$1^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios - MA-141

MATRIZES

1. Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) Verifique que: $xA_1 + yA_2 + zA_3 = AX$, sendo A_j a j-ésima coluna de A para $j = 1, 2, 3$.
b) Usando a) verifique que: a segunda coluna de $C = A^2$ é $C_2 = -2A_1 - A_3$.
c) Tente generalizar o que foi feito em a) e b) para a seguinte situação: Sejam A uma matriz $m \times n$, B uma matriz $n \times k$ e $C = AB$. Se C_j é a j-ésima coluna de C, encontre C_j em termos das n colunas de A e da j-ésima coluna de B.

2. a) Sejam A e B duas matrizes quadradas $n \times n$. Mostre que $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.
b) Suponha agora que: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e verifique que $AB \neq BA$ e conclua que neste caso $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

c) Voltando ao caso a). Mostre que: Se A e B são duas matrizes quadradas $n \times n$, então $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ se e somente se $AB = BA$.

3. Seja $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Mostre que: Se A é uma matriz 2×2 então $AM = MA$ se e somente se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$
b) Mostre que se A e B são matrizes 2×2 que comutam com M então A e B comutam entre si, i.é, $AB = BA$.

4. a) Determine todas as matrizes D, 2×2 e diagonais, que satisfazem: $DB = BD$ para toda matriz, 2×2, B.
b) Determine todas as matrizes A, 2×2, que satisfazem:$AB = BA$ para toda matriz B, 2×2.
c) Tente generalizar a) e b) para matrizes $n \times n$.

5. Responda falso ou verdadeiro a cada uma das afirmações abaixo (justifique suas respostas).
a) Se A é matriz $n \times n$ e $A^2 = \mathbf{0}$ então $A = \mathbf{0}$, aqui $\mathbf{0}$ é a matriz nula.
b) A única matriz $n \times n$ simétrica e anti-simétrica ao mesmo tempo é a matriz nula.
c) Se A é uma matriz $n \times n$ e $A^2 = I_n$ então $A = I_n$ ou $A = -I_n$ (I_n é a matriz identidade $n \times n$).
d) Se A e B são duas matrizes $n \times n$ e $AB = BA$, então $(AB)^p = A^p B^p$ para todo número natural p.
e) Se A e B são matrizes $n \times n$ tais que $AB = \mathbf{0}$ então $BA = \mathbf{0}$.
f) Se A é uma matriz $n \times n$ e $A^4 - 3A^2 + 7A - I_n = \mathbf{0}$ então A é invertível (i.é. $AB = BA = I_n$ para alguma matriz B, $n \times n$.

SISTEMAS LINEARES e DETERMINANTES

6. Decida quais das matrizes abaixo estão na forma escada (ou escalonada reduzida). Para as que não estão encontre as suas respectativas matrizes na forma escada

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Em cada um dos sistemas abaixo encontre, usando o metódo de Gauss, sua solução geral:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrl} 4x & +3y & -z & +t & = 4 \\ x & -y & +2z & -t & = 0 \\ 5x & +2y & +z & & = 4 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{rrrrl} x & +5y & +4z & -13z & = 3 \\ 3x & -y & +2z & +5t & = 2 \\ 2x & +2y & +3z & -4t & = 1 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{rrrrl} x & -y & +2z & -t & = 0 \\ 3x & +y & +3z & +t & = 0 \\ x & -y & -z & -5t & = 0 \end{array} \right. .$$

8. Seja $M = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{pmatrix}$ a matriz ampliada (ou aumentada) do sistema linear. Para que valores de a e b o sistema admite:
a) Solução única b) Solução com uma variável livre
c) Solução com duas variáveis livres d) Nenhuma solução.

9. Considere o sistema $AX = B$, com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & a^2 - 16 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ a + 14 \end{pmatrix}$$

(a) Determine o valor (ou valores) de a para que o sistema tenha solução única.
(b) Existem valores para a de forma que o sistema tenha infinitas soluções?
(c) Existem valores para a de forma que o sistema não tenha solução?

10. Sabendo que o sistema $\begin{cases} x & +y & +z & = 1 \\ mx & +2y & +3z & = 0 \\ m^2x & +4y & +9z & = 1 \end{cases}$ admite uma única solução, podemos concluir que m pode assumir todos os valores do intervalo real:

a) $[0, 1]$ b) $[1, 2]$ c) $[3, 4)$ d)$[0, 4]$.

11 Resolva o sistema dependendo dos valores dos parâmetros respectivos:

a) $\left| \begin{array}{llll} 2x_1+ & 3x_2+ & x_3 & = 1 \\ x_1+ & 6x_2+ & x_3 & = 3 \\ 2x_1- & 3x_2+ & 2x_3 & = \lambda \\ x_1+ & 3x_2+ & 2x_3 & = 1 \end{array} \right.$; b) $\left| \begin{array}{lllll} x_1- & 2x_2- & x_3+ & x_4 & = -2 \\ 2x_1+ & 7x_2+ & 3x_3+ & x_4 & = 6 \\ 11x_1+ & 11x_2+ & 4x_3+ & 8x_4 & = 8 \\ 10x_1+ & 2x_2+ & & 8x_4 & = \lambda \end{array} \right.$.

12. a) Determine os coeficientes a, b, c e d da função polinomial $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, cujo gráfico passa pelos pontos $P_1 = (0, 10)$, $P_2 = (1, 7)$, $P_3 = (3, -11)$ e $P_4 = (4, -14)$.

b) Determine coeficientes a, b e c da equação do círculo, $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, que passa pelos pontos $P_1 = (-2, 7)$, $P_2 = (-4, 5)$ e $P_3 = (4, -3)$.

13. Considere o sistema $(*)$ $AX = B$, com A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $m \times 1$.

a) Mostre que: se Y_1 e Y_2 são soluções do sistema homogêneo associado $AX = \mathbf{0}$ e a e b são números reais então $Z = aY_1 + bY_2$ também é solução do homogêneo associado.

b) Mostre que: Se X_1 e X_2 são soluções de $(*)$ então $Y = X_2 - X_1$ é solução do sistema homogêneo associado $AX = \mathbf{0}$.

c) Suponha que X_0 é uma solução particular de $(*)$ e mostre que qualquer solucão X de $(*)$ é da forma $X = X_0 + Y$, com Y solução do homogêneo associado.

OBS: Na verdade pode-se provar que para todo sistema homogêneo $(**)$ $AX = \mathbf{0}$, com A uma matriz $m \times n$, existem r soluções não nulas $Y_1, \cdots, Y_r$, $0 \leq r \leq n$, de $(**)$ tal que toda solução Y de $(**)$ se escreve na forma $Y = a_1Y_1 + a_2Y_2 + \cdots + a_rY_r$, com $a_1, \cdots, a_r$ números reais ($r = 0$ ocorre quando $(**)$ tem a solução nula como única solução) . Portanto, por c), se o sistema $(*)$ tem uma solução X_0 então toda solução X de $(*)$ é do tipo $X = X_0 + a_1Y_1 + a_2Y_2 + \cdots + a_rY_r$, com $a_1, \cdots, a_r$ números reais. A solução X_0 é comumente chamada de solução inicial (ou particular) de $(*)$ e o conjunto $\{Y_1, \cdots, Y_r\}$ é chamado de um conjunto de geradores do sistema $(*)$ (ou simplesmente de geradores de $(*)$) Observe ainda que X_0 é a única solução de $(*)$ somente quando $r = 0$.

d) Para se convencer do que a observação acima afirma, encontre para cada um dos sistemas do exercício **7.**, um conjunto de geradores do sistema e uma solução particular (quando existir).

14. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

a) Calcule o $det(A^n)$, para todo número natural n.

b) Usando escalonamento encontre a matriz inversa A^{-1}.

15. Dada uma matriz $A = CD$ onde $C^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $D^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, resolva o sistema $AX = B$, sabendo-se que $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

16. Determine todos os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I_3) = 0$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

17. Sabendo-se que para toda matriz, $n \times n$, A com $\det(A) \neq 0$ existe uma matriz, $n \times n$, $\overline{A}$ tal que $\overline{A}A = I_n$, mostre que:

a) se B e C são matrizes $n \times n$ e $BC = I_n$ então $CB = I_n$.

b) se $\det(B) \neq 0$ (B matriz $n \times n$) então existe uma única B^{-1} tal que $BB^{-1} = B^{-1}B = I_n$.

18. Encontre a inversa da matriz abaixo (se existe):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

19. Calcule os determinantes das matrizes:

a) $\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} a+b & a+c \\ d+b & d+c \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & 1 \\ \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & 1 \end{pmatrix}$;

k) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & -2 \\ 4 & 7 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & 1 & -2 \\ -4 & -7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; l) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 0 & 0 \\ 11 & 12 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; m) $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$; n) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

20. Resolva a equação $f(x) = 0$ onde $f(x) = \det(A - xI)$ e a matriz A é a seguinte:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} \cos a & \operatorname{sen} a \\ -\operatorname{sen} a & \cos a \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

VETORES NO PLANO E NO ESPAÇO

21. Determine a extremidade ou a origem do segmento orientado nos seguintes casos:

a) Representa o vetor $v = (1, -2, 1)$ e sua origem é o ponto $P = (1, 0, 1)$.

b) Representa o vetor $v = (-1, 0, 1)$ e sua origem é o ponto médio entre os pontos $P_1 = (1, 1, 3)$ e $P_2 = (-1, 1, 1)$.

c) Representa o vetor $v = (1,1,1)$ e sua extremidade é o ponto $P = (1,1,1)$.

22. Verifique se os pontos dados abaixo são colineares:
a) $A = (1,0,1)$, $B = (2,2,0)$ e $C = (0,-2,2)$;
b) $A = (0,1,-1)$, $B = (1,2,0)$ e $C = (0,2,1)$;
c) $A = (3,1,4)$, $B = (2,7,1)$ e $C = (0,1,5)$.

23. Dados os pontos $A = (1,0,1)$, $B = (-1,1,1)$ e $C = (0,1,2)$.
a) Determine o ponto D tal que A, B, C e D sejam os vértices consecutivos de um paralelogramo
b) Determine o ponto médio entre A e C e o ponto médio entre B e D.

24. Demonstre que as diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio (Sugestão: Sejam M e N os pontos médios das duas diagonais. Mostre $\overline{MN} = \vec{0}$.)

25. Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e seu comprimento é a média aritmética dos comprimentos das bases.

26. Sejam $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ dois vetores não colineares no espaço. Qual o conjunto dos pontos P tais que $\vec{OP} = \lambda\vec{OA} + (1-\lambda)\vec{OB}$?

27. a) Mostre que as medianas de um triângulo interseptam-se num ponto. Encontre a razão em que esse ponto divide cada mediana.

b) Tente generalizar o item (a) para tetraedros.

28. A área do triângulo ABC é $\sqrt{6}$. Sabendo-se que $A = (2,1,0)$, $B = (-1,2,1)$ e que o vértice C está no eixo Y, encontre as coordenadas de C.

29. a) Decompor o vetor $w = (1,3,2)$ como soma de dois vetores $w = u + v$, onde u é paralelo ao vetor $(0,1,3)$ e v é ortogonal a $(0,1,3)$.
b) Encontre um vetor u que seja ortogonal aos vetores $(2,3,-1)$ e $(2,-4,6)$ tal que $\| u \| = 3\sqrt{3}$.

30. a) Demonstre que não existe x tal que os vetores $v = (x,2,3)$ e $u = (x,-2,3)$ sejam perpendiculares.
b) Encontre o ângulo entre os vetores $u = (2,1,0)$ e $v = (0,1,-1)$ e entre os vetores $w = (1,1,1)$ e $z = (0,-2,-2)$.

31. a) Dado um triângulo isósceles, mostre que a mediana relativa à base é a mediatriz (i.é., é perpendicular à base).

b) Mostre que: Se um triângulo tem duas medianas iguais então ele é isósceles.

32. Sejam u e v dois vetores de comprimentos iguais, mostre que para quaisquer números a e b, os vetores $au + bv$ e $av + bu$ têm o mesmo comprimento. O que significa isso?