

Universidade Estadual de Londrina
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Rodovia Celso Garcia Cid (PR 445), Km 380
Campus Universitário, CP 6001
CEP 86051-990, Londrina - PR
Telefone: +55 (43) 3371-4961

Bolsa de Produtividade em Pesquisa
(Categoria 2)

Estudo sobre Modelos de Memórias Associativas
para Imagens Coloridas

Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita

E-mail: valle@uel.br

Londrina, 9 de agosto de 2011.

Resumo

Memórias associativas (AMs) são modelos matemáticos inspirados na capacidade do cérebro humano de armazenar e recordar por associação. Sobretudo, assim como o cérebro, AMs também são capazes de recordar um certo padrão mesmo quando a entrada representa uma versão incompleta ou ruidosa de um item armazenado. O proponente introduziu recentemente uma classe de modelos de AMs, chamadas *memórias auto-associativas morfológicas esparsas* (SCAMMs). As SCAMMs são redes neurais progressivas de camada única cujos neurônios calculam ou o máximo ou o mínimo de algumas das entradas. Essas memórias são computacionalmente mais baratas que modelos tradicionais e possuem um vasto campo de aplicações pois estão baseadas apenas numa estrutura de reticulado completo. Em particular, as SCAMMs podem ser usadas para o armazenamento e recordação de imagens coloridas.

Nesse projeto de pesquisa, daremos continuação aos estudos sobre os modelos de memórias associativas para imagens coloridas. Em particular, investigaremos propriedades teóricas das SCAMMs definidas em diferentes espaços de cores e com diferentes esquemas de ordem. Além disso, compararemos o desempenho das SCAMMs com outros modelos da literatura, como a memória bidirecional hetero-associativa de Monteros e Azuela e a classe de redes de Cohen-Grossberg desenvolvida por Zheng et al. para imagens coloridas.

Palavras-chave: memórias associativas, redes neurais artificiais, morfologia matemática, reticulado, reconstrução de imagens.

1 Introdução Geral

Memórias associativas (AMs, Associative Memories) são modelos matemáticos inspirados na habilidade do cérebro humano de armazenar e recordar informações [15, 21]. Tais como as redes neurais biológicas, AMs devem ser capazes recuperar uma informação memorizada mesmo diante da apresentação de um item incompleto ou distorcido. Aplicações de AMs incluem classificação [42, 53], previsão [43, 44, 45, 41] e reconhecimento de padrões [51, 52].

Houve um aumento de pesquisa em modelos de AMs para o armazenamento de imagens coloridas nos últimos anos [28, 47, 54]. Por nosso conhecimento, existem duas abordagens que permitem generalizar de forma direta um modelo em tons de cinza para imagens coloridas.

A primeira abordagem está baseada na representação 24-bit de imagens coloridas. Aqui, os valores de cada pixel variam de 0 a $2^{24} - 1$. Essa técnica foi utilizada por Monteros e Azuela para o armazenamento de imagens *true-color* em modelos de memórias associativas com sinapses dinâmicas [28, 29].

A segunda abordagem é baseada no sistema RGB, onde uma cor é expressa em termos das componentes vermelha (red), verde (green) e azul (blue). Dessa forma, uma imagem colorida pode ser decomposta em três imagens em tons de cinza, que são armazenadas separadamente em três AMs. Essa estratégia foi empregada por Zheng et al. para o armazenamento de imagens coloridas numa classe de redes de Cohen-Grossberg [54].

Diferente das duas abordagens mencionadas acima, o proponente desenvolveu recentemente uma classe de AMs, chamadas *memórias auto-associativas morfológicas esparsas* (SCAMMs, Sparsely Connected Autoassociative Morphological Memories), que não estão baseadas em modelos em tons de cinza [47, 48].

De fato, as SCAMMs foram concebidas para armazenar e recordar padrões multi-valores, que incluem as imagens coloridas como caso particular.

As SCAMMs são equipadas com neurônios que calculam ou uma dilatação ou uma erosão da morfologia matemática (MM), uma teoria muito empregada no processamento e análise de imagens e sinais [37, 38, 18, 40]. Especificamente, a saída de um neurônio de uma SCAMM é dada ou pelo máximo ou pelo mínimo de algumas de suas entradas. Esses são, portanto, modelos muito gerais de neurônios, pois requerem apenas uma estrutura de reticulado completo, i.e., um conjunto parcialmente ordenado no qual o supremo (ou máximo) e o ínfimo (ou mínimo) estão bem definidos [9].

Além dessas observações, as SCAMMs são sintetizadas utilizando uma técnica de armazenamento que geralmente produz uma rede de estrutura esparsa. Conseqüentemente, elas requerem menos esforço computacional que muitos modelos tradicionais de AMs. Por exemplo, uma SCAMM consumiu aproximadamente 83MB para o armazenamento de doze imagens coloridas de tamanho 512×512 pixels [47]. Por outro lado, mais de 1TB seria necessário para o armazenamento do mesmo conjunto de imagens na rede de Cohen-Grossberg usando a abordagem baseada no sistema RGB [54].

As SCAMMs também apresentam muitas características desejáveis, incluindo capacidade de armazenamento ótima e convergência numa única iteração no caso auto-associativo com realimentação [47].

Em vistas dessas considerações, nesse projeto de pesquisa pretendemos dar continuação aos estudos sobre as SCAMMs. Além disso, iremos comparar o desempenho desses modelos com outras memórias associativas, incluindo o modelo desenvolvido por Monteros e Azuela [28, 29] e o modelo desenvolvido por Zheng et al. [54]. Acreditamos que, como fruto desses estudos, novos modelos de memórias associativas para imagens coloridas serão desenvolvidos. Sobretudo, os resultados obtidos poderão ser submetidos para publicação, na forma de artigo científico, em periódicos de circulação internacional.

2 Identificação e Caracterização do Problema

2.1 Memórias Associativas Neurais

Memórias associativas (AMs, Associative Memories) são modelos projetados para armazenar um conjunto finito de associações $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, p\}$, chamado conjunto das *memórias fundamentais* [2, 15, 21, 30]. Sobretudo, uma AM deve ser capaz de recordar uma saída desejada mesmo após a apresentação de uma versão distorcida ou incompleta de um padrão de entrada. Em outras palavras, dado um conjunto de memórias fundamentais $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, p\} \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, deseja-se encontrar uma aplicação \mathcal{M} tal que $\mathcal{M}(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{y}^\xi$ para todo $\xi = 1, \dots, p$. Além disso, a aplicação \mathcal{M} deve possuir uma certa tolerância com respeito à ruído, i.e., a igualdade $\mathcal{M}(\tilde{\mathbf{x}}^\xi) = \mathbf{y}^\xi$ deve valer para versões ruidosas ou incompletas $\tilde{\mathbf{x}}^\xi$ de \mathbf{x}^ξ . Note que o conjunto \mathcal{X} que contém todos os padrões de entrada \mathbf{x} deve ser equipado com uma certa medida de similaridade. Em geral, \mathcal{X} e \mathcal{Y} , os conjuntos dos padrões de entrada e saída, são ambos espaços métricos.

Uma AM pode ser auto-associativa ou hetero-associativa. Tem-se uma *memória auto-associativa*, também chamada *memória endereçada por conteúdo*, se o conjunto das associações é da forma $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{x}^\xi) : \xi = 1, \dots, p\}$. A famosa *rede de Hopfield* é um exemplo de memória auto-associativa [19]. Uma AM é chamada *hetero-associativa* se a saída \mathbf{y}^ξ difere da entrada \mathbf{x}^ξ . Exemplos de modelos hetero-associativos incluem a

memória associativa linear ótima (OLAM, Optimal Associative Memory) de Kohonen e a *memória associativa bidirecional* (BAM, Bidirectional Associative Memory) de Kosko [21, 22].

Finalmente, tem-se uma *memória associativa neural* se a aplicação \mathcal{M} é descrita por uma rede neural artificial [15, 16]. Uma rede neural é um modelo matemático inspirado no cérebro humano onde as unidades básicas de processamento são os neurônios [2, 16, 17]. Os modelos mencionados no parágrafo anterior são exemplos de memórias associativas neurais. Uma *memória associativa (neural) morfológica* (MAM, Morphological Associative Memory) é uma memória associativa neural na qual os neurônios efetuam operações da *Morfologia Matemática* (MM) [33, 34]. A próxima subseção contém uma breve revisão das operações elementares da MM.

2.2 Morfologia Matemática em Reticulados Completos

A *Morfologia Matemática* (MM) é uma teoria empregada no processamento e análise de objetos (ou imagens) [18, 37, 38, 40] que utiliza operadores e funções baseadas em conceitos topológicos e geométricos [14, 27]. Essa teoria foi desenvolvida por Matheron e Serra nos anos 1960 e estava baseada nos trabalhos de Minkowski e Hadwiger [24, 25, 26, 37]. Durante os anos 1980, a MM adquiriu créditos em áreas como processamento de imagens, reconhecimento de padrões e visão computacional. Sua aplicação abrange segmentação e reconstrução de imagens [20, 46, 49], reconhecimento de características [39], decomposição de sinais [10] e detecção de caminho mínimo [7, 40].

A MM pode ser muito bem conduzida numa estrutura matemática chamada reticulado completo [18, 36]. Um *reticulado completo* (complete lattice) é um conjunto não-vazio \mathbb{L} equipado com uma ordem parcial \leq tal que todo subconjunto $X \subseteq \mathbb{L}$ admite supremo e ínfimo em \mathbb{L} [18, 9]. Denotamos o supremo e o ínfimo de X por $\bigvee X$ e $\bigwedge X$, respectivamente. Exemplos de reticulados completos inclui o conjunto dos números reais estendidos $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e o conjunto dos inteiros estendidos $\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Operadores que comutam tanto com a operação de supremo ou a operação de ínfimo possuem um papel importante na MM [18]. Um operador que comuta com o supremo é chamado *dilatação* e um operador que comuta com o ínfimo é chamado *erosão*. Em termos matemáticos, dados reticulados completos \mathbb{L} e \mathbb{M} , um operador $\delta : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ e um operador $\varepsilon : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ constituem respectivamente uma dilatação e uma erosão se, e somente se, as seguintes equações são válidas para qualquer $X \subseteq \mathbb{L}$:

$$\delta \left(\bigvee X \right) = \bigvee_{x \in X} \delta(x) \quad \text{e} \quad \varepsilon \left(\bigwedge X \right) = \bigwedge_{x \in X} \varepsilon(x). \quad (1)$$

Nesse projeto de pesquisa nos concentraremos nas dilatações e erosões. Todavia, muitos operadores morfológicos interessantes podem ser obtidos combinando esses dois operadores elementares [18, 37, 40]. De fato, Banon e Barrera mostraram que qualquer operador $\Psi : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$, entre reticulados completos \mathbb{L} e \mathbb{M} , pode ser escrito em termos de combinações de supremos e ínfimos de operadores elementares da MM [6].

2.3 Dilatações e Erosões para Imagens Multi-valores

Em termos gerais, uma imagem \mathbf{x} é uma função de um domínio espacial Ω em um conjunto de valores \mathbb{V} [35]. Em particular, tem-se uma imagem em tons de cinza se \mathbb{V} é um subconjunto de $\bar{\mathbb{R}}$ ou $\bar{\mathbb{Z}}$. Tem-se uma

imagem multi-valores se os elementos de \mathbb{V} são formados por vários valores tais como subconjuntos de \mathbb{R}^ν ou \mathbb{Z}^ν para $\nu > 1$. Imagens coloridas são exemplos de imagens multi-valores [4].

Nesse projeto de pesquisa nos concentraremos em domínios espaciais finitos, isto é, $\Omega = \{o_1, \dots, o_n\}$. Nesse caso, uma imagem \mathbf{x} corresponde a uma arranjo $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n] \in \mathbb{V}^n$, onde $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}(o_j)$ para todo $j = 1, \dots, n$. Além disso, iremos assumir que o conjunto de valores \mathbb{V} constitui um reticulado completo com algum esquema de ordem específico. Conseqüentemente, o conjunto de todas as imagens de $\Omega = \{o_1, \dots, o_n\}$ em \mathbb{V} , ou seja, o conjunto \mathbb{V}^n , também representa um reticulado completo com a seguinte ordem induzida: Dados $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \in \mathbb{V}^n$ e $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n] \in \mathbb{V}^n$, defina

$$\mathbf{x} < \mathbf{y} \quad \text{se e somente se} \quad \mathbf{x}_j < \mathbf{y}_j, \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Além disso, podemos definir operadores δ e ε de \mathbb{V}^n em \mathbb{V} como segue para quaisquer conjuntos de índices $\mathcal{J}, \mathcal{K} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\delta(\mathbf{x}) = \bigvee_{j \in \mathcal{J}} \mathbf{x}_j \quad \text{and} \quad \varepsilon(\mathbf{x}) = \bigwedge_{k \in \mathcal{K}} \mathbf{x}_k. \quad (3)$$

O operador δ definido acima comuta com o supremo enquanto que ε comuta com o ínfimo. Em outras palavras, tem-se a seguinte proposição:

Proposição 1. *Os operadores $\delta, \varepsilon : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{V}$ definidos em (3) efetuam respectivamente uma dilatação e uma erosão para quaisquer conjuntos $\mathcal{J}, \mathcal{K} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$.*

Note que a dilatação δ e a erosão ε dadas por (3) dependem apenas do reticulado completo \mathbb{V} , ou seja, da ordem definida no conjunto de valores. Em particular, se os elementos de \mathbb{V} possuem $\nu > 1$ valores, então pode-se definir a seguinte ordem:

Definição 2 (Ordem Lexicográfica). *Dados elementos $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_\nu) \in \mathbb{V}$ e $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_\nu) \in \mathbb{V}$ quaisquer, dizemos que $\mathbf{v} <_L \mathbf{u}$ se, e somente se, existe um índice $i \in \{1, \dots, \nu\}$ tal que $v_i < u_i$ e $v_j = u_j$ para todo $j < i$. Escrevemos $\mathbf{v} \leq_L \mathbf{u}$ se, e somente se, $\mathbf{v} <_L \mathbf{u}$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{u}$.*

A ordem lexicográfica tem sido muito usada na MM multi-valores [5, 3]. Primeiro, porque esse esquema de ordem não gera as chamadas “cores falsas” [4]. A ordem lexicográfica também evita ambigüidades durante a ordenação dos elementos de \mathbb{V} em vista da propriedade de anti-simetria. Finalmente, pode-se estabelecer diferentes prioridades nos canais de cores de uma imagem. Por exemplo, o canal vermelho pode ser priorizado no sistema RGB enquanto que o canal verde pode ser priorizado no sistema GRB. Em vista dessas observações, nas próximas seções apresentaremos apenas resultados baseados na ordem lexicográfica. Todavia, nesse projeto de pesquisa pretendemos investigar diferentes esquemas de ordem para o conjunto de valores \mathbb{V} . Nesse ponto, gostaríamos de lembrar que diversos esquemas interessantes para imagens multi-valores podem ser encontrados em [5, 4, 8].

2.4 Memórias Associativas Morfológicas para Padrões Multi-valores

Nessa subseção apresentaremos uma breve revisão das MAMs multi-valores introduzidas por Valle em [47]. As MAMs multi-valores constituem de uma única camada de neurônios que efetuam exclusivamente

dilatações ou erosões dadas por (3). Lembre-se que muitos modelos de memórias associativas, incluindo a rede de Hopfield e as memórias associativas morfológicas originais de Ritter e Sussner, também estão baseadas nessa mesma arquitetura de rede [15, 19, 34, 42].

A dilatação dada em (3) pode ser usada para definir uma MAM multi-valores como segue. Seja $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \in \mathbb{V}^n$ um padrão multi-valores, o padrão $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n] \in \mathbb{V}^m$ recordado pela memória é determinado como segue onde $\mathcal{J}_i \subseteq \{1, \dots, n\}$ denota um conjunto de índices:

$$\mathbf{y}_i = \bigvee_{j \in \mathcal{J}_i} \mathbf{x}_j, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, m. \quad (4)$$

O modelo descrito por (4) é referido como *memória associativa morfológica dilatativa multi-valores* (MD-MAM, Multivalued Dilative Morphological Associative Memory). Note que uma MD-MAM corresponde a uma dilatação $\mathcal{D} : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{V}^m$ que pode ser usada para a reconstrução de imagens multi-valores.

O conjunto \mathcal{J}_i em (4) pode ser interpretado como o conjunto das junções sinápticas do i -ésimo neurônio morfológico multi-valores. Portanto, a saída \mathbf{y}_i é simplesmente o máximo das entradas \mathbf{x}_j que chegam ao neurônio através de uma junção sináptica. Nesse ponto, gostaríamos de lembrar que a operação de máximo, que possui papel importante nos neurônios da MD-MAM, são biologicamente plausíveis [50]. De fato, Poggio e outros pesquisadores conceituados observaram que a operação de máximo possui um papel importante em diversos processos do sistema visual [31, 12].

De um modo similar, define-se uma *memória associativa morfológica erosiva multi-valores* (ME-MAM, Multivalued Erosive Autoassociative Morphological Memory) como segue onde $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \in \mathbb{V}^n$ denota o padrão de entrada multi-valores, $\mathcal{K}_i \subseteq \{1, \dots, n\}$ representa o conjunto das junções sinápticas e $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n] \in \mathbb{V}^n$ corresponde ao padrão recordado pela memória:

$$\mathbf{y}_i = \bigwedge_{k \in \mathcal{K}_i} \mathbf{x}_k, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, m. \quad (5)$$

Note que uma ME-MAM dada por (5) corresponde a uma erosão $\mathcal{E} : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{V}^m$.

2.5 Técnicas de Armazenamento para as MAMs Multi-valores Auto-associativas

Nesse seção revisamos as técnicas de armazenamento para as MAMs multi-valores auto-associativas definidas em (4) e (5) na subseção anterior. Essas técnicas foram introduzidas por Valle em [47] e geralmente fornecem uma memória com arquitetura de rede esparsa sendo, portanto, recomendadas para o armazenamento de grandes imagens coloridas.

Suponha que desejamos armazenar um conjunto de memórias fundamentais $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\} \subseteq \mathbb{V}^n$ (auto-associativo) numa MD-MAM dada por (4). Em outras palavras, deseja-se determinar conjuntos de índices $\mathcal{J}_i \subseteq \{1, \dots, n\}$ tais que as seguintes equações são válidas para todo $\xi = 1, \dots, p$ e $i = 1, \dots, n$:

$$\mathbf{x}_i^\xi = \bigvee_{j \in \mathcal{J}_i} \mathbf{x}_j^\xi. \quad (6)$$

Pode-se mostrar facilmente que esse problema possui infinitas soluções. Com objetivo de encontrar uma MD-MAM auto-associativa com uma certa tolerância a ruído, Valle adotou os maiores conjuntos \mathcal{J}_i 's

que satisfazem (6) para todo $i = 1, \dots, n$ e $\xi = 1, \dots, p$. Em termos matemáticos, define-se \mathcal{J}_i como segue para todo $i = 1, \dots, n$:

$$\mathcal{J}_i = \{j : \mathbf{x}_j^\xi \leq_L \mathbf{x}_i^\xi, \text{ para todo } \xi = 1, \dots, p\}. \quad (7)$$

Alternativamente, o conjunto \mathcal{J}_i corresponde a seguinte intersecção onde $\mathcal{J}_i^\xi = \{j : \mathbf{x}_j^\xi \leq_L \mathbf{x}_i^\xi\}$ para todo $\xi = 1, \dots, p$:

$$\mathcal{J}_i = \bigcap_{\xi=1}^p \mathcal{J}_i^\xi, \quad (8)$$

Lembre-se que o símbolo “ \leq_L ” denota a ordem lexicográfica apresentada na Definição 2.

De um modo similar, dado um conjunto auto-associativo de memórias fundamentais $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\} \subseteq \mathbb{V}^n$, define-se o conjunto das junções sinápticas de uma ME-MAM auto-associativa como:

$$\mathcal{K}_i = \{k : \mathbf{x}_i^\xi \leq_L \mathbf{x}_k^\xi, \forall \xi = 1, \dots, p\}, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n. \quad (9)$$

2.6 Propriedades e Aspectos Computacionais das MAMs Multi-valores

As MAMs multi-valores apresentadas nas seções anteriores apresentam características semelhantes as MAMs originais introduzidas por Ritter e Sussner [42, 34, 32]. De fato, pode-se mostrar que o seguinte teorema vale para as MAMs multi-valores auto-associativas:

Teorema 3. *Considere um conjunto auto-associativo de memórias fundamentais $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k\} \subseteq \mathbb{V}^n$ e seja $\mathbf{x} \in \mathbb{V}^n$ um padrão de entrada qualquer. Se os conjuntos de índices \mathcal{J}_i são definidos através de (7), então o padrão recordado pela MD-MAM auto-associativa $\mathcal{D} : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{V}^n$ dada por (4) é o menor ponto fixo \mathbf{z} de \mathcal{D} tal que $\mathbf{z} \geq \mathbf{x}$. Em outras palavras, tem-se*

$$\mathcal{D}(\mathbf{x}) = \bigwedge \{\mathbf{z} \in \mathbb{V}^n : \mathcal{D}(\mathbf{z}) = \mathbf{z} \text{ e } \mathbf{z} \geq \mathbf{x}\}. \quad (10)$$

Analogamente, se os conjuntos de índices \mathcal{K}_i são definidos através de (9), então o padrão recordado pela ME-MAM auto-associativa $\mathcal{E} : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{V}^n$ dada por (5) é o maior ponto fixo \mathbf{z} de \mathcal{E} tal que $\mathbf{z} \leq \mathbf{x}$. Em outras palavras, tem-se

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}) = \bigvee \{\mathbf{z} \in \mathbb{V}^n : \mathcal{E}(\mathbf{z}) = \mathbf{z} \text{ e } \mathbf{z} \leq \mathbf{x}\}. \quad (11)$$

O conjunto dos pontos fixos dos operadores \mathcal{D} e \mathcal{E} incluem as memórias fundamentais $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\}$. Em outras palavras, as equações $\mathcal{D}(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{x}^\xi$ e $\mathcal{E}(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{x}^\xi$ valem para todo $\xi = 1, \dots, p$.

Como consequência do Teorema 3, podemos listar as seguintes propriedades das MAMs multi-valores auto-associativas:

1. Ambas MD-MAM e ME-MAM exibem ótima capacidade absoluta de armazenamento no caso auto-associativo. Portanto, pode-se armazenar quantos padrões forem desejados nesses modelos.
2. O padrão recordado pelas MAMs multi-valores permanecem os mesmos após repetidas aplicações dos modelos. Em outras palavras, esses modelos apresentam convergência num única iteração se empregadas com realimentação (feedback).



Figura 1: Imagens originais de dimensão 512×512 no sistema RGB.

3. O padrão recordado por uma MD-MAM auto-associativa representa o menor ponto fixo de \mathcal{D} maior ou igual ao padrão de entrada. Logo, é necessário que o padrão de entrada \mathbf{x} satisfaça $\mathbf{x}_i \leq_L \mathbf{x}_i^\xi$, para todo $i = 1, \dots, n$, para que um padrão original \mathbf{x}^ξ seja recordado pela memória.

Dualmente, é necessário que $\mathbf{x}_i^\xi \leq_L \mathbf{x}_i$ para todo $i = 1, \dots, n$ para que uma ME-MAM consiga recordar corretamente um padrão original \mathbf{x}^ξ .

4. As MAMs multi-valores auto-associativas apresentam uma grande quantidade de memórias espúrias que são armazenadas indiretamente no modelo. Essa observação segue do fato dos conjuntos dos pontos fixos de \mathcal{D} e \mathcal{E} incluírem uma grande quantidade de pontos fixos diferentes das memórias fundamentais $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p$.

A grande vantagem das MAMs multi-valores introduzidas por Valle refere-se ao seu aspecto computacional. De fato, muitos modelos de AM, incluindo as MAMs originais de Sussner e Ritter, requerem o cálculo de uma matriz de pesos sinápticos de dimensões $n \times n$ [15, 34, 42]. Se os padrões são multi-valores, então pode-se armazenar cada canal numa memória diferente. Nesse caso, deve-se armazenar νn^2 valores correspondentes os pesos sinápticos. Esse valor geralmente não depende da quantidade de padrões armazenados na memória. Em contraste, as MAMs multi-valores requerem apenas o armazenamento dos conjuntos de índices \mathcal{J}_i 's e \mathcal{K}_i 's. Além disso, em vista de (7) e (9), geralmente obtém-se redes com estrutura esparsa, ou seja, os conjuntos \mathcal{J}_i 's e \mathcal{K}_i 's frequentemente possuem poucos elementos. De fato, assumindo que as memórias fundamentais $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme, pode-se mostrar que o número de junções sinápticas - e conseqüentemente os recursos computacionais - diminuem consideravelmente quando o número de memórias fundamentais p aumenta [47].

2.7 Experimentos Computacionais

Considere as doze imagens coloridas de dimensão 512×512 apresentadas na Figura 1. Usando o sistema de cores RGB, geramos para essas imagens padrões multi-valores \mathbf{x}^ξ de tamanho $n = 262144$ e valores no intervalo unitário, ou seja, $\mathbf{x}^\xi = [\mathbf{x}_1^\xi, \dots, \mathbf{x}_n^\xi]$, onde $\mathbf{x}_i^\xi = [r_i^\xi, g_i^\xi, b_i^\xi] \in [0, 1]^3$. Os valores r_i^ξ , g_i^ξ e b_i^ξ correspondem respectivamente as intensidades das cores vermelha, verde e azul do elemento \mathbf{x}_i^ξ .

Os doze padrões multi-valores $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^{12}$ foram armazenados nas memórias auto-associativas MD-MAM e ME-MAM usando (7) e (9), respectivamente. Como mencionado na seção anterior, foram obtidas

Tabela 1: Média do erro quadrático médio normalizado em 10 experimentos.

| NMSE | Ruído Pimenta ($\pi_1 = 0.1$) | Ruído Pimenta ($\pi_2 = 0.3$) | Ruído Sal ($\pi_3 = 0.1$) | Ruído Gaussiano ($\sigma = 0.1$) | Ruído Speckle ($\sigma = 0.1$) | Padrão incompleto |
|--------|------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------|----------------------|
| MD-MAM | 0.0601 | 0.1858 | 0.3431 | 0.3153 | 0.4285 | 0.1030 |
| ME-MAM | 0.2932 | 0.4995 | 0.0606 | 0.3042 | 0.5024 | 0.1457 |

redes esparsas com aproximadamente $1/2^{12}$ do número total de possíveis junções sinápticas. Em termos computacionais, as MAMs multi-valores consumiram aproximadamente 83MB de espaço no computador.

Completada a fase de armazenamento, confirmamos que os doze padrões originais $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^{12}$ apresentados na Figura 1 representam pontos fixos das MD-MAM e ME-MAM auto-associativas. Posteriormente, foram apresentados as MAMs multi-valores os padrões distorcidos ou incompletos mostrados na primeira linha da Figura 2. Os padrões corrompidos foram obtidos adicionando *ruído do tipo pimenta* (pepper noise) com probabilidades $\pi_1 = 0.1$ e $\pi_2 = 0.3$, *ruído do tipo sal* (salt noise) com probabilidade $\pi_3 = 0.1$, e *ruído Gaussiano* (gaussian noise) e *ruído speckle* com variância $\sigma = 0.1$. As linhas seguintes da Figura 2 mostram as imagens recordadas pelas MD-MAM e ME-MAM. A Tabela 1 contém a média do *erro quadrático médio normalizado* (NMSE, normalized mean square error) obtido após 100 experimentos similares. Lembre-se que o NMSE é determinado através da seguinte equação onde \mathbf{x} e \mathbf{y} denotam os padrões original e recordado, respectivamente.

$$\text{NMSE} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\nu} (x_{ij} - y_{ij})^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\nu} x_{ij}^2}. \quad (12)$$

Note que a MD-MAM apresentou resultados melhores que a ME-MAM com respeito a ruído do tipo pimenta e padrões incompletos, mas a segunda apresentou melhor tolerância com respeito a ruído do tipo sal. Essa observação é uma consequência do Teorema 3. Note também que o canal vermelho é priorizado pela MD-MAM devido a ordem lexicográfica. Dualmente, a ME-MAM prioriza o canal azul em vista da operação de mínimo no mesmo esquema de ordem.

Finalmente, gostaríamos de observar que muitos outros modelos de memória associativa, como a classe de redes de Cohen-Grossberg desenvolvida por Zheng et al. [54], iriam requerer o armazenamento da ordem de n^2 pesos sinápticos para armazenar cada canal RGB num modelo diferente. Em termos computacionais, esses modelos podem alocar mais de 1TB de memória. Todavia, nossos computadores atuais não possuem tantos recursos disponíveis, o que revela a efetividade das MAMs multi-valores esparsas para o armazenamento de grandes padrões.

3 Objetivos e Plano de Trabalho

Nesse projeto de pesquisa daremos continuação nos estudos sobre os modelos de memórias associativas morfológicas para imagens coloridas. Em particular, investigaremos os seguintes itens conforme o cronograma apresentado abaixo.

1. Primeiro Semestre - Revisão Bibliográfica:

Existem diversas representações matemáticas para imagens coloridas, além do sistema RGB conside-

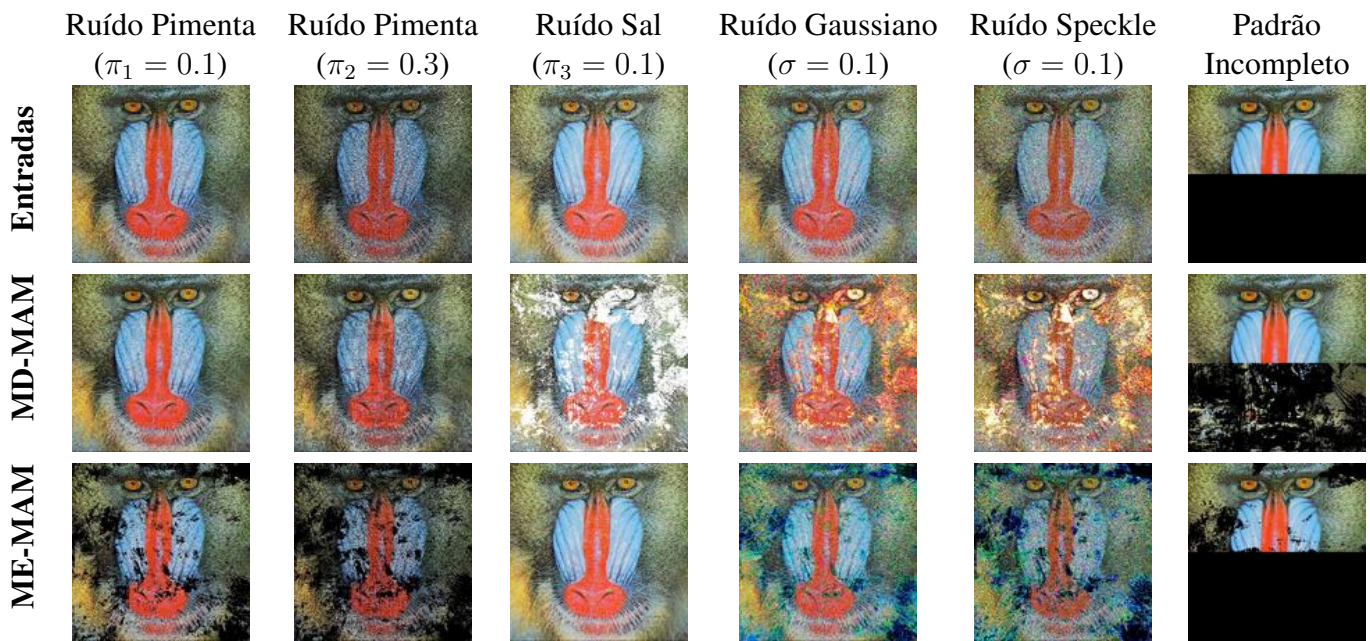


Figura 2: A primeira linha apresenta versões distorcidas e incompletas das imagens originais mostradas na Figura 1. As linhas seguintes contêm as imagens correspondentes recordadas pela MD-MAM e pela ME-MAM, respectivamente.

rado na seção anterior. Podemos citar como exemplo o sistema HSV e CIELab [1, 11, 13]. Assim, no primeiro semestre faremos uma extensa revisão das diferentes representações de imagens coloridas.

Nesse primeiro semestre, também revisaremos os principais modelos de memórias associativas para imagens coloridas existentes na literatura. Esses modelos serão implementados em softwares matemáticos como GNU Octave e MATLAB e serão utilizados para comparação nos próximos estágios do projeto de pesquisa.

2. Segundo e Terceiro Semestres - *Novas MAMs auto-associativas esparsas:*

No segundo semestre investigaremos esquemas de ordem para as representações estudadas no item anterior. Consequentemente, teremos novos operadores morfológicos definidos em termos da equação (3). Sobretudo, serão demonstrados resultados gerais sobre capacidade de armazenamento, fase de recordação e pontos fixos das MAMs esparsas obtidas através das equações (7), (4), (9) e (5). Esses resultados devem ser válidos para as diferentes representações de imagens coloridas. Finalmente, experimentos computacionais realizados nos softwares matemáticos GNU Octave ou MATLAB serão efetuados para avaliar o desempenho das MAMs aplicadas para a reconstrução imagens de coloridas corrompidas com diferentes tipos de ruído.

Gostaríamos de observar que parte dessa etapa já foi realizada e os resultados obtidos foram publicados na referência [48]. Acreditamos, contudo, que o assunto requer um estudo mais aprofundado.

3. Quarto, Quinto e Sexto Semestres - *Investigação de outros operadores de dilatação e erosão:*

Os modelos de memória associativa desenvolvidos pelo proponente em [47] estão baseados nos operadores de dilatação e erosão definidos em (3). Existem, entretanto, outras formas de definir operadores de dilatação e erosão. De fato, Magaros introduziu uma estrutura álgebra chamada *clodum* que

unifica diversas abordagens da morfologia matemática, incluindo o caso binário, em tons de cinza e fuzzy [23]. Resumidamente, um clodum $(\mathbb{V}, \vee, \wedge, \star, \star')$ é uma estrutura matemática tal que:

- $(\mathbb{V}, \vee, \wedge)$ é um reticulado completo infinitamente distributivo;
- (\mathbb{V}, \star) é um monoid comutativo na qual \star efetua uma dilatação;
- (\mathbb{V}, \star') é um monoid comutativo na qual \star' corresponde à uma erosão.

Sobretudo, Maragos enunciou a seguinte proposição para dilatações em um clodum:

Proposição 4. *Considere um clodum $(\mathbb{V}, \vee, \wedge, \star, \star')$ e seja \mathbb{V}^Ω o conjunto de todas as funções de um conjunto arbitrário Ω em \mathbb{V} . Um operador $\delta : \mathbb{V}^\Omega \rightarrow \mathbb{V}^\Omega$ é uma dilatação que satisfaz*

$$\delta \left(\bigvee (\alpha \star \mathbf{X}) \right) = \bigvee \left(\alpha \star \delta(\mathbf{X}) \right), \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{L} \text{ e } \mathbf{X} \in \mathbb{L}^\Omega, \quad (13)$$

se, e somente se, δ pode ser expresso através da equação

$$\delta(\mathbf{x})(o) = \bigvee_{\omega \in \Omega} H_\omega(o) \star \mathbf{x}(\omega), \quad \text{para todo } o \in \Omega, \quad (14)$$

onde, para cada $\omega \in \Omega$, tem-se alguma função $H_\omega : \Omega \rightarrow \mathbb{V}^\Omega$.

Maragos também demonstrou um resultado dual para erosões em \mathbb{V}^Ω .

Identificando o conjunto \mathbb{V}^Ω com o conjunto das imagens multi-valores (que são funções de Ω em um conjunto de valores \mathbb{V}), no último estágio do projeto de pesquisa definiremos MAMs multi-valores substituindo as expressões em (3) por dilatações e erosões definidas da seguinte forma onde $\mathbf{h}_{ij} \in \mathbb{V}$ e $\mathbf{g}_{ij} \in \mathbb{V}$ para todo $i, j = 1, \dots, n$:

$$\delta(\mathbf{x}) = \bigvee_{j=1}^n (\mathbf{h}_{ij} \star \mathbf{x}_j) \quad \text{e} \quad \varepsilon(\mathbf{x}) = \bigwedge_{j=1}^n (\mathbf{g}_{ij} \star' \mathbf{x}_j). \quad (15)$$

Para tanto, iremos definir operações apropriadas \star e \star' em \mathbb{V} . Nesse estágio iremos também desenvolver uma técnica eficiente de armazenamento de padrões nas novas MAMs multi-valores. Seguindo os itens anteriores, resultados teóricos serão investigados e experimentos computacionais serão efetuados.

4 Contribuições e Resultados Esperados

Nesse projeto de pesquisa daremos continuação aos estudos iniciados pelo proponente sobre modelos de *memórias associativas morfológicas* (MAMs) para imagens coloridas. Como mencionado na introdução, modelos de memória associativa foram usados com sucesso em problemas de classificação, previsão e reconhecimento de padrões. Portanto, esse projeto de pesquisa deve contribuir nessas aplicações. Por limitações no cronograma de execução, entretanto, nos concentraremos apenas nas aplicações das MAMs

multi-valores para a reconstrução de grandes imagens coloridas. Desse modo, esperamos obter modelos com melhores tolerância a ruído e de menor custo computacional.

É importante ressaltar que todos os resultados desenvolvidos terão forte fundamento matemático na teoria dos reticulados ou em estruturas mais ricas, como a estrutura clodum introduzida por Maragos. Finalmente, acreditamos que os resultados desenvolvidos nesse projeto de pesquisa possam ser publicados em pelo menos um artigo de um periódico de circulação internacional como, por exemplo, o *IEEE Transactions on Neural Networks* (Qualis A1) ou o *Journal of Mathematical Imaging and Vision* (Qualis A2).

Referências

- [1] AGOSTON, M. K. *Computer Graphics and Geometric Modelling: Implementation & Algorithms*, vol. 1. Springer, U.S.A., 2005.
- [2] ANDERSON, J. *An Introduction to Neural Networks*. MIT Press, MA, 1995.
- [3] ANGULO, J. Morphological colour operators in totally ordered lattices based on distances: Application to image filtering, enhancement and analysis. *Computer Vision and Image Understanding* 107, 1–2 (July-August 2007), 56–73. Special issue on color image processing.
- [4] APTOULA, E., AND LEFÈVRE, S. A comparative study on multivariate mathematical morphology. *Pattern Recognition* 40, 11 (November 2007), 2914–2929.
- [5] APTOULA, E., AND LEFÈVRE, S. On lexicographical ordering in multivariate mathematical morphology. *Pattern Recognition Letters* 29, 2 (January 2008), 109–118.
- [6] BANON, G., AND BARRERA, J. Decomposition of mappings between complete lattices by mathematical morphology, part 1. general lattices. *Signal Processing* 30, 3 (1993), 299–327.
- [7] BANON, G., BARRERA, J., AND BRAGA-NETO, U., Eds. *Mathematical Morphology and its Applications to Signal and Image Processing*. INPE, São José dos Campos, 2007. Proceedings of the 8th International Symposium on Mathematical Morphology.
- [8] BARNETT, V. The ordering of multivariate data. *Journal of Royal Statistical Society A* 3 (1976), 318–355.
- [9] BIRKHOFF, G. *Lattice Theory*, 3 ed. American Mathematical Society, Providence, 1993.
- [10] BRAGA-NETO, U., AND GOUTSIAS, J. Supremal multiscale signal analysis. *SIAM Journal of Mathematical Analysis* 36, 1 (2004), 94–120.
- [11] FOLEY, J. D., DAM, A. V., HUGES, J. F., AND FEINER, S. K. *Computer Graphics: Principles and Practice*, 2nd ed. Addison-Wesley, U.S.A., 1990.
- [12] GIESE, M. Neural field model for the recognition of biological motion. In *Proceedings of the Second International ICSC Symposium on Neural Computation* (Berlin, Germany, 2000).

- [13] GONZALEZ, R. C., AND WOODS, R. E. *Digital Image Processing*, second ed. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [14] HADWIGER, H. *Vorlesungen Über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer-Verlag, Berlin, 1957.
- [15] HASSOUN, M. H., Ed. *Associative Neural Memories: Theory and Implementation*. Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.
- [16] HASSOUN, M. H. *Fundamentals of Artificial Neural Networks*. MIT Press, Cambridge, MA, 1995.
- [17] HAYKIN, S. *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999.
- [18] HEIJMANS, H. *Morphological Image Operators*. Academic Press, New York, NY, 1994.
- [19] HOPFIELD, J. J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 79 (Apr. 1982), 2554–2558.
- [20] KIM, C. Segmenting a low-depth-of-field image using morphological filters and region merging. *IEEE Transactions on Image Processing* 14, 10 (2005), 1503–1511.
- [21] KOHONEN, T. *Self-organization and associative memory*, 3rd edition ed. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1989.
- [22] KOSKO, B. *Neural Networks and Fuzzy Systems: A Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.
- [23] MARAGOS, P. Lattice image processing: A unification of morphological and fuzzy algebraic systems. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 22, 2-3 (2005), 333–353.
- [24] MATHERON, G. *Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux*. Masson, Paris, 1967.
- [25] MATHERON, G. *Théorie des Ensembles Aléatoires*. Ecole des Mines, Paris, 1967.
- [26] MATHERON, G. *Random Sets and Integral Geometry*. John Wiley & Sons, New York, NY, 1975.
- [27] MINKOWSKI, H. *Gesammelte Abhandlungen*. Teubner Verlag, Leipzig-Berlin, 1911.
- [28] MONTEROS, R. A. V. E. D. L., AND AZUELA, J. H. S. A bidirectional hetero-associative memory for true-color patterns. *Neural Processing Letters* 28, 3 (2008), 131–153.
- [29] MONTEROS, R. A. V. E. D. L., AND AZUELA, J. H. S. A new associative model with dynamical synapses. *Neural Processing Letters* 28, 3 (2008), 189–207.
- [30] PAO, Y. H. *Adaptive Pattern Recognition and Neural Networks*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.

- [31] RIESENHUBER, M. K., AND POGGIO, T. Hierarchical models of object recognition in cortex. *Nature Neuroscience* 2 (1999), 1019–1025.
- [32] RITTER, G. X., AND GADER, P. Fixed points of lattice transforms and lattice associative memories. In *Advances in Imaging and Electron Physics*, P. Hawkes, Ed., vol. 144. Academic Press, New York, NY, 2006.
- [33] RITTER, G. X., AND SUSSNER, P. An introduction to morphological neural networks. In *Proceedings of the 13th International Conference on Pattern Recognition* (Vienna, Austria, 1996), pp. 709–717.
- [34] RITTER, G. X., SUSSNER, P., AND DE LEON, J. L. D. Morphological associative memories. *IEEE Transactions on Neural Networks* 9, 2 (1998), 281–293.
- [35] RITTER, G. X., AND WILSON, J. N. *Handbook of Computer Vision Algorithms in Image Algebra*, 2 ed. CRC Press, Boca Raton, 2001.
- [36] RONSE, C. Why mathematical morphology needs complete lattices. *Signal Processing* 21, 2 (1990), 129–154.
- [37] SERRA, J. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London, 1982.
- [38] SERRA, J. *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2: Theoretical Advances*. Academic Press, New York, 1988.
- [39] SOBANIA, A., AND EVANS, J. P. O. Morphological corner detector using paired triangular structuring elements. *Pattern Recognition* 38, 7 (2005), 1087–1098.
- [40] SOILLE, P. *Morphological Image Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1999.
- [41] SUSSNER, P., MIYASAKI, R., AND VALLE, M. E. An introduction to parameterized IFAM models with applications in prediction. In *Proceedings of the 2009 IFSA World Congress and 2009 EUSFLAT Conference* (Lisbon, Portugal, July 2009), pp. 247–252.
- [42] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Grayscale morphological associative memories. *IEEE Transactions on Neural Networks* 17, 3 (May 2006), 559–570.
- [43] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Implicative fuzzy associative memories. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 14, 6 (2006), 793–807.
- [44] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Recall of patterns using morphological and certain fuzzy morphological associative memories. In *Proceedings of the IEEE World Conference on Computational Intelligence 2006* (Vancouver, Canada, 2006), pp. 209–216.
- [45] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Morphological and certain fuzzy morphological associative memories for classification and prediction. In *Computational Intelligence Based on Lattice Theory*, V. Kaburlasos and G. Ritter, Eds. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 2007, ch. 8, pp. 149–172.

- [46] TEROL-VILLALOBOS, I., AND MENDIOLA-SANTIBANEZ, J. Transformations with reconstruction criteria: Image segmentation and filtering. vol. 30 of *Computational Imaging and Vision*. Springer-Verlag, Dordrecht, 2005, pp. 75–84.
- [47] VALLE, M. E. A class of sparsely connected autoassociative morphological memories for large color images. *IEEE Transactions on Neural Networks* 20, 6 (June 2009), 1045–1050.
- [48] VALLE, M. E., AND VICENTE, D. M. G. Some experimental results on sparsely connected autoassociative morphological memories for the reconstruction of color images corrupted by either impulsive or gaussian noise. In *Proceedings of the IEEE International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN 2011)* (San Jose, CA, Aug. 2011). Accepted for publication.
- [49] VARGAS-VAZQUEZ, D., CRESPO, J., AND MAOJO, V. Morphological image reconstruction with criterion from labelled markers. In *Discrete Geometry for Computer Imagery*, I. Nyström, G. Sanniti di Baja, and S. Svensson, Eds., vol. 2886 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003, pp. 475–484.
- [50] YU, A., GIESE, M., AND POGGIO, T. Biophysiologicaly plausible implementations of the maximum operation. *Neural Computation* 14, 12 (2002), 2857–2881.
- [51] ZHANG, B.-L., ZHANG, H., AND GE, S. S. Face recognition by applying wavelet subband representation and kernel associative memory. *IEEE Transactions on Neural Networks* 15, 1 (Jan. 2004), 166–177.
- [52] ZHANG, D., AND ZUO, W. Computational intelligence-based biometric technologies. *IEEE Computational Intelligence Magazine* 2, 2 (May 2007), 26–36.
- [53] ZHANG, H., HUANG, W., HUANG, Z., AND ZHANG, B. A kernel autoassociator approach to pattern classification. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B* 35, 3 (June 2005), 593–606.
- [54] ZHENG, P., ZHANG, J., AND TANG, W. Color image associative memory on a class of Cohen–Grossberg networks. *Pattern Recognition* 43, 10 (Oct. 2010), 3255–3260.