambiguidades [31]. Esquemas de ordenação baseada em distância foram também propostos por pesquisadores proeminentes, como Angulo [3], Aptoula e Lefèvre [6], De Witte et al. [40],

Ledoux et al. [21, 22], Deborah et al. [14], Al Otum [2], e Valle e Valente [38].

Nesse projeto de pesquisa, investigaremos diferentes abordagens para a morfologia matemática multivalorada baseadas em ordenação total. Por exemplo, apesar das aplicações bem sucedidas [3, 22, 21], as diferentes abordagens para a morfologia matemática colorida baseada em distância geralmente deparam com a difícil tarefa de escolher uma referência apropriada para a ordenação das cores. Assim, investigaremos a influência da referência e discutiremos sobre a escolha dela em abordagens baseadas em distância. Investigaremos também generalizações das abordagens baseadas em distância nas quais são fornecidas mais de um valor de referência.

## 2 Identificação e Caracterização do Problema

### 2.1 Morfologia Matemática em Reticulados Completos

Conforme apontado na introdução, reticulados completos fornecem um contexto apropriado para uma teoria geral da MM [30]. Um reticulado completo  $\mathbb{L}$  é um conjunto ordenado em que qualquer subconjunto  $X \subseteq \mathbb{L}$  admite um supremo e um ínfimo, denotados respectivamente por  $\bigvee X \in \mathbb{L}$  e  $\bigwedge X \in \mathbb{L}$ . Do ponto de vista algébrico, as duas operações elementares da MM são definidas usando a relação de adjunção, como segue [20]:

**Definição 1** (Adjunção, Dilatação e Erosão). *Sejam  $\mathbb{L}$  e  $\mathbb{M}$  reticulados completos,  $\varepsilon : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$  e  $\delta : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{L}$ . O par  $(\varepsilon, \delta)$  é chamado uma adjunção se*

$$\delta(Y) \leq X \Leftrightarrow Y \leq \varepsilon(X), \quad (1)$$

para todo  $X \in \mathbb{L}$  e  $Y \in \mathbb{M}$ . Neste caso,  $\delta$  e  $\varepsilon$  são chamados, respectivamente, uma dilatação e uma erosão.

Muitas outras operações da MM são obtidas pela combinação da dilatação e da erosão [34]. Por exemplo, uma abertura e um fechamento, denotado respectivamente, por  $\gamma : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$  e  $\phi : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ , são obtidos pelas composições

$$\gamma = \delta \circ \varepsilon \quad \text{e} \quad \phi = \varepsilon \circ \delta. \quad (2)$$

As operações de abertura e fechamento são utilizadas, por exemplo, em granulometrias, bem como para remoção de ruído [20, 34].

### 2.2 Algumas Abordagens para a Morfologia Matemática Colorida

Uma imagem colorida é uma função  $f : X \rightarrow \mathcal{C}$ , em que o domínio é  $X \subseteq \mathbb{R}^d$  ou  $X \subseteq \mathbb{Z}^d$  e  $\mathcal{C}$ , geralmente um subconjunto do  $\bar{\mathbb{R}}^3$ , é o espaço de cores. Existem muitos espaços de cores na literatura. Inicialmente, focaremos nos espaços RGB e CIELab [28].

O espaço de RGB é baseado na teoria tri-estímulo da visão, no qual uma cor pode ser decomposta nas primitivas: Vermelho (R, *red*), verde (G, *gree*) e azul (B, *blue*) [28]. Geometricamente, esse espaço de cor é representado pelo cubo  $\mathcal{C}_{RGB} = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$  cujos eixos correspondem as intensidades em cada primitiva. No espaço RGB, uma cor  $c = (c_R, c_G, c_B)$  é um ponto no cubo  $\mathcal{C}_{RGB}$ . A origem  $(0, 0, 0)$  corresponde ao “preto” enquanto que o vértice  $(1, 1, 1)$  representa “branco”.

Apesar do amplo uso do espaço RGB em equipamentos de imageamento e também para a representação e processamento de imagens, ele não é um espaço de cores perceptualmente uniforme [28]. Em outras palavras, a distância Euclidiana entre dois elementos  $c, c' \in \mathcal{C}_{RGB}$  não representa de forma satisfatória a diferença percebida pelas duas cores. Como consequência, o espaço de cores RGB não é apropriado em aplicações no qual a percepção das cores é relevante. Um espaço de cores perceptualmente uniforme, tal como o espaço CIELab, é recomendado em tais aplicações. Além de ser perceptualmente uniforme, o CIELab é um espaço de cores que não depende do equipamento de imageamento, isto é, os elementos de cores nesse espaço não dependem dos equipamentos de captura e *display*.

No espaço de cores CIELab, denotado por  $\mathcal{C}_{Lab} \subseteq [0, 100] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , as componentes de um elemento de cor  $c = (c_L, c_a, c_b)$  possuem as seguintes conotações [1, 28]:

- A componente  $c_L$  descreve a luminosidade.
- A componente  $c_a$  indica a posição no eixo verde-vermelho.
- A componente  $c_b$  fornece a posição no eixo azul-amarelo.

O valor  $c_c = \sqrt{c_a^2 + c_b^2}$ , chamado *chroma*, mede a coloração de  $c$  com respeito ao branco. Além disso, o ângulo  $c_h = \tan^{-1}(c_b/c_a) \in (-\pi, \pi]$  é conhecido como matiz (ou *hue*) da cor  $c$  [39]. Elementos em tons de cinza são obtidos tomando  $c_L = [0, 100]$ ,  $c_a = c_b = 0$ . Detalhes sobre a conversão entre os espaços de cores RGB e CIELab podem ser obtidos em [1, 28].

### 2.3 As Abordagens Marginal e Lexicográfica

Uma extensão direta da morfologia matemática em tons de cinza para imagens coloridas, chamada abordagem marginal ou componente-a-componente, é obtida processando cada canal de cor separadamente [4, 12]. Apesar dos excelentes resultados em experimentos computacionais com respeito a remoção de ruído [4], a abordagem marginal pode alterar a coloração da imagem ou a borda dos objetos [12]. Por exemplo, uma certa característica pode ser removida ou intensificada num dos canais de cores mas não nos outros. Com efeito, a ordem marginal considera a relação entre as componentes de um elemento de cor.

Diferente da abordagem marginal, os elementos são dispostos sequencialmente de acordo com uma ordem de preferência na abordagem lexicográfica. Por um lado, a abordagem lexicográfica tem sido amplamente utilizada na morfologia matemática colorida porque previne o aparecimento das chamadas cores falsas. Por outro lado, ela prioriza excessivamente a primeira condição na cascada lexicográfica. Logo, a abordagem lexicográfica é geralmente combinada

com um espaço apropriado no qual a informação relevante está nas primeiras componentes [4]. Abaixo, apresentaremos ambas abordagens marginal e lexicográfica no espaço CIELab.

A ordenação marginal é obtida comparando separadamente cada componente de duas cores. Especificamente, dadas duas cores  $c, c' \in \mathcal{C}_{Lab}$ , tem-se

$$c \leq_{\mathcal{M}} c' \iff c_L \leq c'_L, c_a \leq c'_a, \text{ e } c_b \leq c'_b. \quad (3)$$

A ordenação lexicográfica, que estabelece uma ordenação total em  $\mathcal{C}_{Lab}$ , é definida comparando sequencialmente as componentes das duas cores. Formalmente, dados  $c, c' \in \mathcal{C}_{Lab}$ , tem-se

$$c \leq_{\mathcal{L}} c' \iff \begin{cases} c_L < c'_L, \\ c_L = c'_L \text{ e } c_a < c'_a \text{ ou,} \\ c_L = c'_L, c_a = c'_a, \text{ e } c_b \leq c'_b. \end{cases} \quad (4)$$

Observe que a cascada lexicográfica em (4) prioriza a luminosidade.

De um similar as abordagens tradicionais da morfologia matemática, as operações de dilatação e erosão de imagens coloridas são definidas usando um elemento estruturante (SE, do inglês *structuring element*)  $S$ , em que  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  ou  $S \subseteq \mathbb{Z}^n$ . O elemento estruturante é usado para extrair informações sobre a estrutura ou forma de objetos relevantes da imagem avaliada pelo operador morfológico. Em termos matemáticos, dada uma imagem colorida  $f : X \rightarrow \mathcal{C}_{Lab}$  e um elemento estruturante  $S$ , as abordagens marginal e lexicográfica da morfologia matemática colorida são definidas pelas equações

$$\varepsilon_S^*(f)(x) = \bigwedge \{f(x+s) : s \in S, x+s \in X\} \quad \forall x \in X, \quad (5)$$

e

$$\delta_S^*(f)(x) = \bigvee \{f(x+s) : s \in S, x+s \in X\}, \quad \forall x \in X, \quad (6)$$

em que o supremo e o ínfimo são calculados usando ou a ordenação marginal ou a ordenação lexicográfica. A dilatação de uma imagem  $f$  por um elemento estruturante  $S$  na abordagem marginal no espaço CIELab é denotada por  $\varepsilon_S^{\mathcal{M}}(f)$ . Analogamente, a erosão de  $f$  por  $S$  na abordagem marginal é escrita como  $\delta_S^{\mathcal{M}}(f)$ . A erosão e a dilatação de  $f$  por  $S$  na abordagem lexicográfica no espaço CIELab são denotadas respectivamente por  $\varepsilon_S^{\mathcal{L}}(f)$  e  $\delta_S^{\mathcal{L}}(f)$ .

**Observação.** Definimos a reflexão de um elemento estruturante  $S$  como  $\check{S} = \{s : -s \in S\}$ . Não é difícil mostrar que a erosão  $\varepsilon_S^*$  e a dilatação  $\delta_{\check{S}}^*$ , ambas ou da abordagem marginal ou da abordagem lexicográfica, formam uma adjunção. Portanto, esses operadores efetivamente constituem uma erosão e uma dilatação no sentido da Definição 1.

## 2.4 A Abordagem Baseada em Distância de Angulo

Diferente das ordenações marginal e lexicográfica discutidas anteriormente, numa ordenação reduzida ou  $R$ -ordenação os elementos são dispostos de acordo com uma função com valores

reais. Em particular, uma ordenação baseada em distância é uma R-ordenação na qual os elementos são dispostos comparando a distância com uma certa cor de referência. Apesar dos problemas de irregularidades que podem surgir nas ordenações totais [11], ordenações baseadas em distância foram propostas e implementadas por pesquisadores renomados [6, 12, 21, 22, 31, 40]. Uma generalização de uma vasta classe de abordagens baseadas em distância para a morfologia matemática colorida foi proposta por Angulo [3]. Em termos gerais, a ordenação de Angulo ordena as cores utilizando a distância à uma certa cor de referência, seguida de uma cascata lexicográfica. Por simplicidade, consideraremos apenas a distância Euclideana no espaço de cores CIELab.

Formalmente, seja  $r \in \mathcal{C}_{Lab}$  uma cor de referência. Dadas duas cores  $c, c' \in \mathcal{C}_{Lab}$ , tem-se

$$c \leq_A c' \iff \begin{cases} \|c - r\|_2 > \|c' - r\|_2, \\ \|c - r\|_2 = \|c' - r\|_2 \text{ e } c_L < c'_L, \\ \|c - r\|_2 = \|c' - r\|_2, c_L = c'_L, \text{ e } c_a > c'_a \text{ ou,} \\ \|c - r\|_2 = \|c' - r\|_2, c_L = c'_L, c_a = c'_a, \text{ e } c_b \leq c'_b, \end{cases} \quad (7)$$

em que  $\|c - r\|_2 = \sqrt{(c_L - r_L)^2 + (c_a - r_a)^2 + (c_b - r_b)^2}$  é a distância Euclidiana usual entre o elemento  $c$  e a cor de referência  $r$  no espaço CIELab. Nesse ponto, destacamos que a ordenação das cores por (7) depende fortemente da distância com respeito à referência  $r$ . De fato, embora a distância Euclidiana no espaço CIELab tenha propriedades perceptuais interessantes, Angulo destacou que a questão mais importante nessa abordagem refere-se a escolha da cor de referência [3].

Com base na ordenação (7), os operadores elementares da abordagem de Angulo são definidos como segue: Dada uma imagem  $f : X \rightarrow \mathcal{C}_{Lab}$  e um elemento estruturante  $S$ , a erosão e a dilatação de  $f$  por  $S$ , denotadas respectivamente por  $\varepsilon_S^A(f)$  e  $\delta_S^A(f)$ , são as imagens coloridas dadas por

$$\varepsilon_S^A(f)(x) = \bigwedge \{f(x + s) : s \in S, x + s \in X\}, \quad \forall x \in X, \quad (8)$$

e

$$\delta_S^A(f)(x) = \bigvee \{f(x + s) : s \in S, x + s \in X\}, \quad \forall x \in X. \quad (9)$$

Não é difícil mostrar que  $\varepsilon_S^A(f)$  e  $\delta_S^A(f)$  formam uma adjunção.

**Exemplo 1.** Considere a imagem sintética  $f$  mostrada na Figura 1a). Esta imagem é composta de 9 quadrados de tamanho  $3 \times 3$  com as cores: cinza, preto, azul, magenta, vermelho, verde, ciano, branco e amarelo. As Figuras 1b)–g) mostram as imagens coloridas produzidas pelas operações de erosão e dilatação das abordagens marginal, lexicográfica e a abordagem baseada em distância de Angulo com vermelho como sendo a cor de referência. Em todas as abordagens, utilizamos um quadrado de tamanho  $3 \times 3$  como elemento estruturante. Observe que tanto a erosão como a dilatação da abordagem marginal introduziram cores falsas. Diferentemente, as abordagens lexicográfica e de Angulo, que usam uma ordenação total das cores, não produzem

cores falsas. Com efeito, por um lado a erosão lexicográfica destacou objetos escuros, como o quadrado preto da imagem sintética. Por outro lado, a dilatação intensificou objetos claros, como o quadrado branco, da imagem analisada. Analogamente, como a cor de referência é vermelho, a dilatação de Angulo expandiu o quadrado vermelho no centro da imagem enquanto que a erosão reduziu esse objeto.

## 2.5 Detecção de Contornos

Vamos ilustrar a aplicação do gradiente morfológico acromático para detecção de contornos em imagens naturais coloridas. O gradiente morfológico acromático de uma imagem colorida  $f : X \rightarrow \mathcal{C}_{Lab}$  com respeito ao elemento estruturante  $S$  é definido pela equação

$$\varrho_S(f)(x) = \|\delta_S(f)(x) - \varepsilon_S(f)(x)\|_2, \quad \forall x \in X, \quad (10)$$

em que “ $\|\cdot\|_2$ ” denota a norma Euclideana no espaço de cores CIELab. Conforme observado por Angulo, o gradiente morfológico acromático contém contornos da imagem analisada. Logo, ele pode ser usado para detecção de contornos [3]. Nas palavras de Yang e Li, a detecção de contorno serve como um estágio inicial em aplicações de visão computacional [41]. Para uma interpretação visual do gradiente morfológico acromático, nesse projeto consideramos o complemento re-escalado  $\bar{\varrho}_S(f)$  de  $\varrho_S(f)$  dada por

$$\bar{\varrho}_S(f)(x) = 1 - \frac{\varrho_S(f)(x)}{\bigvee\{\varrho_S(f)(y) : y \in X\}}, \quad \forall x \in X. \quad (11)$$

Para a detecção de contornos, convertamos a imagem em tons de cinza do complemento re-escalado  $\bar{\varrho}_S(f)$  em uma imagem binária  $\beta$  aplicando a técnica *non-maximum suppression* (NMS) seguida de um *threshold* por histerese [10, 25, 16]. Por simplicidade, fixamos os valores do *threshold* em  $T_1 = 0.01$  e  $T_2 = 0.2$ .

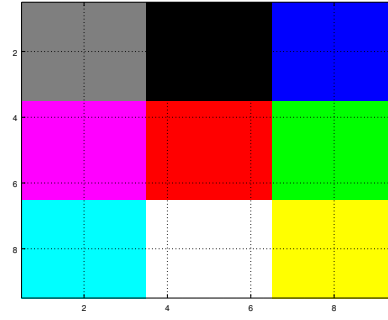
Se tivermos uma imagem segmentada de referência, referida como *ground truth*, podemos avaliar quantitativamente o desempenho de um detector de contornos usando a medida *Pratt's FoM* [28]. Formalmente, dadas as imagens binária  $\beta$  obtida pela abordagem da morfologia matemática colorida e uma imagem *ground truth*  $\tau$ , a medida *Pratt's FoM* é dada por

$$\text{FoM}(\beta, \tau) = \frac{1}{(\text{Card}(\beta) \vee \text{Card}(\tau))} \sum_{x \in E} \frac{1}{1 + ad^2}, \quad (12)$$

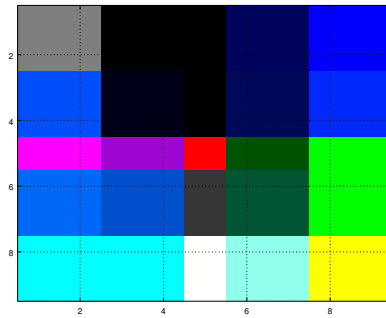
em que  $\text{Card}(\cdot)$  é o número de pontos na fronteira,  $a$  é uma constante de escala e  $d$  é a distância entre um ponto de  $\beta$  e o ponto ideal em  $\tau$ . Conforme sugerido em [28], consideramos  $a = 1/9$ . Note que valores maiores do FoM representam uma melhor detecção dos contornos.

Considere a imagem colorida  $f$  de dimensão  $481 \times 321$  e o (*ground truth*)  $\tau$  mostrados na Figura 2a) e b), respectivamente. Essas duas imagens estão disponíveis no banco de segmentação de imagens da universidade de Berkeley [24]. Usamos as abordagens marginal e lexicográfica para a detecção de contornos com um quadrado  $3 \times 3$  como elemento estruturante. Também

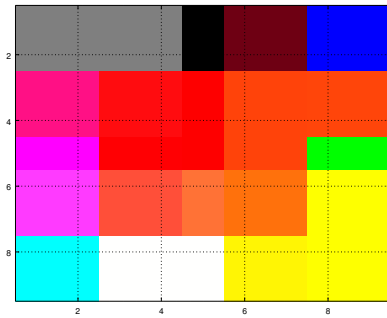
a) Imagem colorida sintética  $f$ .



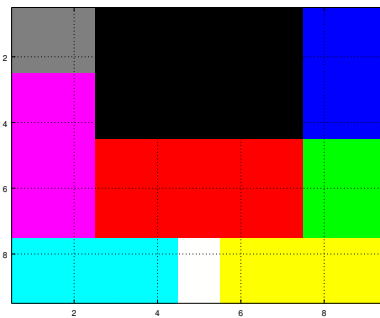
b) Erosão marginal  $\varepsilon_S^{\mathcal{M}}(f)$ .



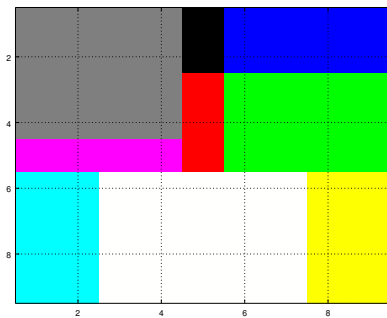
c) Dilatação marginal  $\delta_S^{\mathcal{M}}(f)$ .



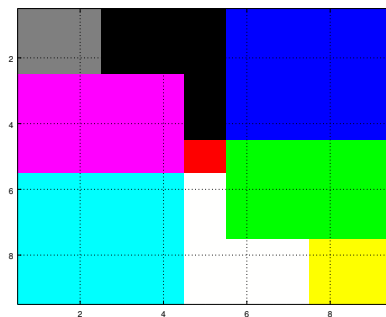
d) Erosão lexicográfica  $\varepsilon_S^{\mathcal{L}}(f)$ .



e) Dilatação lexicográfica  $\delta_S^{\mathcal{L}}(f)$ .



f) Erosão de Angulo  $\varepsilon_S^A(f)$ .



g) Dilatação de Angulo  $\delta_S^A(f)$ .

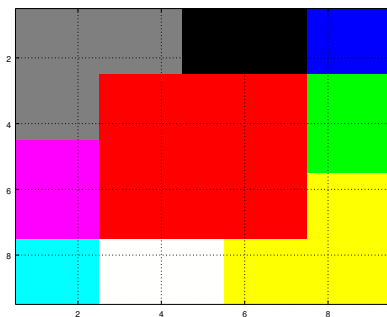


Figura 1: Imagem sintética seguida da erosão e dilatação das abordagens marginal, lexicográfica e de Angulo utilizando como elemento estruturante  $S$  um quadrado  $3 \times 3$  e o vermelho puro como cor de referência.



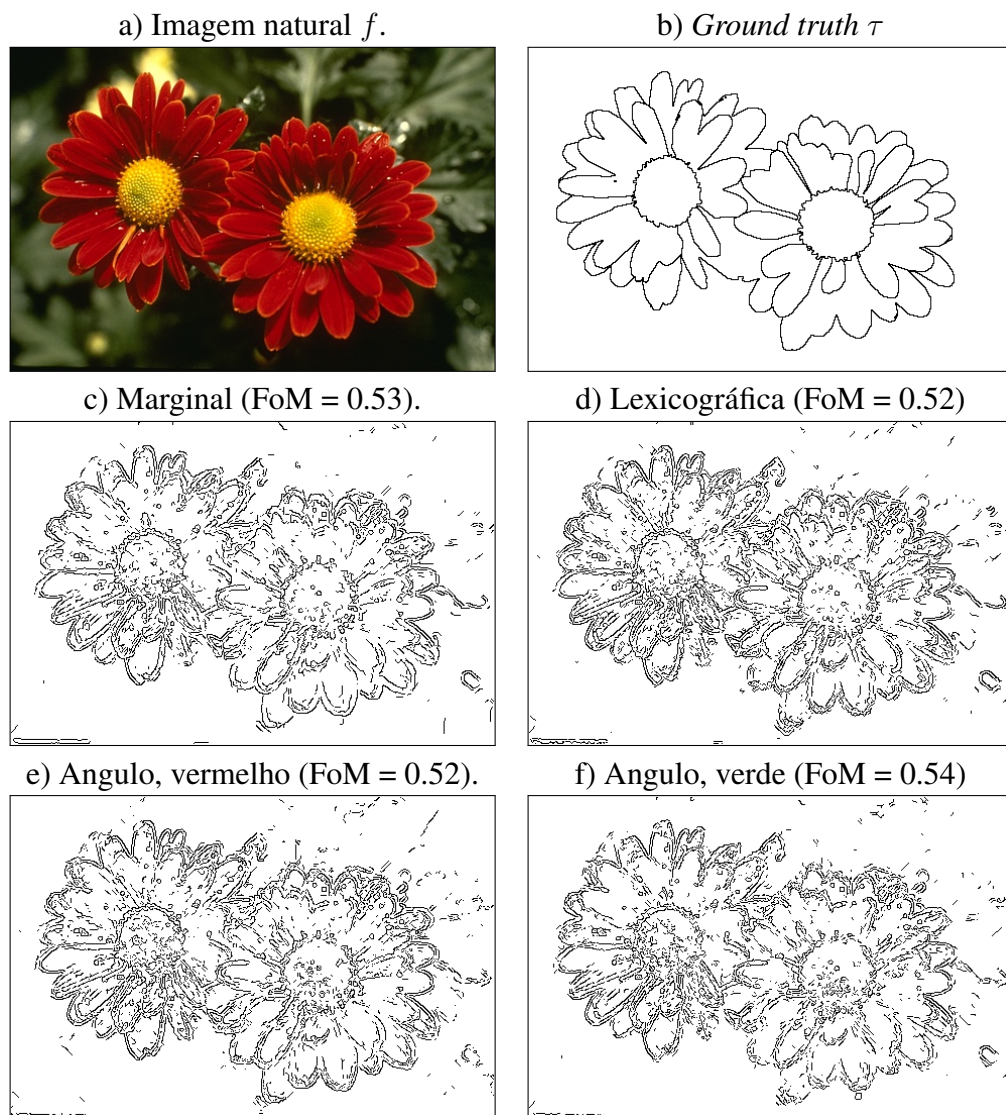


Figura 2: Imagem natural, *ground truth* e imagens binárias com os contornos obtidos utilizando as abordagens marginal, lexicográfica, de Angulo com vermelho ou verde como referência.

consideramos a abordagem de Angulo usando como referência as cores “vermelho” e “verde”. A Figura 2c)-d) apresenta os contornos obtidos por essas quatro abordagens juntamente com o respectivo valor do FoM.

Observe que o maior FoM foi obtido pela abordagem de Angulo usando verde como cor de referência. Com efeito, verde é a cor predominante no fundo (*background*) da imagem analisada. Embora as flores da figura  $f$  sejam vermelhas, a abordagem de Angulo com vermelho como referência produziu um valor do FoM menor ou igual às outras abordagens. Essas observações nos instigam a pesquisar mais sobre a escolha da referência apropriada para uma abordagem baseada em distância. Como a escolha de uma referência define uma ordenação total no espaço das cores, de um modo mais geral, investigaremos as abordagens para a morfologia matemática colorida baseadas em ordenações totais.

### 3 Objetivos, Plano de Trabalho e Cronograma

Nesse projeto de pesquisa investigaremos abordagens da morfologia matemática colorida baseadas em ordenações totais. Em particular, estudaremos em detalhes o efeito da cor de referência nas abordagens em distância e, se possível, delinearemos um critério para a escolha da referência. Pretendemos também propor outras abordagens para a morfologia matemática baseada em ordenações totais, por exemplo, que permitem mais de uma cor de referência. Precisamente, serão executadas as seguintes atividades:

#### 1. *Atividade 1* – **Revisão Bibliográfica:**

Existe na literatura muitos trabalhos sobre morfologia matemática colorida. No primeiro semestre faremos uma extensa revisão bibliográfica atualizada das abordagens para a morfologia matemática colorida destacando aquelas baseadas em ordenações totais. As principais abordagens serão implementados em softwares matemáticos como GNU `Octave` e `MATLAB`.

#### 2. *Atividade 2* – **Estudo sobre o Efeito da Cor de Referência:**

No segundo e terceiro semestres, iniciaremos o estudo sobre o efeito da cor de referência nas abordagens baseadas em distância. Sendo pertinente, usaremos argumentos teóricos como computacionais para delinear um critério para a escolha da referência. Em particular, pretendemos usar o banco de segmentação de imagens da universidade de Berkeley para avaliar quantitativamente o desempenho das diferentes referências num problema de detecção de contornos.

#### 3. *Atividade 3* – **Generalizações para Múltiplas Cores de Referência:**

No quarto e quinto semestres generalizaremos as abordagens baseadas em distância permitindo mais de uma cor de referência. Por exemplo, podemos pensar numa cor de referência para o *background* e outra cor de referência para o *foreground*. Novamente, pretendemos usar o banco de segmentação de imagens da universidade de Berkeley para avaliar quantitativamente o desempenho das novas abordagens.

#### 4. *Atividade 4* – **Desenvolvimento de Outras Abordagens:**

No sexto semestre desenvolveremos outras abordagens para a morfologia matemática colorida. Nesse último semestre também pretendemos discutir a viabilidade de estender os resultados das atividades anteriores para outros tipos de imagens multivaloradas, por exemplo, imagens hiper-espectrais.

As quatro atividades listadas acima seguirão o seguinte cronograma:

Mar/2018 a Ago/2018	Set/2019 a Ago/2019	Set/2019 a Ago/2020	Ago/2020 a Fev/2021
Atividade 1	Atividade 2	Atividade 3	Atividade 4

Durante todas as atividades, pretendemos divulgar os resultados obtidos em eventos científicos da área bem como envolver alunos de graduação e pós-graduação nessa área de pesquisa. Também serão redigidos artigos científicos que serão submetidos para revistas conceituadas, preferencialmente de circulação internacional.

## 4 Contribuições e Resultados Esperados

Nesse projeto de pesquisa investigaremos abordagens da morfologia matemática colorida baseada em ordenações totais. Conforme mencionado no primeiro parágrafo da introdução, aplicações da morfologia matemática incluem detecção de contorno, segmentação e reconstrução automática de imagem, reconhecimento de padrões e decomposição de sinais e imagens. Portanto, esse projeto de pesquisa deve contribuir nessas aplicações. Contudo, nos concentraremos principalmente nos aspectos teóricos e nas aplicações relacionadas à detecção de contornos, conforme ilustrado brevemente na Seção 2.5.

É importante ressaltar que os resultados desenvolvidos terão forte fundamento matemático. Sobretudo, os resultados desenvolvidos nesse projeto de pesquisa serão submetidos na forma de artigo para um periódico de circulação internacional como *IEEE Transaction on Image Processing*, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, *Pattern Recognition*, *Computer Vision and Image Understanding*, dentre outros similares.

## 5 Resumo das Atividades de Pesquisas do Proponente

Segue abaixo um quadro resumo da produção científica e orientações do proponente:

Tipo	Quantidade
Publicações em Periódicos com Política Editorial	25
Capítulos de Livro	3
Edição de Livro	1
Dissertação de Mestrado Orientadas e Defendidas	6
Citações na Literatura Científica	ISI: 321 Google Scholar: 812
Índice h	ISI: 9 Google Scholar: 15

### Produção Científica Relevante

Abaixo uma lista contendo 10 artigos publicados em revistas internacionais:

1. M.E. Valle and R.A. Valente: Mathematical Morphology on the Spherical CIELab Quantale with an Application in Color Image Boundary Detection, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Volume 57, Issue 2, February 2017. Pages(s): 183 - 201.

2. M.E. Valle: Complex-Valued Recurrent Correlation Neural Networks, IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, Volume 25, Issue 09, September 2014. Page(s): 1600 - 1612.

Citações – Google Scholar: 20, ISI 7

---

3. M.E. Valle: A Robust Subspace Projection Autoassociative Memory Based on the M-Estimation Method, IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, Volume 25, Issue 07, July 2014. Page(s): 1372 - 1377.

Citações – Google Scholar: 12, ISI 5

---

4. M.E. Valle and P. Sussner: Quantale-based autoassociative memories with an application to the storage of color images, Pattern Recognition Letters, Volume 34, Issue 14, October 2013. Page(s): 1589 - 1601.

Citações – Google Scholar: 14, ISI 10

---

5. M.E. Valle and P. Sussner: Storage and Recall Capabilities of Fuzzy Morphological Associative Memories with Adjunction-Based Learning, Neural Networks, Volume 24, Issue 1, January 2011. Page(s): 75-90.

Citações – Google Scholar: 36, ISI 16

---

6. M.E. Valle: A Class of Sparsely Connected Autoassociative Morphological Memories for Large Color Images, IEEE Transactions on Neural Networks, Volume 20, Issue 6, June 2009. Page(s): 1045 - 1050.

Citações – Google Scholar: 33, ISI 17

---

7. P. Sussner and M.E. Valle: Classification of Fuzzy Mathematical Morphologies Based on Concepts of Inclusion Measure and Duality, Journal of Mathematical Imaging and Vision, Volume 32, Issue 2, October 2008. Page(s): 139 - 159.

Citações – Google Scholar: 61, ISI 30

---

8. M.E. Valle and P. Sussner: A general framework for fuzzy morphological associative memories, *Fuzzy Sets and Systems*, Volume 159, Issue 7, April 2008. Page(s): 747 - 768.

Citações – Google Scholar: 77, ISI 42

---

9. P. Sussner and M.E. Valle: Implicative Fuzzy Associative Memories, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Volume 14, Issue 6, December 2006. Page(s): 793 - 807.

Citações – Google Scholar: 111, ISI 51

---

10. P. Sussner and M.E. Valle: Gray-Scale Morphological Associative Memories, *IEEE Transactions on Neural Networks*, Volume 17, Issue 3, May 2006. Page(s): 559 – 570.

Citações – Google Scholar: 142, ISI 82

---

Cabe destacar que não foram listados todos os artigos publicados pelo proponente. A lista completa das publicações podem ser encontradas no *Currículo Lattes* ou na página pessoal do proponente, em [www.ime.unicamp.br/~valle](http://www.ime.unicamp.br/~valle).

## **Formação de Recursos Humanos e Divulgação Científica**

Com respeito à formação de recursos humanos, o proponente já concluiu 6 orientações de mestrado e, atualmente, orienta 4 alunos de doutorado e um de mestrado que devem defender suas teses ou dissertação em 2018:

1. Aline Cristina de Souza. Implementação de Memórias Associativas Usando Redes Neurais Fuzzy Recorrentes. Início: 2015. Doutorado em Matemática Aplicada - Universidade Estadual de Campinas. Bolsa da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).
2. Alex Santana dos Santos. Memórias Associativas de Projeção em Reticulados Completos. Início: 2014. Doutorado em Matemática Aplicada - Universidade Estadual de Campinas. Bolsa Pró-doutoral da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).
3. Arlyson Alves do Nascimento. Um Estudo sobre a Morfologia Matemática Baseada em Distância para Imagens em Tons de Cinza e Coloridas. Início: 2014. Doutorado em Matemática Aplicada - Universidade Estadual de Campinas.
4. Fidelis Zanetti de Castro. Generalizações da rede de Hopfield usando Números Hiper-complexos. Início: 2014. Doutorado em Matemática Aplicada - Universidade Estadual de Campinas.

5. Guilherme Vieira Neto. *Análise de Imagens Usando Redes Neurais Quaterniônicas* (Título provisório). Início: 2016. Mestrado em Matemática Aplicada - Universidade Estadual de Campinas. Bolsa de Mestrado da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Referente a divulgação científica e outras informações relevantes, destaca-se o seguinte:

1. O proponente organizou o IV Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy (IV CBSF), que ocorreu em Novembro de 2016. Detalhes sobre o evento estão disponíveis em [www.ime.unicamp.br/~cbsf4](http://www.ime.unicamp.br/~cbsf4).
2. O proponente editou o livro: Valle, M.E., Dimuro, G.P., Santiago, R.H.N., Esmi, E. *Recentes Avanços em Sistemas Fuzzy*. 1. ed. São Carlos: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2016. v. 1. 548p.
3. O proponente, como membro da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC), participou do comitê científico do XXXVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC 2017) e é membro da comissão de organização do XXXVII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC 2018), que será realizado em Campinas em 2018.
4. É editor associado da revista *Computational and Applied Mathematics*.
5. O proponente foi convidado para ministrar uma palestra no FUZZ-IEEE 2018, que ocorre como parte do IEEE World Congress on Computational Intelligence (WCCI 2018), o principal evento internacional da área de inteligência computacional. Detalhes sobre o evento estão disponíveis em <http://www.ecomp.poli.br/~wcci2018/speakers/>.
6. O proponente, junto com os pesquisadores Akira Hirose (University of Tokyo, Tokyo, Japan), Danilo Mandic (Imperial College, London, U.K.) e Igor Aizenberg (Manhattan College, New York City, USA), submeteu uma proposta de sessão especial sobre redes neurais com valores complexos e quaterniônicos para o *2018 International Joint Congress on Neural Networks (IJCNN 2018)*.

## Referências

- [1] ACHARYA, T., AND RAY, A. *Image Processing: Principles and Applications*. John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey, 2005.
- [2] AL-OTUM, H. M. A novel set of image morphological operators using a modified vector distance measure with color pixel classification. *J. Visual Communication and Image Representation* 30 (2015), 46–63.
- [3] ANGULO, J. Morphological colour operators in totally ordered lattices based on distances: Application to image filtering, enhancement and analysis. *Computer Vision and*

- Image Understanding 107*, 1–2 (July–August 2007), 56–73. Special issue on color image processing.
- [4] APTOULA, E., AND LEFÈVRE, S. A Comparative Study on Multivariate Mathematical Morphology. *Pattern Recognition* 40, 11 (November 2007), 2914–2929.
  - [5] APTOULA, E., AND LEFÈVRE, S. On Lexicographical Ordering in Multivariate Mathematical Morphology. *Pattern Recognition Letters* 29, 2 (January 2008), 109–118.
  - [6] APTOULA, E., AND LEFÈVRE, S. On the morphological processing of hue. *Image and Vision Computing* 27, 9 (Aug. 2009), 1394–1401.
  - [7] BIRKHOFF, G. *Lattice Theory*, 3 ed. American Mathematical Society, Providence, 1993.
  - [8] BLOCH, I. Lattices of fuzzy sets and bipolar fuzzy sets, and mathematical morphology. *Information Sciences* 181, 10 (May 2011), 2002–2015.
  - [9] BRAGA-NETO, U., AND GOUTSIAS, J. Supremal multiscale signal analysis. *SIAM Journal of Mathematical Analysis* 36, 1 (2004), 94–120.
  - [10] CANNY, J. A Computational Approach to Edge-detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 8 (1986), 679–700.
  - [11] CHEVALLIER, E., AND ANGULO, J. The Irregularity Issue of Total Orders on Metric Spaces and Its Consequences for Mathematical Morphology. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 54, 3 (Mar 2016), 344–357.
  - [12] COMER, M. L., AND DELP, E. J. Morphological operations for color image processing. *Journal of Electronic Imaging* 8, 3 (1999), 279–289.
  - [13] DE BAETS, B. Fuzzy Morphology: A Logical Approach. In *Uncertainty Analysis in Engineering and Science: Fuzzy Logic, Statistics, and Neural Network Approach*, B. M. Ayyub and M. M. Gupta, Eds. Kluwer Academic Publishers, Norwell, 1997, pp. 53–67.
  - [14] DEBORAH, H., RICHARD, N., AND HARDEBERG, J. Spectral Ordering Assessment Using Spectral Median Filters. In *Mathematical Morphology and Its Applications to Signal and Image Processing*, J. A. Benediktsson, J. Chanussot, L. Najman, and H. Talbot, Eds., vol. 9082 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer International Publishing, 2015, pp. 387–397.
  - [15] DENG, T., AND HEIJMANS, H. Grey-scale morphology based on fuzzy logic. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 16, 2 (2002), 155–171.
  - [16] GONZALEZ-HIDALGO, M., MASSANET, S., MIR, A., AND RUIZ-AGUILERA, D. On the Choice of the Pair Conjunction-Implication Into the Fuzzy Morphological Edge Detector. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 23, 4 (Aug 2015), 872–884.

- [17] GOUTSIAS, J., HEIJMANS, H. J. A. M., AND SIVAKUMAR, K. Morphological Operators for Image Sequences. *Computer vision and image understanding* 62 (1995), 326–346.
- [18] GRÄTZER, G., ET AL. *General Lattice Theory*, 2nd edition ed. Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland, 2003.
- [19] HANBURY, A., AND SERRA, J. Mathematical Morphology in the CIELAB Space. *Image Analysis and Stereology* 21 (2002), 201–206.
- [20] HEIJMANS, H. J. A. M. Mathematical Morphology: A Modern Approach in Image Processing Based on Algebra and Geometry. *SIAM Review* 37, 1 (1995), 1–36.
- [21] LEDOUX, A., RICHARD, N., CAPELLE-LAIZÉ, A.-S., AND FERNANDEZ-MALOIGNE, C. Toward a Complete Inclusion of the Vector Information in Morphological Computation of Texture Features for Color Images. In *Image and Signal Processing*, A. Elmoataz, O. Lezoray, F. Nouboud, and D. Mammass, Eds., vol. 8509 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer International Publishing, 2014, pp. 222–229.
- [22] LEDOUX, A., RICHARD, N., CAPELLE-LAIZÉ, A.-S., AND FERNANDEZ-MALOIGNE, C. Perceptual color hit-or-miss transform: application to dermatological image processing. *Signal, Image and Video Processing* 9, 5 (2015), 1081–1091.
- [23] LÉZORAY, O. Complete lattice learning for multivariate mathematical morphology. *Journal of Visual Communication and Image Representation* 35 (Feb 2016), 220–235.
- [24] MARTIN, D., FOWLKES, C., TAL, D., AND MALIK, J. A Database of Human Segmented Natural Images and its Application to Evaluating Segmentation Algorithms and Measuring Ecological Statistics. In *Proceedings of the 8th International Conference on Computer Vision* (July 2001), vol. 2, pp. 416–423.
- [25] MEDINA-CARNICER, R., MUÑOZ-SALINAS, R., YEGUAS-BOLIVAR, E., AND DIAZ-MAS, L. A novel method to look for the hysteresis thresholds for the Canny edge detector. *Pattern Recognition* 44, 6 (2011), 1201–1211.
- [26] NACHTEGAEL, M., AND KERRE, E. E. Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies. *Fuzzy Sets and Systems* 124, 1 (2001), 73–85.
- [27] NACHTEGAEL, M., SUSSNER, P., MÉLANGE, T., AND KERRE, E. On the role of complete lattices in mathematical morphology: From tool to uncertainty model. *Information Sciences* 181, 10 (may 2011), 1971–1988. Special Issue on Information Engineering Applications Based on Lattices.
- [28] PRATT, W. *Digital Image Processing*, 4th ed. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2007.



- [29] RITTNER, L., CAMPBELL, J., FREITAS, P., APPENZELLER, S., PIKE, G. B., AND LOTUFO, R. Analysis of Scalar Maps for the Segmentation of the Corpus Callosum in Diffusion Tensor Fields. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 45 (2013), 214–226.
- [30] RONSE, C. Why Mathematical Morphology Needs Complete Lattices. *Signal Processing* 21, 2 (1990), 129–154.
- [31] SARTOR, L. J., AND WEEKS, A. R. Morphological operations on color images. *Journal of Electronic Imaging* 10, 2 (2001), 548–559.
- [32] SERRA, J. A Lattice Approach to Image Segmentation. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 24 (2006), 83–130.
- [33] SERRA, J. The “False Colour” Problem. In *Mathematical Morphology and Its Application to Signal and Image Processing*, M. H. Wilkinson and J. B. Roerdink, Eds., vol. 5720 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer Berlin Heidelberg, 2009, pp. 13–23.
- [34] SOILLE, P. *Morphological Image Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1999.
- [35] STERNBERG, S. Grayscale Morphology. *Computer Vision, Graphics and Image Processing* 35 (1986), 333–355.
- [36] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Classification of Fuzzy Mathematical Morphologies Based on Concepts of Inclusion Measure and Duality. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 32, 2 (Oct. 2008), 139–159.
- [37] TALBOT, H., EVANS, C., AND JONES, R. Complete Ordering and Multivariate Mathematical Morphology. In *Proceedings of the Fourth International Symposium on Mathematical Morphology and Its Applications to Image and Signal Processing* (Norwell, MA, USA, 1998), ISMM '98, Kluwer Academic Publishers, pp. 27–34.
- [38] VALLE, M. E., AND VALENTE, R. A. Mathematical Morphology on the Spherical CIE-Lab Quantale with an Application in Color Image Boundary Detection. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* (2016). Accepted for publication.
- [39] WITTE, V., SCHULTE, S., NACHTEGAEL, M., MÉLANGE, T., AND KERRE, E. A Lattice-Based Approach to Mathematical Morphology for Greyscale and Colour Images. In *Computational Intelligence Based on Lattice Theory*, V. Kambhampati and G. Ritter, Eds., vol. 67 of *Studies in Computational Intelligence*. Springer Berlin Heidelberg, 2007, pp. 129–148.
- [40] WITTE, V., SCHULTE, S., NACHTEGAEL, M., WEKEN, D., AND KERRE, E. Vector Morphological Operators for Colour Images. In *Image Analysis and Recognition*, M. Kamel and A. Campilho, Eds., vol. 3656 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer Berlin Heidelberg, 2005, pp. 667–675.

- [41] YANG, J., AND LI, X. Boundary detection using mathematical morphology. *Pattern Recognition Letters* 16, 12 (Dec. 1995), 1277–1286.