Universidade Estadual de Campinas
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATíSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTíFICA
Departamento de Matemática Aplicada

Análise de Multi-resolução para Leis de Conservação em Malhas Adaptativas

por

Magda Kimico Kaibara
Bacharel em Matemática - ICMSC/USP/São Carlos
Mestre em Matemática - ICMSC/USP/São Carlos

Orientadora: **Profa. Dra. Sônia Maria Gomes**

Banca Examinadora:
Profa. Dra. Sônia Maria Gomes (Orientadora)
Prof. Dr. Flávio Dickstein - IM-UFRJ
Prof. Dr. Haroldo Fraga de Campos Velho - LAC/INPE
Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos - IMECC/UNICAMP
Profa. Dra. Maria Cristina de Castro Cunha - IMECC/UNICAMP

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutoramento em Matemática Aplicada.

Abril de 2000

À minha querida " Família"

“O que sabemos é uma gota.
O que ignoramos é um oceano.”
Isaac Newton

Agradecimentos

À Profa. Sônia Maria Gomes, pela orientação, atenção e dedicação presentes ao longo deste trabalho.

À Profa. Maria Cristina Castro Cunha, pela ajuda e estímulo.

À minha mãe, Mieco, e à minha irmã, Marly, pela confiança e apoio constantes.

Aos amigos: Amélia e Maurílio que sempre me incentivaram para a realização deste trabalho.

As amigas Kátia e Emília, pela ótima convivência.

Aos colegas do Departamento de Matemática/FC/UNESP - Bauru, pelo estímulo e apoio, que foram decisivos à realização deste trabalho.

Aos amigos do curso de Doutorado, pelo bons momentos que me proporcionaram.

Aos colegas do DMA e da Seção de Pós-Graduação do IMECC - UNICAMP, pela ajuda constante.

Aos professores do DMA - IMECC - UNICAMP, com os quais tive o prazer de conviver.

À CAPES/PICDT, pelo apoio financeiro.

A todos que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

RESUMO

São dois os tópicos principais deste trabalho. Por um lado estão as análises de multi-resolução de dados que estabelecem relações entre as informações $\{f^{k+1}\}$ sobre uma dada função f no nível de resolução mais fino, e informações em multinível

$$f^{k+1} \longleftrightarrow f_{MR}^{k+1} = \{f^{k_0}\} \cup \{d^{k_0}\} \cup \ldots \cup \{d^k\},$$

onde d^l contém a diferença de informação entre dois níveis consecutivos l e $l+1$. Nos casos tratados, os dados f^{k+1} são valores pontuais ou médias celulares em malhas irregulares do intervalo. Tipicamente estas malhas são esparsas e escolhidas de forma a que as funções em estudo possam ser representadas de uma maneira mais econômica, com poucos graus de liberdade.

Por outro lado, estão os esquemas de alta resolução para leis de conservação. Usando análise de multi-resolução de médias celulares em malhas irregulares adaptativas, apresentamos um algoritmo que permite acelerar os cálculos numéricos. Apresentamos resultados que demonstram a eficiência e a praticabilidade do esquema proposto. Aplicamos este esquema na simulação numérica em sistemas de equações que modelam técnicas de extração de óleo de reservatórios petrolíferos pela injeção de água com polímero.

ABSTRACT

Our objective in this work is twofold. On one hand we are interested on multiresolution analysis of data, that gives the relationship between the information $\{f^{k+1}\}$ at a finest level of resolution $k+1$ and a multilevel representation, that is, $\{f^{k_0}\} \cup \{d^{k_0}\} \cup \ldots \cup \{d^k\},\ k_0 \leq k$

$$f^{k+1} \longleftrightarrow f^{k+1}_{MR} \ = \ \{f^{k_0}\} \ \cup \ \{d^{k_0}\} \ \cup \ \ldots \ \cup \ \{d^k\},$$

where d^l contains the difference of information between consecutive levels l and $l+1$. For the cases considered here f^{k+1} are point values or cell averages on irregular meshes of the interval. Typically, these meshes are sparse and they are chosen in order to represent functions with few degrees of freedom.

On the other hand, we are interested on high resolution schemes for conservation laws. We use the multiresolution analysis for cell averages on adaptive meshes to accelerate the computations. For some model problems, we present results which show the feasibility and the efficiency of the method. We also apply the scheme to the numerical simulation of a system of equations arising in polymer-flooding of an oil reservoir.

Índice

Capítulo 1

Introdução

Em nosso trabalho visamos a construção de análises de multi-resolução em malhas irregulares de um intervalo e a aplicação de alguns destes conceitos na resolução numérica de leis de conservação hiperbólicas.

1.1 Histórico

Sobre Análises de Multi-resolução

Na análise matemática pura e aplicada um dos tópicos mais importantes e bem consolidados é a análise de Fourier. A integral e a série de Fourier são fundamentais em muitas áreas da Ciência e da Tecnologia, sugerem interpretações físicas significativas e possuem aspectos computacionais particularmente interessantes.

Recentemente outro tema, a análise wavelet, tem atraído a atenção dos pesquisadores. Assim como na análise de Fourier, existem em análise wavelet duas entidades importantes: a transformada wavelet contínua e a série de wavelets. A transformada wavelet contínua consiste do operador de convolução com funções básicas

$$\Psi_{ab}(x) = a^{-1/2}\Psi(a^{-1}(x-b))$$

obtidas por translações e dilatações de uma única função $\Psi(x)$, a wavelet mãe. Nas séries de wavelets estas funções básicas figuram apenas para um conjunto discreto de parâmetros de translação e dilatação.

Com escolhas apropriadas da wavelet mãe, a transformada wavelet permite uma análise de multi-resolução local tanto no domínio espacial quanto no domínio de frequências. Em cada função básica $\Psi_{ab}(x)$ a localização espacial é determinada pelo parâmetro de translação

b e a localização em frequência pelo parâmetro de escala a. Isto quer dizer, por exemplo, que para um sinal apresentando uma faixa de frequência somente durante um pequeno período de tempo, esta informação não é distribuida. Ela fica concentrada apenas naquelas wavelets cujos parâmetros a e b interferem com tais faixas de tempo e de frequência. Isto não acontece na análise de Fourier, que permite somente uma localização em frequência. Portanto, esta propriedade de dupla localização, combinada com algoritmos eficientes de análise (cálculo dos coeficientes da série de wavelets de uma determinada função) e síntese (reconstrução desta função a partir dos coeficientes) permite uma lista bastante extensa de possíveis aplicações da análise wavelet.

Em [4] Daubechies construiu wavelets mães de suporte compacto para obter uma base ortonormal para funções em $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$

$$f(x) \approx \sum_{j,k} d_j^k \Psi_j^k(x), \quad \Psi_j^k(x) = 2^{-k/2}\Psi(2^k x - j),$$

onde os coeficientes d_j^k, chamados coeficientes wavelet, são da forma

$$d_j^k = < f, \Psi_j^k > = \int f(x)\Psi_j^k(x)dx.$$

Os valores destes coeficientes são pequenos em regiões de suavidade. Ou seja, localmente estes coeficientes servem como uma caracterização da regularidade de uma função. Esta observação conduz à definição de um algorítmo de compressão de dados, em que os coeficientes d_j^k que estão abaixo de um certo parâmetro de tolerância são desprezados. Tipicamente os coeficientes significativos restantes estão associados a regiões de irregularidades da função. Nesse sentido o livro escrito por Albert Cohen [1] sugere muitos exemplos de aplicações.

Essa característica da análise wavelet de representar funções em termos de translações e dilatações de uma única função acarreta certas desvantagens. Por exemplo, ela faz com que surjam dificuldades em estender as wavelets a domínios limitados e com formas geométricas mais gerais. Diferentes técnicas podem ser utilizadas a fim de alcançar tal objetivo. Uma delas consiste em tentar adaptar as bases de uma análise de multi-resolução de $L^2(\mathbb{R})$ ao intervalo, mantendo as funções básicas do interior do intervalo e modificando aquelas que tem alguma interação com as fronteiras do intervalo. Esta idéia foi seguida por vários autores na construção de wavelets no intervalo [3] ou domínios limitados [2]. Um outro problema a ser considerado é a construcão de uma análise de multiresolução sobre uma malha não estruturada. Idéias semelhantes também foram utilizadas em [25] a fim de se construir tais análises de multi-resolução em malhas irregulares determinadas sob a chamada condição do cone, como as que provém da análise wavelet de funções que possuem uma singularidade isolada.

Em [14] Ami Harten introduziu uma nova maneira para a construção de wavelets. Ela é mais flexível, pois não usa a análise de Fourier, permitindo vários aprimoramentos da análise wavelet tradicional. A idéia básica é usar os conhecimentos de esquemas interpolatórios que podem facilmente ser adaptados a regiões com fronteira e não requerem uma malha estruturada. Com este novo enfoque também, é possível tratar esquemas de refinamento não lineares, como será visto neste trabalho. Esta, também, foi a idéia seguida por F. Plantevin em [24], onde ela considerou o caso particular de uma análise de multi-resolução para valores pontuais baseada em uma malha irregular satisfazendo a condição do cone na reta.

Sobre Leis de Conservação

Um outro assunto de interesse no nosso estudo tem a ver com a modelagem matemática de problemas que envolvem a conservação de quantidades que conduz a certos tipos de equações diferenciais parciais denominadas de leis de conservação. Na resolução destas equações surgem dificuldades específicas como o aparecimento de descontinuidades (choques). Isto faz com que seja particularmente difícil uma simulação numérica destas equações usando métodos convencionais. Por exemplo, métodos usuais de diferenças finitas ou elementos finitos, que fornecem bons resultados quando a solução é suave, podem ser desastrosos quando surgem descontinuidades. Nos últimos vinte anos, um enorme esforço tem sido feito na direção de desenvolver métodos numéricos que reproduzam fidedignamente as soluções descontínuas de leis de conservação. Os métodos que fornecem soluções aproximadas com bons resultados de aproximação têm sido chamados de esquemas de alta resolução. Tipicamente, são métodos de ordem 2 ou 3 em regiões de suavidade e livres de oscilação perto de descontinuidades. Os resultados numéricos são espetaculares em termos do poder de resolução mas o esforço computacional gasto no cálculo dos fluxos numéricos tende a ser tão espetacular quanto. Esta observação tem levado os pesquisadores a desenvolver um número de técnicas que visam a redução do esforço computacional.

Um dos trabalhos mais interessantes nesta direção é o trabalho pioneiro de Ami Harten [15], [16]. Em seus trabalhos, os esquemas de alta resolução são utilizados em conjunto com as técnicas da análise de multi-resolução. Supondo conhecidas as médias celulares da solução na malha regular mais fina, a idéia básica do esquema proposto por A. Harten é utilizar os coeficientes wavelets obtidos a partir da análise daquelas médias para detectar as regiões de suavidade da solução e indicar onde o fluxo numérico é calculado exatamente. Tipicamente, o número dos pontos onde isso ocorre é pequeno, havendo uma concentração maior próximo das singularidades, e são esparsos em regiões de suavidade. Fora destes pontos, o fluxo numérico é interpolado. Vale observar que nesses cálculos sempre são utilizadas as médias celulares da solução na escala mais fina.

1.2 Proposta desta Tese

A proposta de trabalho nesta tese foi inspirada nas idéias de A. Harten mencionadas acima. Ao identificarmos os pontos associados aos coeficientes wavelet significativos da solução numérica, temos como resultado uma malha esparsa em regiões de suavidade e refinada apenas onde necessário, próximo de irregularidades. No total, o número de pontos é bem reduzido comparado com o total de pontos da malha regular do nível mais fino. Ao invés de evoluir as médias celulares da malha regular do nível mais fino, o que propomos é evoluir as médias celulares das malhas adaptativas definidas pela análise de multi-resolução. Além disso, esperamos que o número de operações para realizar esta tarefa seja proporcional ao número de parâmetros envolvidos (isto é, número de células). Para alcançar tal objetivo, novas ferramentas são necessárias. Inicialmente, faz-se necessário a construção de algoritmos de multi-resolução eficientes para médias celulares em malhas irregulares. Neste sentido, é importante também que as malhas tenham uma estrutura de cone. Isto significa dizer que todas as informações necessárias para o cálculo dos coeficientes wavelet estão disponíveis, sem a necessidade de esforço computacional extra para obter tais informações.

No cálculo dos fluxos, usamos a idéia de um esquema adaptativo para diferenças finitas em malhas esparsas introduzido por Mats Holmströn [19], modificado para o contexto de médias celulares. Para cada célula usamos um fluxo numérico para malha uniforme com o passo do tamanho da célula. Caso as médias celulares vizinhas não estejam presentes, elas são obtidas pelo algorítmo de síntese do esquema de multi-resolução. Portanto, as análises de multi-resolução entram tanto na construção das malhas, quanto no cálculo do fluxo numérico para passar do contexto irregular para o regular, e vice-versa.

Cabe aqui ressaltar que as análises de multi-resolução são completamente independentes do tipo de equação ou problema que estamos resolvendo, bem como do esquema numérico utilizado. Ou seja, os métodos propostos podem ser classificados como do tipo híbrido. Por um lado, está um esquema numérico tradicional, como diferenças finitas ou volumes finitos. Por outro lado, está o esquema de multi-resolução, que é uma ferramenta usada para desenhar estratégias adaptativas.

1.3 Contribuições Originais deste Trabalho

Com relação aos tópicos mencionados acima, as contribuições originais deste trabalho possuem dois aspectos:

1. **Sobre as análises de multi-resolução.**

   (a) Combinação dos resultados de A. Harten e D. Donoho para um melhor entendimento dos aspectos discreto e funcional das análises de multi-resolução de valores pontuais e médias celulares em malhas regulares do intervalo. As contribuições de ambos os autores foram produzidas independentemente em diferentes contextos e divulgados em diferentes comunidades científicas.

   (b) Extensão destes resultados para o contexto de malhas irregulares do intervalo satisfazendo a condição do cone, segundo a linha proposta por F. Plantevin. Destacamos os Teoremas 3.1 e 3.2 que nos fornecem estimativas para o tamanho do suporte das funções básicas. Estes teoremas podem ser vistos como uma generalização de um teorema equivalente provado por Plantevin [24] para o suporte da função escala interpolatória em malhas irregulares da reta. As demonstrações também seguem a mesma linha proposta por Plantevin, mas novas dificuldades que aparecem próximo às fronteiras requerem um tratamento especial com o uso de novas técnicas.

2. **Sobre os esquemas de multi-resolução para leis de conservação.**

   (a) Desenvolvimento de um esquema totalmente adaptativo, combinando idéias de A. Harten e M. Holmströn.

   (b) Aplicação do esquema proposto na solução numérica de equações que modelam a injeção de certas substâncias num meio poroso.

1.4 Organização dos Capítulos

No primeiro capítulo descrevemos as análises de multi-resolução para valores pontuais e médias celulares em malhas regulares. Os resultados deste capítulo são uma combinação dos trabalhos desenvolvidos independentemente por A. Harten [14], [15], [16] e D. Donoho [9], [10].

No segundo capítulo, combinando as idéias de F. Plantevin [24] e o formalismo introduzido por A. Harten em [14], construímos análises de multi-resolução para valores pontuais e médias celulares associado a malhas irregulares.

No terceito capítulo construímos o esquema adaptativo para a resolução de leis de conservação em malha adaptativas. Esta construção é baseada nos esquemas de multi-resolução de A. Harten [15], [16], e no trabalho de M. Holmströn [19].

No quarto capítulo aplicamos o esquema proposto para calcular a solução numérica do problema de Buckley-Leverett e do sistema de equações que modela a injeção de água com polímero num reservatório de óleo.

No quinto capítulo apresentamos a conclusão de nosso trabalho e alguns trabalhos futuros que poderão advir a partir deste.

Capítulo 2

Análises de Multi-resolução - Conceitos Gerais e Exemplos Clássicos

Descrevemos neste capítulo análises de multi-resolução para valores pontuais e médias celulares sobre uma malha regular. Os resultados deste capítulo são uma combinação dos trabalhos desenvolvidos independentemente por Ami Harten [14], [15], [16] e David Donoho [9], [10]. Estes trabalhos foram desenvolvidos em diferentes contextos e divulgados em diferentes comunidades científicas. A construção destas análises e suas propriedades são fortemente utilizadas na construção de análises de multi-resolução sobre uma malha não regular do próximo capítulo. A principal ferramenta utilizada na definição de tais análises de multi-resolução são os esquemas interpolatórios. Eles são de nosso particular interesse pois não requerem uma malha estruturada e podem ser facilmente adaptados à fronteira de uma região.

2.1 Conceitos Gerais

Para definir os esquemas de multi-resolução, introduzimos os conceitos de operadores de discretização e reconstrução. Este formalismo foi sugerido por Ami Harten em [14].

Definição 2.1 *O operador de discretização $\mathcal{D}^k$ associa a cada função f valores discretos de f*

$$f \xmapsto{\mathcal{D}^k} f^k,$$

onde k é o nível de resolução.

Os valores de f^k, são usualmente associados a informações locais de f. Eles podem ser, por exemplo, valores pontuais ou médias celulares de f numa malha X^k. Neste capítulo trabalharemos com os operadores de discretização associados a malhas uniformes diádicas X^k do intervalo $\mathcal{I} = [0,1]$ que possuem $N_k = 2^k$ subintervalos de tamanho $h_k = 2^{-k}$, isto é,

$$X^k = \{\mu \in \mathcal{I} :\ \mu = jh_k,\ j = 0, \ldots N_k\}.$$

Portanto, $\{X^k\}$ é uma seqüência de malhas uniformes encaixadas $X^k \subset X^{k+1}$.

Uma questão importante é como obter um valor aproximado de $f(x)$, em qualquer ponto $x \in \mathcal{I}$, a partir do conhecimento de f^k. Isto nos conduz a definição do operador de reconstrução.

Definição 2.2 *O operador de reconstrução, $\mathcal{R}^k$, é um esquema de aproximação de $f(x)$ a partir dos valores discretos f^k*

$$f^k \xmapsto{\mathcal{R}^k} \mathcal{R}^k(x; f^k).$$

Podemos também usar o operador de reconstrução $\mathcal{R}^k(x; f^k)$ para aproximar os valores discretos de f num nível de resolução mais fino

$$f^{k+1}_\mu \sim \left[\mathcal{D}^{k+1}\mathcal{R}^k(x; f^k)\right]_\mu.$$

Para $\mu \in X^{k+1} \setminus X^k$ definimos d^k_μ como o erro nesta aproximação

$$d^k_\mu = f^{k+1}_\mu - \left[\mathcal{D}^{k+1}\mathcal{R}^k(x; f^k)\right]_\mu.$$

Ou seja, os valores d^k_μ, $\mu \in X^{k+1} \setminus X^k$ medem a diferença de informação entre os níveis k e $k+1$. Os coeficientes d^k_μ são chamados de *coeficientes wavelet*.

Neste trabalho, consideramos esquemas de aproximação $\{\mathcal{D}^k, \mathcal{R}^k\}$, definidos pelos pares de operadores de discretização e reconstrução, que sejam *conservativos*. Isto quer dizer que a discretização da reconstrução reproduz as informações iniciais, ou seja,

$$\mathcal{D}^k[\mathcal{R}^k(.; f^k)] = f^k.$$

2.1.1 Aspecto Discreto

Nosso interesse é conhecer as relações entre as informações $\{f^{k+1}\}$ no nível mais fino $k+1$ e as informações em multinível $\{f^k\} \cup \{d^k\}$. De modo geral, se $k_0 \leq k$ é um nível mais grosso, queremos saber como relacionar

$$f^{k+1} \xrightarrow{T^{k+1}} f^{k+1}_{MR} = \{f^{k_0}\} \cup \{d^{k_0}\} \cup \ldots \cup \{d^k\}. \tag{2.1}$$

Este processo é chamado de <u>*análise*</u>.

Gostaríamos que este tipo de transformação, satisfaça as seguintes propriedades.

1. O volume de dados deve ser preservado: $\sharp f^{k+1} = \sharp f^k + \sharp d^k$

2. T^{k+1} deve ser invertível: a informação na escala mais fina pode ser recuperada a partir dos dados em multiescala. $(T^{k+1})^{-1}$ é chamada de <u>*síntese.*</u>

3. Ambas as transformações, análise e síntese, são executadas por algoritmos eficientes.

4. Os algoritmos devem ser estáveis. Isto significa dizer que pequenas pertubações nos dados não são amplificadas.

5. As diferenças de informação representadas por d^k_μ são pequenas em regiões suaves e significativas perto das singularidades de f.

Observemos que se o operador de reconstrução for um esquema de aproximação local, no sentido que para calcular $\mathcal{R}^k(x; f^k)$ usamos somente a informação de f^k perto de x, e se $\mathcal{R}(x; f^k) = f(x) + O(h^r_k)$, onde $f(x)$ é uma função suave e r é a ordem de precisão nesta aproximação, então a propriedade 5 será satisfeita.

A fim de definirmos completamente o operador T^{k+1} por cálculos iterativos de $d^l, l \leq k$, devemos ter um procedimento para calcular f^l a partir do conhecimento de f^{l+1}. Reciprocamente, para definirmos completamente $(T^{k+1})^{-1}$ devemos determinar um modo de obter f^{l+1}_μ, $\mu \in X^l$ a partir do conhecimento de f^l e de d^l. Como descreveremos mais adiante, estas duas tarefas são facilmente realizadas para valores nodais e médias celulares.

2.1.2 Aspecto Funcional

Suponhamos definidas as transformações de multínivel T^{k+1} e $(T^{k+1})^{-1}$ através de operadores lineares de discretização e de reconstrução.

Definição 2.3 *Para $\mu \in X^k$, definimos a função escala $\phi^k_\mu(x)$, como a reconstrução,*

$$\phi^k_\mu(x) = \mathcal{R}^k(x; \delta_{\mu,\nu}),$$

onde $\delta_{\mu,\nu} = 1$ se $\nu = \mu$ e $\delta_{\mu,\nu} = 0$ se $\nu \neq \mu$. Denotamos por V^k, o espaço gerado por ϕ^k_μ, $\mu \in X^k$. Ou seja, uma função $f \in V^k$ se, e somente se,

$$f(x) = \sum_{\mu \in X^k} f^k_\mu \phi^k_\mu(x) = \mathcal{R}^k(x; f^k).$$

Definição 2.4 *Para $\mu \in X^{k+1} \setminus X^k$, seja $\tilde{f}^{k+1}$ a seqüência obtida a partir da síntese de $f^k(\nu) = 0,\ \nu \in X^k$ e $d^k_\nu = \delta(\mu - \nu),\ \nu \in X^{k+1} \setminus X^k$. Definimos a função wavelet, $\psi^k_\mu(x)$, como a reconstrução de $\tilde{f}^{k+1}$*

$$\psi^k_\mu(x) = \mathcal{R}^{k+1}(x; \tilde{f}^{k+1}).$$

Denotamos por W^k o espaço gerado por $\psi^k_\mu(x),\ \mu \in X^{k+1} \setminus X^k$.

Em análise wavelet a idéia é ter

$$\sum_{\mu \in X^{k+1}} f^{k+1}_\mu \phi^{k+1}_\mu(x) = \sum_{\mu \in X^k} f^k_\mu \phi^k_\mu(x) + \sum_{\mu \in X^{k+1} \setminus X^k} d^k_\mu \psi^k_\mu(x), \tag{2.2}$$

de tal forma que V^{k+1} seja soma direta dos espaços V^k e W^k.

$$V^{k+1} = V^k + W^k.$$

De modo geral, se $k_0 < k$, iterando a expressão (2.2) obtemos a expressão em multinível

$$\sum_{\mu \in X^{k+1}} f^{k+1}_\mu \phi^{k+1}_\mu(x) = \sum_{\mu \in X^{k_0}} f^{k_0}_\mu \phi^{k_0}_\mu(x) + \sum_{k_0 \leq l \leq k} \sum_{\mu \in X^{l+1} \setminus X^l} d^l_\mu \psi^l_\mu(x), \tag{2.3}$$

que corresponde à soma direta

$$V^{k+1} = V^{k_0} + W^{k_0} + \ldots + W^k.$$

Deste ponto de vista, as transformações em multinível T^{k+1} e $(T^{k+1})^{-1}$ são mudanças entre a base de um nível e a base de multinível, e vice-versa, isto é,

$$\{\phi^{k+1}_\mu(x) :\ \mu \in X^{k+1}\} \leftrightarrow \{\phi^{k_0}_\mu(x) :\ \mu \in X^{k_0}\} \cup_{l=k_0}^{k} \{\psi^l_\mu(x) :\ \mu \in X^{l+1} \setminus X^l\}. \tag{2.4}$$

Para que os conceitos sobre análise de multi-resolução, a serem descritos com mais detalhes na próxima seção, fiquem mais claros, introduzimos aqui um exemplo simples.

Discretizamos uma função f por seus valores pontuais $f^k_\mu = f(\mu)$ nos pontos da malha X^k, e definimos

$$I^k(x; f^k) = \sum_{\mu \in X^k} f^k_\mu \phi^k_\mu(x),$$

onde $\{\phi^k_\mu(x), \mu \in X^k\}$ é a base interpolatória do espaço

$$V^k = \{g \in C[0,1] :\ g \text{ é linear por partes em } X^k\}.$$

Ou seja, $\phi^k_\mu \in V^k$ e $\phi^k_\mu(\nu) = \delta_{\mu,\nu}$. Observamos que o operador de interpolação $I^k(x; f^k)$ desempenha o papel do operador de reconstrução conservativo.

Para $\nu = (2j-1)2^{-k-1} \in X^{k+1} \setminus X^k$ seja $\tilde{f}^{k+1}_\nu = I^k(\nu; f^k)$. Isto é,

$$\tilde{f}^{k+1}_\nu = \frac{f(\nu^-) + f(\nu^+)}{2},$$

onde $\nu^- = (j-1)2^{-k}$ e $\nu^+ = j2^{-k}$, são os dois vizinhos mais próximos de ν em X^k. O coeficiente wavelet

$$d^k_\nu = f^{k+1}_\nu - \tilde{f}^{k+1}_\nu, \quad \nu \in X^{k+1} \setminus X^k,$$

é o erro nesta interpolação linear. Na Figura 2.1 ilustramso esse processo.

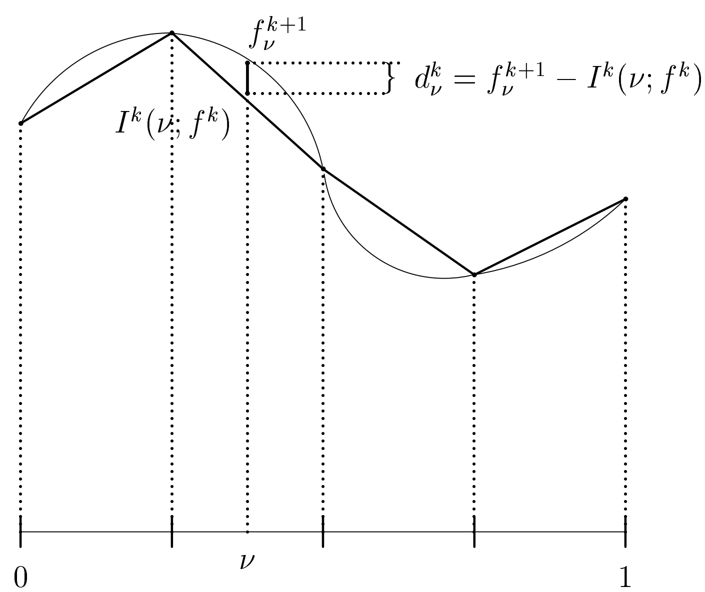


Figura 2.1: Análise de Multi-resolução Interpolatória

De acordo com o formalismo proposto por A. Harten, o algoritmo de análise para este exemplo é dado por

Para $l = k, k-1, \ldots, k_0$ *façamos*
Para $j = 0, \ldots, N_l$, *calculamos*

$$f^l_j = f^{l+1}_{2j}$$

$$d_j^l = f_{2j-1}^{l+1} - \tilde{f}_{2j-1}^{l+1}.$$

A operação inversa de síntese é definida pelos seguintes cálculos:

Para $l = k_0, \ldots, k$ *façamos*
Para $j = 0, \ldots, N_l$

$$\begin{aligned} f_{2j}^{l+1} &= f_j^l \\ f_{2j-1}^{l+1} &= \tilde{f}_{2j-1}^{l+1} + d_j^l. \end{aligned}$$

Pela Definição 2.4, é fácil ver que os espaços W^k são gerados pelas wavelets $\psi_\mu^k(x) = \phi_\mu^{k+1}(x)$. Na Figura 2.2 ilustramos a relação de mudança de base (2.2).

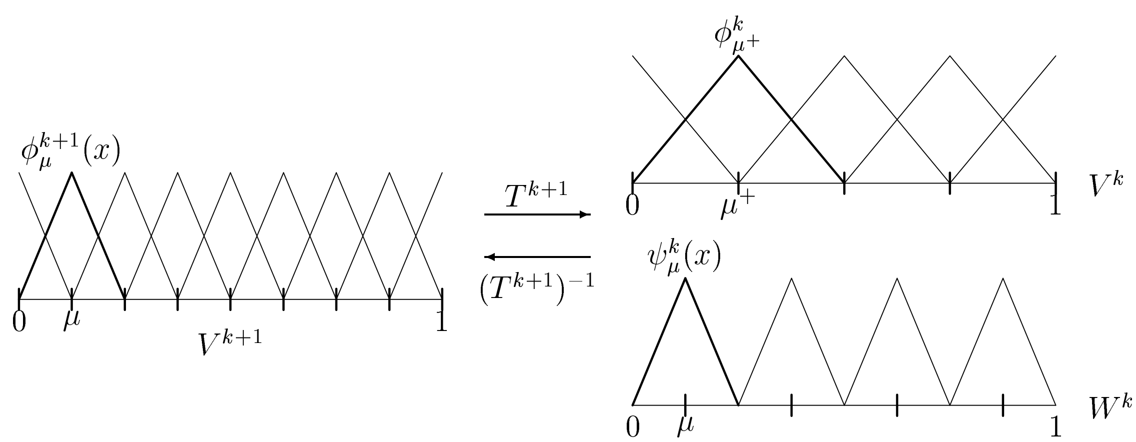


Figura 2.2: Mudança de Base

2.2 Análise de Multi-resolução Interpolatória

Consideremos discretizações f^k de valores pontuais de f nos pontos da malha X^k. Nosso objetivo é construir uma análise de multi-resolução para f^k.

2.2.1 Discretização

Neste caso $(\mathcal{D}^k f)_\mu = f^k_\mu$ são os valores pontuais de uma função f na malha X^k,

$$f^k_\mu = f(\mu).$$

2.2.2 Reconstrução

Um operador de reconstrução conservativo para valores pontuais $I^k(x; f^k)$ deve interpolar f em X^k

$$I^k(\mu; f^k) \quad = \quad f^k_\mu, \ \ \forall \mu \in X^k.$$

A definição do operador de reconstrução interpolatório $I^k(x; f^k)$ será feita em duas etapas. A etapa principal consiste na definição de $I^k(\nu; f^k)$ para os diádicos $\nu \in \cup_l X^l$. Em uma segunda etapa definimos $I^k(x; f^k)$ para os pontos não diádicos por limite.

Primeira Etapa

O principal ingrediente na definição de $I^k(x; f^k)$ para x diádico é um operador de refinamento interpolatório P^{k+1}_k.

Definição 2.5 *Seja $s^l = (s^l(\mu))$ e $s^{l+1} = (s^{l+1}(\mu))$ seqüências indexadas pelos pontos $\mu \in X^l$ e $\mu \in X^{l+1}$, respectivamente. O operador de refinamento interpolatório $P^{l+1}_l s^l$ atua sobre s^l fornecendo como resultado uma seqüência s^{l+1} tal que $s^{l+1}(\mu) = s^l(\mu)$, se $\mu \in X^l$.*

Uma vez tendo em mãos um esquema de refinamento, passamos então à definição de $I^k(x; f^k)$ nos diádicos.

Definição 2.6 *Dados os valores pontuais, f^k_μ, $\mu \in X^k$, definimos*

1. *Para $\nu \in X^k$*
$$I^k(\nu; f^k) = s^k(\nu) = f^k_\nu.$$

2. *Para $\nu \in X^{l+1}$, $l \geq k$,*
$$I^k(\nu; f^k) = s^{l+1}(\nu) = P^{l+1}_l s^l(\nu).$$

Temos particular interesse no esquema de refinamento por interpolação polinomial centrada de Lagrange descrito por Deslauries e Dubuc [6], [7]. Isto é, dado um número par M, para estimar o valor de $s^{l+1}(\mu)$ em $\mu \in X^{l+1} \setminus X^l$ a partir dos valores $s^l(\nu)$, $\nu \in X^l$, usamos o polinômio de grau $M-1$ que interpola s^l nos M pontos de X^l centrados em μ. Para pontos μ perto da fronteira do intervalo modificamos o algoritmo de Deslauries e Dubuc usando agora os pontos da malha X^l mais próximos de μ para definir o polinômio interpolador. Esta é a única modificação necessária para adaptar este algoritmo ao intervalo. A seguir damos mais detalhes deste esquema.

Descrição do esquema de refinamento por interpolação polinomial

Vamos assumir que $N_{k_0} = 2^{k_0} > 2M$. Isto é feito para que não exista interação entre as fronteiras do intervalo.

Seja $\mu = (2j-1)2^{-l-1} \in X^{l+1} \setminus X^l$, $l \geq k_0$. Definimos o valor de $s^{l+1}(\mu)$, por

$$s^{l+1}(\mu) = p(\mu), \tag{2.5}$$

onde p é o polinômio de grau $M-1$ que satisfaz

$$p(\nu) = s^l(\nu), \;\; \nu \in S^l_\mu$$

em que os pontos de interpolação ν variam num subconjunto $S^l_\mu \subset X^l$. Dependendo da posição de μ em X^{l+1}, S^l_μ é de uma das seguintes formas

1. Para μ próximo do extremo inferior do intervalo: $0 < j \leq M/2 - 1$. Neste caso

   $$S^l_\mu = \{\nu_m = m2^{-l} : \; 0 \leq m \leq M-1\}, \tag{2.6}$$

   e,

   $$p(\mu) = \sum_{m=0}^{M-1} s^l(\nu_m) c_{j,m}, \tag{2.7}$$

   onde

   $$c_{j,m} = \prod_{n=0,\, n\neq m}^{M-1} \frac{2j-2n-1}{2m-2n}. \tag{2.8}$$

2. Para μ longe dos extremos do intervalo: $M/2 - 1 < j \leq 2^l - (M/2-1)$. Neste caso

   $$S^l_\mu = \{\nu_m = m2^{-l} : \; j - M/2 \leq m \leq j + M/2 - 1\}, \tag{2.9}$$

e,

$$p(\mu) = \sum_{m=0}^{M/2-1} c_{j,m}(s^l(\nu_{j+m}) + s^l(\nu_{j-m-1})), \tag{2.10}$$

onde

$$c_{j,m} = \frac{1}{2^{M-1}} \prod_{n=-M/2,\, n\neq m}^{M/2-1} \frac{2n+1}{n-m}. \tag{2.11}$$

3. Para μ próximo a fronteira superior do intervalo: $2^l - (M/2-1) < j \leq 2^l$. Neste caso

$$S_\mu^l = \{\nu_m = m2^{-l} :\ 2^l - (M-1) \leq m \leq 2^l\}, \tag{2.12}$$

e,

$$p(\mu) = \sum_{m=2^l-M+1}^{2^l} s^l(\nu_m) c_{j,m}, \tag{2.13}$$

onde

$$c_{j,m} = \prod_{n=2^l-M+1,\, n\neq m}^{2^l} \frac{2j-2n-1}{2m-2n}. \tag{2.14}$$

Observemos que

1. Os coeficientes $c_{j,m}$ não dependem do nível l de resolução.
2. Para os pontos μ que estão longe dos extremos do intervalo, $c_{j,m} = c_m$, isto é, estes coeficientes não dependem do ponto μ. O que não ocorre com aqueles que estão próximos dos extremos, e portanto, dependem de μ.
3. Os valores $c_{j,m}$ em (2.8) são os mesmos de (2.14) com a ordem invertida.

Na Tabela 2.1 fornecemos os coeficientes $c_{j,m}$ quando μ está no centro do intervalo e na Tabela 2.2 esses valores são fornecidos de acordo a posição de μ em X^{l+1} em relação a fronteira inferior do intervalo $[0, 1]$.

Segunda Etapa

A definição de $I^k(x; f^k)$ para x não diádico por um processo de limite, requer que o esquema de refinamento seja convergente.

M	c_0	c_1	c_2
2	1/2		
4	9/16	-1/16	
6	150/256	-25/256	3/256

Tabela 2.1: Valores de $c_{j,m},\ m = 0, \ldots, M/2 - 1$ quando μ está no centro do intervalo $\mathcal{I}$

M	j	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
2	1	1/2					
4	1	5/16	15/16	-5/16	1/16		
6	1	63/256	315/256	-105/128	63/128	-45/256	7/256
	2	-7/256	105/256	105/128	-35/128	21/256	-3/256

Tabela 2.2: Valores de $c_{j,m},\ m = 0, \ldots M - 1$ quando μ está próximo a fronteira inferior

Definição 2.7 *Dizemos que um esquema de refinamento P_l^{l+1} é convergente se para qualquer seqüência inicial $s^k(\mu)$ existe uma função contínua $I^k(x; s^k)$ tal que para as seqüências $s^{l+1} = P_l^{l+1} s^l,\ l \geq k$*

$$\lim_{l \to +\infty} \left\{ \sup_{\mu \in X^{l+1},\, l \geq k} |s^{l+1}(\mu) - I^k(\mu; s^k)| \right\} = 0.$$

Seja $\tilde{P}_l^{l+1} \tilde{s}^l$ o esquema de refinamento interpolatório centrado de Lagrange, desenvolvido por Deslauries e Dubuc, definido para seqüências $\tilde{s}^l(\nu)$ indexadas por $\nu = \nu_j^k = j2^{-k},\ j \in \mathbb{Z}$,

$$\tilde{P}_l^{l+1} \tilde{s}^l(\nu) = \begin{cases} \tilde{s}^l(\nu), & j \text{ par} \\ p(\nu), & j \text{ impar}, \end{cases}$$

onde p é dado pela fórmula (2.10).

Sabe-se por [6], [7], [11] que

1. O esquema é convergente (denotamos por $\tilde{I}^k(x; \tilde{s}^k)$ o operador de reconstrução associado).

2. Partindo da seqüência $\tilde{s}^0(j) = \delta_{j0}$, a função limite $\tilde{\phi}(x) = \tilde{I}^0(x; \delta_{j0})$, satisfaz

   (a) $\tilde{\phi}(x)$ é interpolatória,

   $$\tilde{\phi}(j) = \delta_{jo}.$$

(b) $\tilde{\phi}(x)$ é simétrica em relação a $x = 0$,

$$\tilde{\phi}(x) = \tilde{\phi}(-x).$$

(c) $\tilde{\phi}(x)$ possui suporte no intervalo $[-M+1, M-1]$.

(d) $\tilde{\phi}(x)$ satisfaz a relação de refinamento

$$\tilde{\phi}(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{\phi}\left(\frac{j}{2}\right) \tilde{\phi}(2x - j).$$

(e) $\tilde{\phi}(x)$ e suas transladadas $\tilde{\phi}(x - j)$ reproduzem os polinômios de grau menor ou igual a $M - 1$, isto é, todo polinômio de grau menor ou igual a $M - 1$ pode ser escrito como combinação linear de $\tilde{\phi}$ e suas transladadas.

$$x^n = \sum_j j^n \phi(x - j), \; n = 0, \ldots, M - 1.$$

(f) Em geral, a regularidade de $\tilde{\phi}(x)$ aumenta com M. Para o caso em que $M = 4$, $\tilde{\phi}(x)$ é pelo menos C^1. Se $M = 6$ então $\tilde{\phi}(x)$ é pelo menos C^2. Maiores detalhes em [5],[9].

3. Seja $\tilde{s}^k(\nu)$ a seqüência inicial no nível k. A partir do esquema de refinamento centrado de Lagrange a função limite $\tilde{I}(x; \tilde{s}^k)$, é dada por

$$\tilde{I}^k(x; \tilde{s}^k) = \sum_j \tilde{s}^k(\nu_j^k) \tilde{\phi}_j^k(x), \tag{2.15}$$

onde $\tilde{\phi}_j^k(x) = \tilde{\phi}(2^k(x - \nu))$. Observe que devido a sua definição $\tilde{\phi}_j^k(x)$ herda as propriedades de $\tilde{\phi}(x)$.

Utilizando o fato que $\tilde{P}_l^{l+1}$ é convergente podemos demonstrar que o refinamento interpolatório no intervalo P_l^{l+1} é convergente. Este resultado foi demonstrado com poucos detalhes em [9]. Por isso incluímos aqui uma demonstração mais detalhada.

Teorema 2.1 *O esquema de refinamento interpolatório P_l^{l+1} no intervalo $\mathcal{I}$ é convergente.*

Demonstração: Seja $s^k(\nu), \; \nu \in X^k$, uma seqüência inicial, no nível k e seja $s^{l+1} = P_l^{l+1} s^l$, $l \geq k$. Para provarmos que o esquema é convergente, inicialmente construímos a extensão

$\tilde{s}^k(\nu)$ a todos os pontos $\nu = m2^{-k},\ m \in \mathbb{Z}$

$$\tilde{s}^k(\nu) = \begin{cases} p_e^{k+1}(\nu), & \text{se } m < 0 \\ s^k(\nu), & \text{se } 0 \leq m \leq 2^k \\ p_d^{k+1}(\nu), & \text{se } m > 2^k, \end{cases} \tag{2.16}$$

onde $p_e^{k+1}(x)$ e $p_d^{k+1}(x)$ são os polinômios de grau menor ou igual a $M-1$ satisfazendo respectivamente

$$\begin{aligned} p_e^{k+1}(\mu) &= s^k(\mu),\ \mu = m2^{-k},\ m = 0, \ldots, M-1, \\ p_d^{k+1}(\mu) &= s^k(\mu),\ \mu = m2^{-k},\ m = 2^k-(M-1), \ldots, 2^k. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Para $l \geq k$, seja $\tilde{s}^{l+1} = \tilde{P}_l^{l+1}\tilde{s}^l$. Podemos provar que $\tilde{s}^{l+1}(\nu) = p_e^{k+1}(\nu)$ para todo $\nu = m2^{-l-1},\ m \leq M-1$ e que $\tilde{s}^{l+1}(\nu) = p_d^{k+1}(\nu)$ para todo $m \geq 2^{-l-1}-(M-1)$. Por definição isto é verdadeiro para $\tilde{s}^k$. E, segue por indução nos demais casos.

Como o esquema de refinamento $\tilde{P}_l^{l+1}$ é convergente, para provarmos que P_l^{l+1} também é convergente, basta demonstrarmos que as seqüências s^l e $\tilde{s}^l,\ l \geq k$ coincidem nos pontos de X^l. Vamos provar isto por indução. Suponhamos então que $\tilde{s}^l(\nu) = s^l(\nu),\ \nu \in X^l$. Queremos ver que se isto for verdadeiro, então também o será para $l+1$. Isto é imediato para $\nu = m2^{-l-1}$ com m par. Para m ímpar, $m = 2j-1$, é preciso distinguir os pontos interiores daqueles próximos à fronteira.

Para os pontos interiores $\nu = m2^{-l-1},\ M-1 \leq m \leq 2^{-l-1}-M+1$, tanto $\tilde{s}^{l+1}(\nu)$ quanto $s^{l+1}(\nu)$ são obtidos por interpolação em ν usando o mesmo estêncil de pontos $S_\nu^l \subset X^l$ centrado em ν. Como pela hipótese de indução, $\tilde{s}^l(\mu)$ e $s^l(\mu)$ coincidem neste estêncil segue que $\tilde{s}^{l+1}(\nu) = s^{l+1}(\nu)$.

Vejamos agora o caso em que ν está próximo da fronteira esquerda, isto é, $\nu = m2^{-l-1}$ com $0 < m \leq M-1$. Agora, $s^{l+1}(\nu) = p(\nu)$ e $\tilde{s}^{l+1}(\nu) = \tilde{p}(\nu)$ onde os polinômios interpoladores p e $\tilde{p}$ usam diferentes estênceis para a interpolação. No entanto, os valores interpolados provém do mesmo polinômio p_e^{k+1}. Conseqüentemente, $p = \tilde{p} = p_e^{k+1}$ e resulta que $\tilde{s}^{l+1}(\nu) = s^{l+1}(\nu)$.

O mesmo argumento pode ser usado para os pontos ν próximos à fronteira direita. $\square$

Uma vez definidos os operadores de discretização e reconstrução interpolatórios, estamos aptos a estabelecer as relações entre as informações entre o nível mais fino $k+1$ e as informações em multinível tanto do ponto de vista discreto quanto funcional conforme Seções 2.1.1 e 2.1.2.

2.2.3 Aspecto Discreto

Para definirmos precisamente o operador T^{k+1} e sua inversa devemos definir a diferença de informação entre um nível e outro. Para $\mu \in X^{l+1} \setminus X^l$, $I^l(\mu; f^l)$ representa um valor aproximado de f^{l+1}_μ. Portanto, a diferença de informação entre o nível l e $l+1$ pode ser descrita pelo erro de interpolação, que denotamos por d^l_μ

$$d^l_\mu = f^{l+1}_\mu - I^l(\mu, f^l),\ \ \mu \in X^{l+1} \setminus X^l.$$

Tendo em vista esta observação definimos a seguir os algoritmos de análise e síntese.

- **Análise** - $f^{k+1} \rightarrow (f^{k_0}, d^{k_0}, \dots d^k)$
  Para $l = k, k-1, \dots, k_0$ *façamos*
  – *Para* $\mu \in X^l$

$$f^l_\mu \quad = \quad f^{l+1}_\mu$$

  – *Para* $\mu \in X^{l+1} \setminus X^l$, *calculamos*

$$d^l_\mu = f^{l+1}_\mu - I^l(\mu; f^l).$$

- **Síntese** - $(f^{k_0}, d^{k_0}, \dots, d^k) \rightarrow f^{k+1}$
  Para $l = k_0, \dots, k$ *façamos*
  - *Para* $\mu \in X^l$

$$f^{l+1}_\mu = f^l_\mu$$

  - *Para* $\mu \in X^{l+1} \setminus X^l$ *calculamos*

$$f^{l+1}_\mu = I^l(\mu; f^l) + d^l_\mu.$$

2.2.4 Aspecto Funcional

Para a caracterização do operador T^{k+1} do ponto de vista funcional vamos primeiramente definir as funções escala e wavelet em termos do operador de reconstrução.

Funções Escala

Para cada $\mu \in X^k$, definimos a função escala interpolatória $\phi_\mu^k(x)$ por

$$\phi_\mu^k(x) = I^k(x; \delta_{\mu\nu}),$$

e seja V^k o espaço gerado por $\phi_\mu^k,\ \mu \in X^k$.

Conforme a localização de μ em X^k obtemos as seguintes expressões para as funções escala.

1. Próximo ao extremo inferior do intervalo: $0 \leq \mu \leq (M-1)2^{-k}$,

$$\phi_\mu^k(x) = \tilde{\phi}_\mu^k(x) + \sum_{\nu<0,\ \nu=j2^{-k}} L_\mu^e(\nu)\tilde{\phi}_\nu^k(x), \tag{2.18}$$

   onde $L_\mu^e(x)$ é o polinômio de Lagrange que satisfaz

$$L_\mu^e(\nu) = \begin{cases} 1, & \nu = \mu \\ 0, & \nu \neq \mu, \end{cases}$$

   $\nu \in X^k,\ 0 \leq \nu \leq (M-1)2^{-k}$.

2. No centro do intervalo: $(M-1)2^{-k} < \mu < 1-(M-1)2^{-k}$,

$$\phi_\mu^k(x) = \tilde{\phi}_\mu^k(x). \tag{2.19}$$

3. Próximo ao extremo superior do intervalo: $1-(M-1)2^{-k} \leq \mu \leq 1$,

$$\phi_\mu^k(x) = \tilde{\phi}_\mu^k(x) + \sum_{\nu>1,\ \nu=j2^{-k}} L_\mu^d(\nu)\tilde{\phi}_\nu^k(x), \tag{2.20}$$

   onde $L_\mu^d(x)$ é o polinômio de Lagrange que satisfaz

$$L_\mu^d(\nu) = \begin{cases} 1, & \nu = \mu \\ 0, & \nu \neq \mu. \end{cases}$$

   $\nu \in X^k,\ 1-(M-1)2^{-k} \leq \nu \leq 1$,

Donoho em [9] provou que $\phi_\mu^k(x)$ possui as seguintes propriedades

1. *Interpolatória*: $\phi^k_\mu(\nu) = \delta_{\mu\nu},\ \mu,\ \nu \in X^k$. Notemos que em termos da distribuição de Dirac $\delta^k_\nu(x) = \delta(x-\nu)$, esta condição pode ser escrita

$$< \delta^k_\nu, \phi^k_\mu >= \int_0^1 \phi^k_\mu(x)\delta(x-\nu)dx = \phi^k_\mu(\nu) = \delta_{\mu\nu}.$$

   δ^k_ν é chamada de dual de ϕ^k_μ.

2. *Regularidade*: ϕ^k_μ herda a regularidade de $\tilde{\phi}(x)$, que aumenta com M. Por exemplo, para $M=4$, $\phi^k_\mu(x)$ é pelo menos C^1 e, para $M=6$, $\phi^k_\mu(x)$ é pelo menos C^2.

3. *Relação de Escala*:

$$\phi^k_\mu(x) = \sum_{\nu \in X^{k+1}} \phi^k_\mu(\nu)\phi^{k+1}_\nu(x),$$

   onde $\phi^k_\mu(\nu) = \delta_{\mu\nu}$ se $\nu \in X^k$ e $\phi^k_\mu(\nu) = c_{\nu\mu}$ se $\nu \in X^{k+1} \setminus X^k$ onde $c_{\nu\mu}$ são os coeficientes em (2.8), (2.11) e (2.14). Da relação de escala segue que $V^k \subset V^{k+1}$.

4. *Simetria*: Para $(M-1)2^{-k} < \mu < 1-(M-1)2^{-k}$, $\phi^k_\mu(x) = \tilde{\phi}^k_\mu(x)$ é simétrica em relação a reta $x=\mu$

$$\phi^k_\mu(\mu+x) = \phi^k_\mu(\mu-x).$$

5. *Suporte*: Seja $\mu \in X^k$.

   (a) Se $0 \le \mu \le (M-1)2^{-k}$, o suporte de $\phi^k_\mu(x)$ é igual a

$$[0, \mu+(M-1)2^{-k}].$$

   (b) Se $(M-1)2^{-k} < \mu < 1-(M-1)2^{-k}$, o suporte de $\phi^k_\mu(x)$ é igual a

$$[\mu-(M-1)2^{-k}, \mu+(M-1)2^{-k}].$$

   (c) Se $1-(M-1)2^{-k} \le \mu \le 1$, o suporte de $\phi^k_\mu(x)$ é igual a

$$[\mu-(M-1)2^{-k}, 1].$$

6. *Reprodução de Polinômios*: Os polinômios de grau menor ou igual a $M-1$ são reproduzidos por $\phi^k_\mu(x),\ \mu \in X^k$. Mais precisamente,

$$x^n = \sum_{\mu \in X^k} \mu^n \phi^k_\mu(x),\ n = 0, 1, \ldots, M-1.$$

Funções Wavelet

Seja $\mu \in X^{k+1} \setminus X^k$. A seqüência $\tilde{f}_\nu^{k+1}$, $\nu \in X^{k+1}$, obtida a partir da síntese de $f_\nu^k = 0$ se $\nu \in X^k$ e $d_\nu^k = \delta_{\nu\mu}$ se $\nu \in X^{k+1} \setminus X^k$, é exatamente igual à seqüência $\tilde{f}_\nu^{k+1} = \delta_{\nu\mu}$. Portanto, conforme Definição 2.4, a função wavelet é dada por

$$\psi_\mu^k(x) = \phi_\mu^{k+1}(x).$$

Definimos W^k como o espaço gerado por $\psi_\mu^k(x)$, $\mu \in X^{k+1} \setminus X^k$.

A distribuição $\psi_\mu^{*k}(x)$ definida pela expressão

$$\psi_\mu^{*k}(x) = \delta(x-\mu) - \sum_{\nu \in X^k} \phi_\nu^k(\mu)\delta(x-\nu)$$

é chamada de *função dual* de $\psi_\mu^k(x)$ pois $< \psi_\nu^{*k}, \psi_\mu^k >= \delta_{\mu\nu}$. Esta função possui algumas propriedades interessantes que são:

1. $$\int_0^1 x^n \psi_\mu^{*k}(x)dx = 0, \quad n = 0, \ldots, M-1. \tag{2.21}$$

   Esta propriedade é conseqüência imediata da definição de $\psi_\mu^{*k}(x)$ e da propriedade de reprodução polinomial (6).

2. Os coeficientes wavelet d_μ^k podem ser escritos em termos de $\psi_\mu^{*k}(x)$, isto é,

   $$d_\mu^k =< \psi_\mu^{*k}, f > . \tag{2.22}$$

Como conseqüência imediata das propriedades (2.21) e (2.22) obtemos que se $f(x)$ for um polinômio de grau menor ou igual a $M-1$, $d_\mu^k = 0$ para todo $\mu \in X^{k+1} \setminus X^k$.

Caracterizemos o operador T^{k+1} em termos das bases $\{\phi_\mu^{k+1} : \mu \in X^{k+1}\}$ e $\{\phi_\mu^k : \mu \in X^k\} \cup \{\psi_\mu : \mu \in X^{k+1} \setminus X^k\}$.

Dada uma função $f(x) \in V^{k+1}$,

$$f(x) = \sum_{\mu \in X^{k+1}} f_\mu^{k+1}\phi_\mu^{k+1}(x),$$

consideremos a função $g(x) \in V^{k+1}$ definida por

$$g(x) = \sum_{\mu \in X^k} f_\mu^k \phi_\mu^k(x) + \sum_{\mu \in X^{k+1} \setminus X^k} d_\mu^k \psi_\mu^k(x).$$

Vamos mostrar que $f(x) = g(x)$. Como ambas as funções estão em V^{k+1} é suficiente mostrar que elas coincidem em X^{k+1}.

1. Para $\nu \in X^k$, $\psi_\mu^k(\nu) = 0$ para todo $\mu \in X^{k+1} \setminus X^k$. Portanto,

$$g(\nu) = f_\nu^k = f_\nu^{k+1} = f(\nu).$$

2. Para $\nu \in X^{k+1} \setminus X^k$, $\psi_\mu^k(\nu) = \delta_{\nu\mu}$. Logo,

$$g(\nu) = I^k(\nu; f^k) + d_\nu^k = f_\nu^{k+1} = f(\nu).$$

Concluimos então que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathcal{I}$ e, logo vale a igualdade

$$\sum_{\mu \in X^{k+1}} f_\mu^{k+1} \phi_\mu^{k+1}(x) = \sum_{\mu \in X^k} f_\mu^k \phi_\mu^k(x) + \sum_{\mu \in X^{k+1} \setminus X^k} d_\mu^k \psi_\mu^k(x). \tag{2.23}$$

Ou seja, V^{k+1} é soma direta dos espaços V^k e W^k

De modo geral, se $k_0 < k$, iterando a expressão (2.23) obtemos a expressão em multinível

$$\sum_{\mu \in X^{k+1}} f_\mu^{k+1} \phi_\mu^{k+1}(x) = \sum_{\mu \in X^{k_0}} f_\mu^{k_0} \phi_\mu^{k_0}(x) + \sum_{k_0 \le l \le k} \sum_{\mu \in X^{l+1} \setminus X^l} d_\mu^l \psi_\mu^l(x),$$

que corresponde à soma direta

$$V^{k+1} = V^{k_0} + W^{k_0} + \ldots + W^k.$$

Deste ponto de vista, as transformações em multinível T^{k+1} e $(T^{k+1})^{-1}$ são mudanças entre a base de um nível e a base de multinível, e vice-versa, isto é,

$$\{\phi_\mu^{k+1}(x) : \ \mu \in X^{k+1}\} \leftrightarrow \{\phi_\mu^{k_0}(x) : \ \mu \in X^{k_0}\} \cup_{l=k_0}^{k} \{\psi_\mu^l(x) : \ \mu \in X^{l+1} \setminus X^l\}.$$

Nas Figuras 2.3, 2.4, 2.5 e 2.6 plotamos as funções escala ϕ_μ^5 para $\mu = 1/2$ e $M = 2,\ 4,\ 6,\ 8$, respectivamente.

Nas Figuras 2.7, 2.8, 2.9 e 2.10 plotamos as funções escala ϕ_μ^5, $\mu = 0,\ 1/2^5,\ 2/2^5,\ 3/2^5$ que interagem com o extremo inferior do intervalo, utilizando $M = 4$.

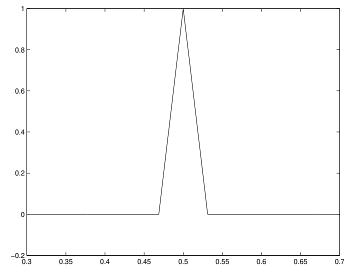


Figura 2.3: ϕ^5_μ, $M = 2$

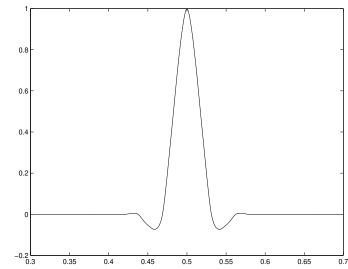


Figura 2.4: ϕ^5_μ, $M = 4$

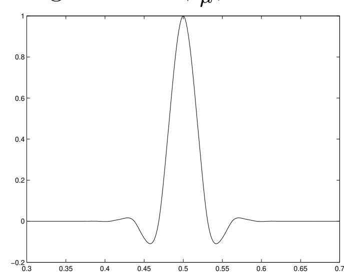


Figura 2.5: ϕ^5_μ, $M = 6$

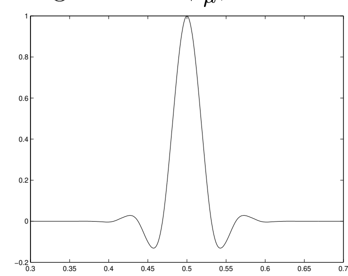


Figura 2.6: ϕ^5_μ, $M = 8$

2.2.5 Estudo da Regularidade Local de Funções Usando Análise de Multi-resolução Interpolatória

Nesta seção faremos o estudo da regularidade local de uma função $f(x)$ usando os coeficientes wavelet obtidos da análise de multi-resolução interpolatória desta função.

Inicialmente, enunciamos um resultado referente as estimativas de erro na interpolação polinomial de Lagrange ([12], página 195) que utilizaremos para obter uma estimativa para o tamanho dos coeficientes d^k_μ.

Teorema 2.2 *Seja $p(x)$ o polinômio de grau $M-1$ que interpola uma função f em M pontos $\nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_{M-1}$. Seja $0 \leq m \leq M-1$. Se $f \in C^m[\nu_0, \nu_{M-1}]$ e $f^{(m+1)}$ é integrável, então para cada x em $[\nu_0, \nu_{M-1}]$*

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{M!} \sum_{i=0}^{M-1} L_{\nu_i}(x) \int_{\nu_i}^{x} (\nu_i - t)^m f^{(m+1)}(t) dt, \tag{2.24}$$

onde $L_{\nu_i}(x)$, $i = 0, \ldots, M-1$ são os polinômios de Lagrange definidos na seção 2.2.4. $\square$

Como conseqüência do Teorema 2.2 obtemos uma estimativa para o tamanho dos coeficientes wavelet.

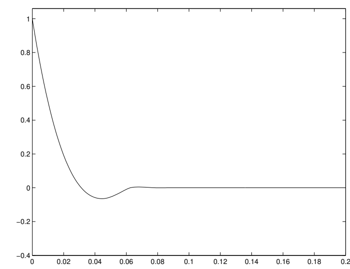


Figura 2.7: ϕ_μ^5, $\mu = 0$

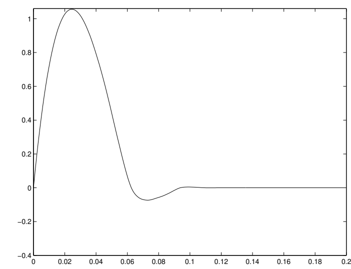


Figura 2.8: ϕ_μ^5, $\mu = 1/2^5$

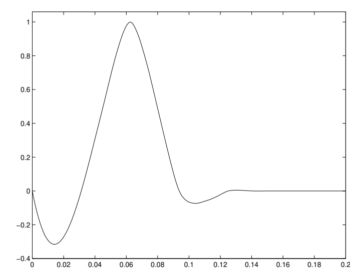


Figura 2.9: ϕ_μ^5, $\mu = 2/2^5$

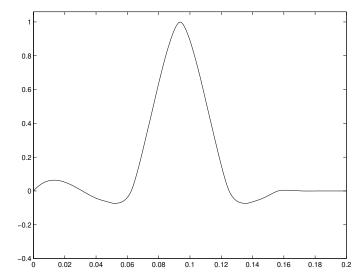


Figura 2.10: ϕ_μ^5, $\mu = 3/2^5$

Corolário 2.1 *Seja* $\mu \in X^{l+1} \setminus X^l$ *e* $\nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_{M-1}$ *os pontos de* S_μ^l *como descrito em (2.6), (2.9) e (2.12). Seja* $0 \leq m \leq M-1$. *Se* $f \in C^m[\nu_0, \nu_{M-1}]$ *e possui derivada de ordem* $(m+1)$ *integrável e limitada então*

$$d_\mu^l = \mathcal{O}(2^{-l(m+1)}). \tag{2.25}$$

Demonstração: Como descrito na Seção 2.2.3

$$d_\mu^l = f(\mu) - p(\mu),$$

onde p é o polinômio de grau $M-1$ que interpola f nos pontos de S_μ^l. Logo pelo Teorema 2.2

$$f(\mu) - p(\mu) = \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^{M-1} L_{\nu_i}(\mu) \int_{\nu_i}^{\mu} (\nu_i - t)^m f^{(m+1)}(t) dt.$$

Observemos que os polinômios $L_{\nu_i}(x)$ são limitados no intervalo $[\nu_0, \nu_{M-1}]$, independentemente de l e μ. De fato, é fácil ver que $L_{\nu_i}(x) = L_i(2^k(x - \nu_i) + i)$ onde $L_i(x)$ é o polinômio de grau $M-1$ satisfazendo $L_i(j)=\delta_{ij}$. Portanto,

$$\max_{x\in[\nu_0,\nu_{M-1}]}|L_{\nu_i}(x)| = \max_{t\in[0,M-1]}|L_i(t)| = C_i.$$

Logo,

$$|L_{\nu_i}(\mu)| \le C, \tag{2.26}$$

onde $C=\max_{0\le i\le M-1} C_i$.

Por outro lado,

$$\left|\int_{\nu_i}^{\mu}(\nu_i-t)^m f^{(m+1)}(t)dt\right| \le K\frac{|\mu-\nu_i|^{m+1}}{m+1} \le K\frac{(M-3/2)^{m+1}}{m+1}2^{-l(m+1)}, \tag{2.27}$$

onde $K=\max_{x\in[0,1]}|f^{(m+1)}(x)|$. De (2.26) e (2.27) segue o resultado (2.25). □

Os resultados acima mostram que os coeficientes wavelet d^k_μ, podem ser usados como indicadores da regularidade local de uma função. Seja $t_0\in(0,1)$. Se f tiver uma descontinuidade de salto em t_0 e for suave no resto então $d^k_\mu=\mathcal{O}(1)$, para $\mu\approx t_0$. Se para $m=1$, 2 ou 3, $f^{(m)}$ tiver um salto em t_0 mas for suave no resto do intervalo então $d^k_\mu=\mathcal{O}(2^{-k(m+1)})$, para $\mu\approx t_0$. Por exemplo, consideremos a função

$$f(x)=\begin{cases} 8.1\ e^{1/4}\ e^{-|x-1/2|}, & x\le 1/4,\\ 9\ e^{-|x-1/2|}, & 1/4\le x\le 3/4,\\ e^{-|x-1/2|}\ (16x^2-24x+18), & x\ge 3/4,\end{cases}$$

plotada na Figura 2.11. No ponto $x_0=1/4$, f é descontínua, no ponto $x_0=1/2$, f é contínua com derivada de primeira ordem descontínua, no ponto $x_0=3/4$, f e sua derivada de primeira ordem são contínuas com a derivada de segunda ordem descontínua. Usando a análise de multi-resolução interpolatória com $M=4$, na Figura 2.12 marcamos no plano posição-escala $\mu\times l$, os pontos $\mu=(2j-1)2^{-(l+1)}$ para os quais $|d^l_\mu|>2^{-13+l}10^{-3}$, $6\le l\le 12$. Esta marcação indica claramente a posição das singularidades da função.

Seja

$$A_l(x_0)=\max\{|d^l_\mu|:\ |\mu-x_0|\le M/2\}.$$

Segundo o Corolário 2.1, esperamos que a função $\alpha(l)=logA_l(x_0)/log2$ se comporte como uma reta com inclinações 0, -1 e -2 para $x_0=1/4$, $x_0=1/2$ e $x_0=3/4$, respectivamente. De fato, fazendo um ajuste por mínimos quadrados, a inclinação da reta que melhor se ajusta aos dados plotados na figura 2.13 são -0.0004, -1.0149 e -1.9538.

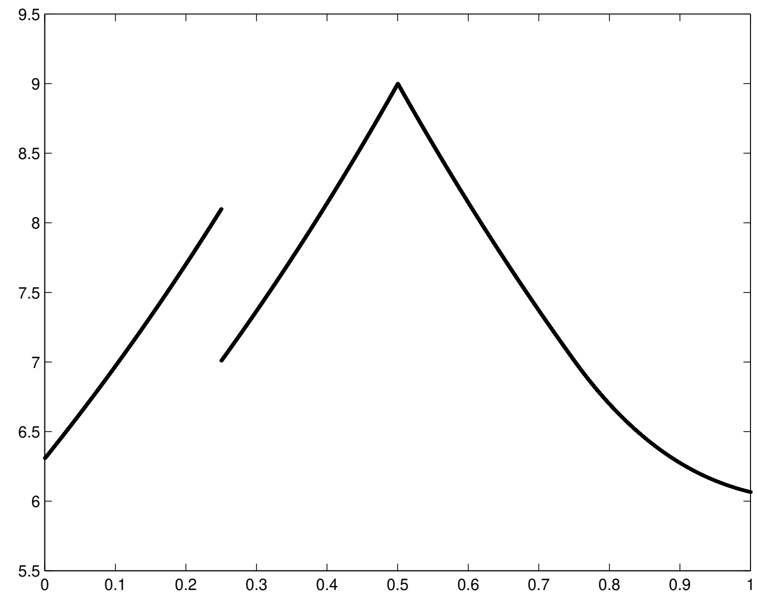


Figura 2.11: $f(x)$

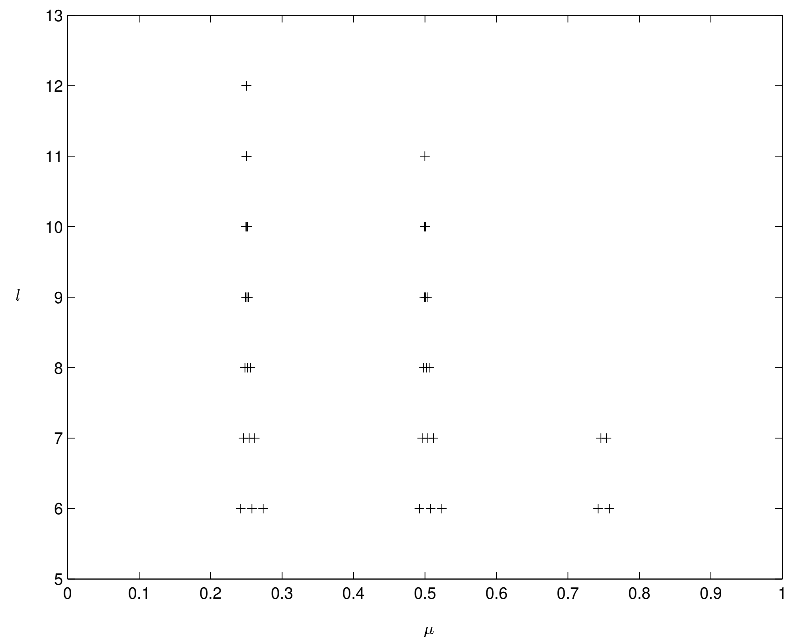


Figura 2.12: Coeficientes wavelet significativos

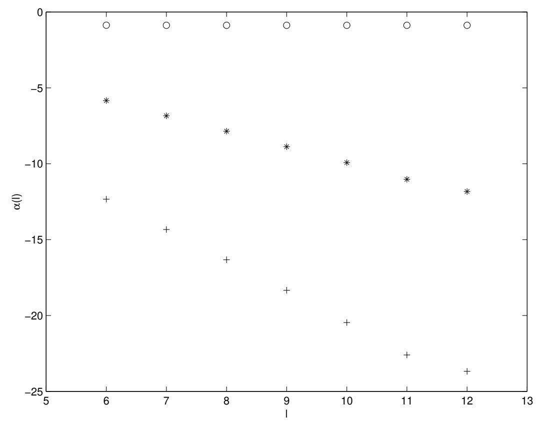


Figura 2.13: $\alpha(l) = logA_l(x_0)/log2$
(o) $\rightarrow x_0 = 1/4$
(*) $\rightarrow x_0 = 1/2$
(+) $\rightarrow x_0 = 3/4$

Conforme veremos a seguir, este mesmo tipo de análise pode ser feita quando as informações utilizadas para a construção da análise de multi-resolução não são valores pontuais, mas médias celulares.

2.3 Análise de Multi-resolução de Médias Celulares

Nesta seção construímos análises de multi-resolução utilizando médias celulares de uma função f em malhas regulares.

2.3.1 Discretização

Seja $\bar{X}^k = X^k - \{0\}$. Sejam $\mu = j2^{-k} \in \bar{X}^k$ e $\mu^- = \mu_k^- = (j-1)2^{-k}$ o vizinho à esquerda mais próximo de μ em X^k. A média celular de f na célula $[\mu^-, \mu]$ é definida por

$$\bar{f}_\mu^k = \frac{1}{h_k}\int_{\mu^-}^{\mu} f(x)dx,$$

onde $h_k = \mu - \mu^-$. Consideraremos então a discretização,

$$f \overset{\bar{\mathcal{D}}^k}{\longmapsto} \bar{f}^k.$$

São imediatos os seguintes fatos:

1. As médias celulares no nível k podem ser obtidas através das médias celulares no nível $k+1$ usando a propriedade aditiva da integral

$$\bar{f}^k_\mu = \frac{\bar{f}^{k+1}_{\mu^-} + \bar{f}^{k+1}_\mu}{2}. \tag{2.28}$$

2. Se $\mu \in \bar{X}^k$ então a partir do conhecimento de $\bar{f}^k_\mu$ e de $\bar{f}^{k+1}_{\mu^-}$, $\mu^- \in \bar{X}^{k+1} \setminus \bar{X}^k$, podemos também usar a fórmula

$$\bar{f}^{k+1}_\mu = 2\bar{f}^k_\mu - \bar{f}^{k+1}_{\mu^-} \tag{2.29}$$

para obter $\bar{f}^{k+1}_\mu$.

2.3.2 Reconstrução

Definindo a função primitiva de f

$$F(x) = \int_0^x f(y)dy,$$

as médias celulares de f podem ser obtidas a partir dos valores pontuais de F e vice-versa, pelas seguintes equações

$$\bar{f}^k_\mu = \frac{F(\mu) - F(\mu^-)}{h_k}, \tag{2.30}$$

$$F(\mu) = \sum_{\nu \leq \mu} h_k \bar{f}^k_\nu. \tag{2.31}$$

Portanto, a reconstrução das médias celulares pode ser feita usando interpolação da função primitiva de f. Esta idéia foi intensivamente usada por A. Harten e seus colegas no desenvolvimento dos chamados esquemas essencialmente não oscilatórios (ENO) para leis de conservação [17]. De fato, seja $I^k(x; F^k)$ uma reconstrução dos valores pontuais da primitiva de f. Definimos

$$R^k(x; \bar{f}^k) = \frac{d}{dx} I^k(x; F^k)$$

como o *operador de reconstrução* das médias celulares $\bar{f}^k$.

Conseqüentemente, quando o operador de reconstrução interpolatório $I^k(x; F^k)$ da função primitiva possuir uma regularidade de ordem r, isto implicará na regularidade do operador de reconstrução das médias celulares de ordem $r-1$.

O par $\{\mathcal{D}^k, R^k\}$ é conservativo, pois para $\mu \in \bar{X}^k$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_k}\int_{\mu^-}^{\mu} R^k(x;\bar{f}^k)dx &= \frac{I^k(\mu;F^k) - I^k(\mu^-;F^k)}{h_k} \\ &= \frac{F(\mu) - F(\mu^-)}{h^k} = \bar{f}^k_\mu. \end{aligned}$$

Dadas as médias celulares no nível l, o operador de reconstrução $R^l(x;\bar{f}^l)$ pode ser usado para aproximar médias celulares na malha mais fina $\bar{X}^{l+1}$. Seja $\mu \in \bar{X}^{l+1} \setminus \bar{X}^l$ e μ^- o seu vizinho à esquerda mais próximo na malha X^{l+1}. Uma aproximação para a média celular $\bar{f}^{l+1}_\mu$ pode ser dada por

$$\tilde{f}^{l+1}_\mu = \frac{1}{h_{l+1}}\int_{\mu^-}^{\mu} R^l(x;\bar{f}^l)\;dx = \frac{I^l(\mu;F^l) - I^l(\mu^-;F^l)}{h_{l+1}} = \frac{I^l(\mu;F^l) - F(\mu^-)}{h_{l+1}}. \tag{2.32}$$

Seguindo as considerações acima, definimos a diferença de informação entre o nível l e $l+1$, como sendo o erro nesta aproximação

$$\bar{d}^l_\mu = \bar{f}^{l+1}_\mu - \tilde{f}^{l+1}_\mu = \frac{F(\mu) - I^l(\mu;F^l)}{h_{l+1}}. \tag{2.33}$$

Tendo em vista (2.28), (2.29) e (2.33), o operador de multi-resolução para médias celulares T^{k+1}, bem como a sua inversa $(T^{k+1})^{-1}$, estão bem definidos. Em resumo:

2.3.3 Aspecto Discreto

- **Análise** - $\bar{f}^{k+1} \rightarrow (\bar{f}^{k_0}, \bar{d}^{k_0}, \ldots, \bar{d}^k)$
  Para $l = k, k-1, \ldots, k_0$ *fazemos*
  - Para $\mu \in \bar{X}^l$*, calculamos*

$$\bar{f}^l_\mu = \frac{\bar{f}^{l+1}_\mu + \bar{f}^{l+1}_{\mu^-}}{2}.$$

  - Para $\mu \in \bar{X}^{l+1} \setminus \bar{X}^l$ *calculamos* $\tilde{f}^{k+1}_\mu$ *pela fórmula (2.32) e*

$$\bar{d}^l_\mu = \bar{f}^{l+1}_\mu - \tilde{f}^{l+1}_\mu.$$

- **Síntese** – $(\bar{f}^{k_0}, \bar{d}^{k_0}, \ldots, \bar{d}^{k}) \rightarrow \bar{f}^{k+1}$
  Para $k = k_0, \ldots, k$ *fazemos*
  - *Para* $\mu \in \bar{X}^{l+1} \setminus \bar{X}^{l}$, *calculamos* $\tilde{f}_{\mu}^{k+1}$ *pela fórmula (2.32)*

$$\bar{f}_{\mu}^{l+1} \quad = \quad \bar{d}_{\mu}^{l} + \tilde{f}_{\mu}^{l+1}$$

  - *Para* $\mu \in \bar{X}^{l}$ *calculamos*

$$\bar{f}_{\mu}^{l+1} \quad = \quad 2\bar{f}_{\mu}^{l} - \bar{f}_{\mu^-}^{l+1}$$

Damos a seguir as fórmulas para o cálculo de $\tilde{f}_{\mu}^{k+1}$ para o caso específico em que a reconstrução interpolatória $I^{l}(x; F^{l})$ usa o algoritmo de interpolação polinomial de Lagrange descrito na seção anterior.

Seja $\mu = (2j-1)2^{-l-1}$ um ponto de $\bar{X}^{l+1} \setminus \bar{X}^{l}$, $l \geq k$. Dependendo da posição de μ, o valor de $\tilde{f}_{\mu}^{l+1}$ é dada por uma das expressões abaixo.

1. Para μ próximo à fronteira inferior do intervalo: $0 < j \leq M/2 - 1$

$$\tilde{f}_{\mu}^{l+1} = \sum_{m=1}^{M-1} \bar{c}_{j,m} \bar{f}_{\nu_m}^{l}, \tag{2.34}$$

   onde $\nu_m \in S_{\mu}^{l}$, conforme definido em (2.6), e

$$\bar{c}_{j,m} = \begin{cases} 2\left[\left(\sum_{i=m}^{M-1} L_{\nu_i}^{e}(\mu)\right) - 1\right], & m = 1, 2, \ldots, j-1, \\ 2\sum_{i=m}^{M-1} L_{\nu_i}^{e}(\mu), & m = j, \ldots, M-1. \end{cases} \tag{2.35}$$

2. Para μ longe dos extremos do intervalo: $M/2 - 1 < j \leq 2^{l} - (M/2 - 1)$,

$$\tilde{f}_{\mu}^{l+1} = \bar{f}_{\nu_j}^{l} + \sum_{m=1}^{M/2-1} \bar{c}_{j,m}\left[\bar{f}_{\nu_{j+m}}^{l} - \bar{f}_{\nu_{j-m}}^{l}\right], \tag{2.36}$$

   onde $\nu_m \in S_{\mu}^{l}$, conforme definido em (2.9), e

$$\bar{c}_{j,m} = 2\sum_{i=m}^{M/2-1} L_{\nu_{j+i}}(\mu). \tag{2.37}$$

3. Para μ próximo à fronteira superior do intervalo: $2^l - (M/2 - 1) < j \leq 2^l$,

$$\tilde{f}_{\mu}^{l+1} = \sum_{m=2^l-M+2}^{2^l} \bar{c}_{j,m} \bar{f}_{\nu_m}^{l}, \tag{2.38}$$

onde $\nu_m \in S_{\mu}^{l}$, conforme definido em (2.12), e

$$\bar{c}_{j,m} = \begin{cases} 2\left[\left(\sum_{i=m}^{2^l} L_{\nu_i}^{d}(\mu)\right) - 1\right], & m = 2^l - M + 2, \ldots, j-1, \\ 2\sum_{i=m}^{2^l} L_{\nu_i}^{d}(\mu), & m = j, \ldots, 2^l. \end{cases} \tag{2.39}$$

Nas Tabelas 2.3 e 2.5 os valores de $\bar{c}_{j,m}$ são fornecidos de acordo com a posição de μ na fronteira inferior e superior de $\mathcal{I}$, respectivamente. Na Tabela 2.4 esses valores correspondem a pontos μ no centro do intervalo. Observemos que

1. Os coeficientes $\bar{c}_{j,m}$ não dependem do nível l de resolução.

2. Para os pontos μ que estão longe dos extremos do intervalo, $\bar{c}_{j,m} = \bar{c}_m$, isto é, estes coeficientes não dependem do ponto μ.

3. Não existe simetria para os coeficientes $\bar{c}_{j,m}$ associados aos extremos do intervalo.

2.3.4 Aspecto Funcional

Para caracterizarmos o operador de multi-resolução T^{k+1} sob o ponto de vista funcional, definimos inicialmente as funções escala e wavelet conforme Definição 2.3 e 2.4.

Funções Escala

Para $\mu \in \bar{X}^k$, definimos a função escala $\theta_{\mu}^{k}(x)$ por

$$\theta_{\mu}^{k}(x) = R^k(x; \delta_{\mu\nu}) = \frac{d}{dx} I^k(x; \Delta_{\mu\nu}),$$

onde a seqüência $\Delta_{\mu\nu}$ é obtida a partir de (2.31) e é dada por

$$\Delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0, & \nu < \mu, \\ h_k, & \nu \geq \mu. \end{cases}$$

M	j	$\bar{c}_{j,1}$	$\bar{c}_{j,2}$	$\bar{c}_{j,3}$	$\bar{c}_{j,4}$	$\bar{c}_{j,5}$
2	1	1				
4	1	11/8	-1/2	1/8		
6	1	193/128	-61/64	11/16	-19/64	-7/128
	3	7/128	79/64	-13/32	9/64	-3/128

Tabela 2.3: Valores de $\bar{c}_{j,m},\ m = 0, \ldots, M-1$ quando μ está próximo a fronteira inferior

M	$\bar{c}_0$	$\bar{c}_1$	$\bar{c}_2$
2	1		
4	1	-1/8	
6	1	-11/64	3/128

Tabela 2.4: Valores de $\bar{c}_{j,m}$ quando μ está longe das fronteiras do intervalo

M	j	$\bar{c}_{j,1}$	$\bar{c}_{j,2}$	$\bar{c}_{j,3}$	$\bar{c}_{j,4}$	$\bar{c}_{j,5}$
2	1	1				
4	1	-1/8	1/2	5/8		
6	1	3/128	-9/64	11/32	-49/64	-7/128
	3	-7/128	19/64	-11/16	61/64	63/128

Tabela 2.5: Valores de $\bar{c}_{j,m},\ m = 2^l - M + 2, \ldots, 2^l$ quando μ está próximo a fronteira superior

Definimos $\overline{V}^k$ como o espaço gerado por $\theta^k_\mu(x),\ \mu \in \bar{X}^k$.

Com relação as médias celulares em malhas uniformes na reta, seja

$$\tilde{\theta}(x) = \frac{d}{dx}\tilde{I}^0(x;\Delta_{\mu 0}) = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} \Delta_{\mu 0}\frac{d}{dx}\tilde{\phi}(x-\mu),$$

onde $\tilde{I}^0(x;\Delta_{\mu 0})$ é o operador de reconstrução interpolatório associado ao esquema de refinamento $\tilde{P}^{l+1}_l$ e $\tilde{\phi}(x)$ é a função escala associada. Segue que

$$\tilde{\theta}(x) - \tilde{\theta}(x-1) = \frac{d}{dx}\tilde{\phi}(x),$$

que é chamada de *fórmula de comutação.* Analogamente, para $\tilde{\theta}^k_\mu(x) = \tilde{\theta}(2^k(x-\mu))$, $\mu = j2^{-k},\ j \in \mathbb{Z}$ obtemos que

$$\frac{\tilde{\theta}^k_\mu(x) - \tilde{\theta}^k_\mu(x-2^{-k})}{h_k} = \frac{d}{dx}\tilde{\phi}^k_\mu(x).$$

Como conseqüência destas considerações e das fórmulas (2.18), (2.19) e (2.20), as funções escala $\theta^k_\mu(x)$ podem ser expressas em termos de $\tilde{\theta}^k_\mu(x)$. Dependendo da posição de μ em $\mathcal{I}$ temos:

1. Para μ próximo ao extremo inferior de $\mathcal{I}$: $0 < \mu \leq (M-1)2^{-k}$

$$\theta^k_\mu(x) \quad = \quad \tilde{\theta}^k_\mu(x) + \sum_{\eta\leq 0} e^e_{\mu\eta}\tilde{\theta}^k_\eta(x)$$

   onde $\eta = j2^{-k}$ e

$$e^e_{\mu\eta} = \begin{cases} -\displaystyle\sum_{\nu=\mu}^{(M-1)2^{-k}} L^e_\nu(-2^{-k}), & \eta = 0, \\ \displaystyle\sum_{\nu=\mu}^{(M-1)2^{-k}} \left(L^e_\nu(\eta) - L^e_\nu(\eta - 2^{-k})\right), & \eta < 0. \end{cases}$$

2. No centro do intervalo: $(M-1)2^{-k} < \mu < 1-(M-1)2^{-k}$

$$\theta^k_\mu(x) = \tilde{\theta}^k_\mu(x).$$

3. Para μ próximo ao extremo superior de $\mathcal{I}$: $1-(M-1)2^{-k} \leq \mu \leq 1$.

$$\theta_\mu^k(x) \;=\; \tilde{\theta}_\mu^k(x) + \sum_{\eta>1} e_{\mu\eta}^d tilde\theta_\eta^k(x),$$

onde $\eta = j2^{-k}$ e

$$e_{\mu\eta}^d = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=\mu}^{1} L_\nu^d(1+2^{-k}) - 1, & \eta = 1+2^{-k}, \\ \displaystyle\sum_{\nu=\mu}^{1} \left(L_\nu^d(\eta) - L_\nu^d(\eta - 2^{-k})\right), & \eta > 1+2^{-k}. \end{cases}$$

A função $\tilde{\theta}(x)$ possui algumas propriedades interessantes que listamos a seguir. Detalhes destes resultados podem ser encontrados em em [10].

1. $\int_{j-1}^{j} \tilde{\theta}(x)dx = \delta_{0,j}$.
2. Em geral, como a regularidade de $\tilde{\phi}(x)$ aumenta com M o mesmo acontece com $\tilde{\theta}(x)$. Por exemplo, se $M=4$, $\tilde{\theta}(x)$ é pelo menos contínua e se $M=6$, $\tilde{\theta}(x)$ é pelo menos C^1. Maiores detalhes em [5], [10].
3. $\tilde{\theta}(x)$ satisfaz a relação de refinamento

   $$\tilde{\theta}(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \bar{c}(\nu)\tilde{\theta}(2x-\nu),$$

   onde

   $$\bar{c}(\nu) = \frac{1}{2}\int_{\frac{\nu-1}{2}}^{\frac{\nu}{2}} \tilde{\theta}(x)dx.$$

   Os coeficientes $\bar{c}(\nu)$ são os da Tabela 2.4.
4. $\tilde{\theta}(x)$ é simétrica em relação a reta $x = -\frac{1}{2}$,

   $$\tilde{\theta}(x-1/2) = \tilde{\theta}(-x-1/2).$$

5. $\tilde{\theta}(x)$ possui suporte compacto em $[-M+1, M-2]$.

6. Os polinômios de grau menor ou igual a $M-2$ são reproduzidos por $\tilde{\theta}(x)$ e suas transladadas $\theta(x-\mu)$,

$$x^n = \sum_j \left(\int_{j-1}^{j} x^n dx \right) \tilde{\theta}(x-j), \; n = 0, 1, \ldots, M-2.$$

7. Seja $\tilde{\bar{f}}^k_\nu$, $\nu = j2^{-k}, j \in \mathbb{Z}$, uma seqüência de médias celulares. A reconstrução $\tilde{R}^k(x, \tilde{\bar{f}}^k)$ desta seqüência é dada por

$$\tilde{R}^k(x, \tilde{\bar{f}}^k) = \sum_\nu \tilde{\bar{f}}^k_\nu \tilde{\theta}^k_\nu(x). \tag{2.40}$$

Estas mesmas propriedades são herdadas, algumas com as devidas diferenças, pelas funções $\theta^k_\mu(x)$. Maiores detalhes em [10]. São elas:

1. *Interpolação de médias celulares*: Para μ, $\nu \in \bar{X}^k$,

$$\frac{1}{h_k} \int_{\nu^-}^{\nu} \theta^k_\mu(x) dx = \begin{cases} 1, & \nu = \mu \\ 0, & \nu \neq \mu. \end{cases} \tag{2.41}$$

   Notemos que (2.41) pode ser escrita em termos da função

$$\theta^{*k}_\nu(x) = \begin{cases} (h_k)^{-1}, & x \in [\nu^-, \nu], \\ 0, & x \notin [\nu^-, \nu] \end{cases} \tag{2.42}$$

   como $< \theta^k_\mu, \theta^{*k}_\nu >= \delta_{\mu\nu}$. A função $\theta^{*k}_\nu(x)$ é chamada de *função dual* de $\theta^k_\mu(x)$.

2. *Regularidade* A regularidade de θ^k_μ aumenta com M.

3. *Relação de Escala*: $\theta^k_\mu(x)$ satisfaz a equação

$$\theta^k_\mu(x) = \sum_{\nu \in \bar{X}^{k+1}} \bar{c}_{\nu\mu} \theta^{k+1}_\nu(x),$$

   onde

$$\bar{c}_{\nu\mu} = 2^{k+1} \int_{\nu^-}^{\nu} \theta^k_\mu(x) dx,$$

   são os coeficientes nas Tabelas 2.3, 2.4 e 2.5. Esta relação reflete o fato que $\overline{V}^k \subset \overline{V}^{k+1}$.

4. <u>*Simetria*</u>: Para $(M-1)2^{-k} < \mu < 1-(M-1)2^{-k}$, $\theta_\mu^k(x) = \tilde{\theta}_\mu^k(x)$ é simétrica em relação a reta $x = \mu - 2^{-k-1}$.

5. <u>*Suporte*</u>: Seja μ em $\bar{X}^k$.

   (a) Para $0 < \mu \leq (M-1)2^{-k}$, o suporte de $\theta_\mu^k(x)$ é igual a $[0, \mu + (M-2)2^{-k}]$.

   (b) Para $(M-1)2^{-k} < \mu < 1-(M-1)2^{-k}$, o suporte de $\theta_\mu^k(x)$ é igual a $[\mu-(M-1)2^{-k}, \mu+(M-2)2^{-k}]$.

   (c) Para $1-(M-1)2^{-k} \leq \mu \leq 1$, o suporte de $\theta_\mu^k(x)$ é igual a $[\mu-(M-1)2^{-k}, 1]$.

6. <u>*Reprodução de Polinômios*</u>: Os polinômios de grau menor ou igual a $M-2$ são reproduzidos pelas funções escala $\theta_\mu^k(x),\ \mu \in \bar{X}^k$,

$$x^n = \sum_\mu \left(h_k^{-1} \int_{\mu^-}^{\mu} x^n dx \right) \theta_\mu^k(x),\ n = 0, 1, \ldots, M-2. \tag{2.43}$$

7. <u>*Fórmula de Comutação*</u>: $(M \geq 4)$ Para $\mu \in \bar{X}^k$,

$$\frac{d}{dx}\phi_\mu^k(x) = \begin{cases} -\dfrac{\theta_\mu^k(x)}{h_k}, & \mu = 2^{-k} \\[2ex] \dfrac{\theta_\mu^k(x)}{h_k} - \dfrac{\theta_{\mu^+}^k(x)}{h_{k,\mu^+}}, & 2^{-k} < \mu < 1 \\[2ex] \dfrac{\theta_\mu^k(x)}{h_k}, & \mu = 1, \end{cases} \tag{2.44}$$

   onde μ^+ é o vizinho à direita mais próximo de μ em $\bar{X}^k$.

Funções Wavelet

Para $\mu \in \bar{X}^{k+1} \setminus \bar{X}^k$, a seqüência $\tilde{f}_\nu^{k+1}$ obtida pelo algoritmo de síntese de $\bar{f}_\nu^k = 0,\ \nu \in \bar{X}^k$ e $\bar{d}_\nu^k = \delta_{\nu\mu},\ \nu \in \bar{X}^{k+1} \setminus \bar{X}^k$ coincide com a seqüência $\delta_{\mu,\nu} - \delta_{\mu^+,\nu}$. Então, conforme Definição 2.4, $\Psi_\mu^k(x)$ é dada por

$$\Psi_\mu^k(x) = R^{k+1}(x; \delta_{\mu\nu} - \delta_{\mu^+\nu}) = \theta_\mu^{k+1}(x) - \theta_{\mu^+}^{k+1}(x). \tag{2.45}$$

Definimos $\overline{W}^k$ como o espaço gerado por $\Psi_\mu^k(x),\ \mu \in \bar{X}^{k+1} \setminus \bar{X}^k$.

Definimos a *função dual* de $\Psi_\mu^k(x)$ por

$$\Psi_\mu^{*k}(x) = \theta_\mu^{*k}(x) - \sum_{\nu \in \bar{X}^k} \bar{c}_{\mu\nu} \theta_\nu^{*k}(x),$$

onde $\bar{c}_{\mu\nu}$ são os valores definidos nas Tabelas 2.3, 2.4 e 2.5, e $\theta_\nu^{*k}(x)$ está definido em (2.42).

$\Psi_\mu^{*k}(x)$ possui algumas propriedades de interesse. São elas:

1. Cancelamento de polinômios:

$$\int_0^1 x^n \Psi_\mu^{*k}(x) dx = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, M-2. \tag{2.46}$$

   Esta propriedade é conseqüência imediata de (2.43).

2. Os coeficientes wavelet $\bar{d}_\mu^k$ podem ser escritos em termos de $\Psi_\mu^{*k}(x)$, isto é,

$$\bar{d}_\mu^k =< f, \Psi_\mu^{*k}(x) > . \tag{2.47}$$

Como conseqüência de (2.46) e (2.47) obtemos que se $f(x)$ for um polinômio de grau menor ou igual a $M-2$, $\bar{d}_\mu^k = 0$ para todo $\mu \in \bar{X}^{k+1} \setminus X^k$.

Vamos, agora, caracterizar o operador T^{k+1} em termos dos espaços gerados pelas bases $\{\theta_\mu^{k+1} : \mu \in \bar{X}^{k+1}\}$ e $\{\theta_\mu^k : \mu \in \bar{X}^k\} \cup \{\Psi_\mu^k : \mu \in \bar{X}^{k+1} \setminus \bar{X}^k\}$.

Dada a função $f \in \overline{V}^{k+1}$,

$$f(x) = \sum_{\mu \in \bar{X}^{k+1}} \bar{f}_\mu^{k+1} \theta_\mu^{k+1}(x).$$

consideremos a função $g(x) \in \overline{V}^{k+1}$

$$g(x) = \sum_{\mu \in \bar{X}^k} \bar{f}_\mu^k \theta_\mu^k(x) + \sum_{\mu \in \bar{X}^{k+1} \setminus \bar{X}^k} \bar{d}_\mu^k \Psi_\mu^k(x).$$

Vamos mostrar que $f(x) = g(x)$. Como ambas as funções, estão em $\overline{V}^{k+1}$ basta mostrar que $\bar{g}_\nu^{k+1} = \bar{f}_\nu^{k+1}$ para $\nu \in \bar{X}^{k+1}$.

1. Para $\nu \in \bar{X}^{k+1} \setminus \bar{X}^k$,

$$\frac{1}{h_{k+1}} \int_{\nu^-}^{\nu} \Psi_\mu^k(x) dx = \frac{1}{h_{k+1}} \int_{\nu^-}^{\nu} \theta_\mu^{k+1}(x) dx - \frac{1}{h_{k+1}} \int_{\nu^-}^{\nu} \theta_{\mu^+}^{k+1}(x) dx.$$

Pela propriedade (2.41) o primeiro termo é igual a $\delta_{\mu\nu}$ e o segundo é igual a zero, tendo em vista que $\mu^+ \in \bar{X}^k$. Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_{k+1}}\int_{\nu^-}^{\nu} g(x)dx &= \frac{1}{h_{k+1}}\int_{\nu^-}^{\nu} R^k(x,\bar{f}^k)dx + \frac{1}{h_{k+1}}\sum_{\mu\in\bar{X}^{k+1}\setminus\bar{X}^k} \bar{d}_\mu^k \int_{\nu^-}^{\nu}\Psi_\mu^k(x)dx \\
&= \tilde{f}_\nu^{k+1} + \bar{d}_\nu^k \\
&= \bar{f}_\nu^{k+1}.
\end{aligned}$$

2. Para $\nu \in \bar{X}^k$ segue que $\nu^- \in \bar{X}^{k+1}$. Analogamente temos que

$$\frac{1}{h_{k+1}}\int_{\nu^-}^{\nu}\Psi_\mu^k(x)dx = \frac{1}{h_{k+1}}\int_{\nu^-}^{\nu}\theta_\mu^{k+1}(x)dx - \frac{1}{h_{k+1}}\int_{\nu^-}^{\nu}\theta_{\mu^+}^{k+1}(x)dx = -\delta_{\mu^+\nu} = -\delta_{\mu\nu^-}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_{k+1}}\int_{\nu^-}^{\nu} g(x)dx &= \frac{1}{h_{k+1}}\int_{\nu^-}^{\nu} R^k(x,\bar{f}^k)dx - \bar{d}_{\nu^-}^k \\
&= 2\bar{f}_\nu^k - \frac{1}{h_{k+1}}\int_{(\nu^-)^-}^{\nu^-} R^k(x,\bar{f}^k)dx - \bar{d}_{\nu^-}^k \\
&= 2\bar{f}_\nu^k - \tilde{f}_{\nu^-}^{k+1} - \bar{d}_{\nu^-}^k \\
&= 2\bar{f}_\mu^k - f_{\nu^-}^{k+1} \\
&= \bar{f}_\nu^{k+1}.
\end{aligned}$$

Na passagem da primeira para a segunda igualdade acima, foi usada a aditividade da integral

$$\int_{\nu^-}^{\nu} R^k(x;\bar{f}^k)dx = \int_{(\nu^-)^-}^{\nu} R^k(x;\bar{f}^k)dx - \int_{(\nu^-)^-}^{\nu^-} R^k(x;\bar{f}^k)dx.$$

Concluímos então que para todo $x \in \mathcal{I}$

$$\sum_{\mu\in\bar{X}^{k+1}} \bar{f}_\mu^{k+1}\theta_\mu^{k+1}(x) = \sum_{\mu\in\bar{X}^k}\bar{f}_\mu^k\theta_\mu^k(x) + \sum_{\mu\in\bar{X}^{k+1}\setminus\bar{X}^k}\bar{d}_\mu^k\Psi_\mu^k(x),$$

o que significa que $\overline{V}^{k+1}$ é soma direta dos espaços $\overline{V}^k$ e $\overline{W}^k$.

Se $k_0 < k$, iterando a expressão acima obtemos a expressão em multinível

$$\sum_{\mu\in\bar{X}^{k+1}} \bar{f}_\mu^{k+1}\theta_\mu^{k+1}(x) = \sum_{\mu\in X^{k_0}}\bar{f}_\mu^{k_0}\theta_\mu^{k_0}(x) + \sum_{k_0\le l\le k}\ \sum_{\mu\in X^{l+1}\setminus X^l}\bar{d}_\mu^l\Psi_\mu^l(x),$$

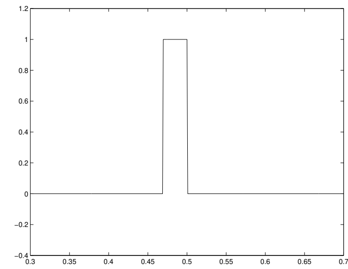


Figura 2.14: θ_μ^5, $M = 2$

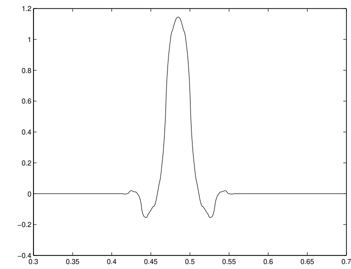


Figura 2.15: θ_μ^5, $M = 4$

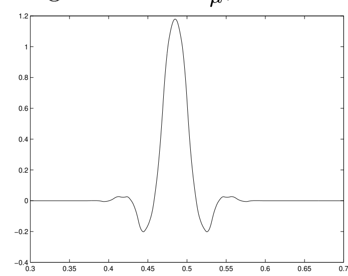


Figura 2.16: θ_μ^5, $M = 6$

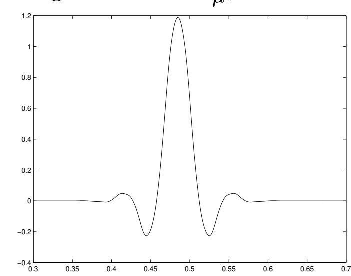


Figura 2.17: θ_μ^5, $M = 8$

que corresponde a soma direta

$$\overline{V}^{k+1} = \overline{V}^{k_0} + \bar{W}^{k_0} + \ldots + \bar{W}^k.$$

Novamente as transformações em multinível T^{k+1} e $(T^{k+1})^{-1}$ são mudanças entre a base de um nível e a base de multinível, e vice-versa, isto é,

$$\{\theta_\mu^{k+1}(x) : \ \mu \in \bar{X}^{k+1}\} \leftrightarrow \{\theta_\mu^{k_0}(x) : \ \mu \in X^{k_0}\} \cup_{l=k_0}^{k} \{\Psi_\mu^l(x) : \ \mu \in X^{l+1} \setminus X^l\}.$$

Nas Figuras 2.14, 2.15, 2.16 e 2.17 plotamos as funções escala $\theta_\mu^5(x)$, $\mu = 1/2$ com $M = 2, \ 4, \ 6, \ 8$ e nas Figuras 2.18, 2.19 e 2.20, as funções escala θ_μ^5, $\mu = \ 1/2^5, \ 2/2^5, \ 3/2^5$ que interagem com o extremo inferior do intervalo. Utilizamos $M = 4$.

2.3.5 Estudo da Regularidade Local de Funções Usando Análise de Multi-resolução de Médias Celulares

Na seção anterior vimos que podemos discretizar uma função f através do operador de discretização $\bar{\mathcal{D}}^{k+1}$ obtendo as médias celulares $\bar{f}^{k+1}$. Realizando a análise desta seqüência obtemos a seqüência em multiescala $(\bar{f}^{k_0}, \bar{d}^{k_0}, \ldots, \bar{d}^k)$. Nesta seção faremos o estudo da

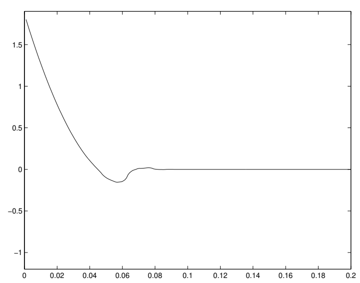


Figura 2.18: $\theta^5_\mu, \mu = 1/2^5$

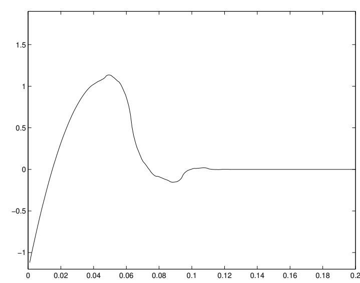


Figura 2.19: $\theta^5_\mu, \mu = 2/2^5$

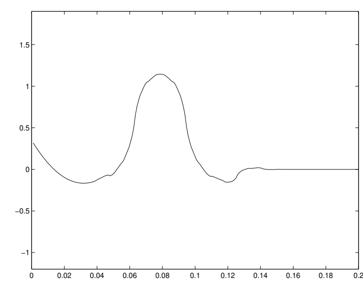


Figura 2.20: $\theta^5_\mu, \mu = 3/2^5$

regularidade local de uma função $f(x)$ usando os coeficientes wavelet obtidos da análise de multi-resolução das médias celulares desta função.

Corolário 2.2 *Seja $\mu \in X^{l+1} \setminus X^l$ e $\nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_{M-1}$ os pontos de S^l_μ como descrito em (2.6), (2.9) e (2.12). Seja $0 \leq m \leq M-1$. Se $f \in C^{m-1}[\nu_0, \nu_{M-1}]$ e possui derivada de ordem m integrável e limitada, então*

$$\bar{d}^l_\mu = \mathcal{O}(2^{-lm}). \tag{2.48}$$

Demonstração: Basta observar que existe uma relação entre o erro de interpolação da análise de multi-resolução interpolatória e da análise de multi-resolução usando médias celulares. De fato, pelas fórmulas (2.33), (2.30) e (2.32)

$$\bar{d}^l_\mu = \frac{F^{l+1}_\mu - F^{l+1}_{\mu^-}}{h_{l+1}} - \frac{I(\mu; F^l) - F^{l+1}_{\mu^-}}{h_{l+1}} = \frac{F^{l+1}_\mu - I^l(\mu; F^l)}{h_{l+1}}.$$

Como por hipótese a primitiva de f pertence a $C^m[\nu_0, \nu_{M-1}]$, com a derivada de ordem $(m+1)$ integrável e limitada, pelas estimativas obtidas no Corolário 2.1 obtemos o resultado desejado. $\Box$

O Corolário 2.2 fornece uma relação entre a taxa de decaimento dos coeficientes wavelet e a regularidade local de uma função usando a análise de multi-resolução de médias celulares. Quanto mais regular for a função, maior é a taxa de decaimento destes coeficientes. Tendo em vista este resultado, fixamos um valor que chamamos de *parâmetro de tolerância*. Desprezando os valores de $|\bar{d}^k_\mu|$ que estão abaixo deste parâmetro, notamos que os coeficientes wavelet não negligenciados, isto é, os *coeficientes wavelet significativos*, estão concentrados perto das singularidades da função. Quando realizamos a operação descrita acima sobre uma seqüência contendo informações da função, podemos reduzir o número de informações necessárias para a representação da mesma em uma certa escala.

Seja portanto, $\epsilon = (\epsilon_{k_0}, \ldots, \epsilon_k)$ um vetor em que cada coordenada ϵ_l está associada ao nível de resolução l. Definimos ϵ como o parâmetro de tolerância e $\mathcal{D}_\epsilon$ como o conjunto dos pares ordenados (μ, l) no plano posição-escala, cujas coordenadas são os índices μ e l dos coeficientes wavelet significativos $\bar{d}^l_\mu$ da representação em multi-resolução, isto é,

$$\mathcal{D}_\epsilon = \{(\mu, l) : |\bar{d}^l_\mu| > \epsilon_l\}. \tag{2.49}$$

Como exemplo, vamos considerar as seguintes funções

1.
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0.25, 0.75], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.50}$$

2.
$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0.25 \text{ ou } x > 0.9062, \\ \dfrac{x - 0.25}{0.3125}, & 0.25 \leq x \leq 0.5625, \\ 1, & 0.5625 < x < 0.9062. \end{cases} \tag{2.51}$$

Tomando $k_0 = 6$, $k = 13$, $M = 4$ e $\epsilon_l = 2^{-13+l}10^{-3}$, $l = 6, \ldots, 12$. Nas Figuras 2.21–2.22 estão desenhadas os gráficos das funções (2.50)–(2.51). Conforme veremos em capítulos posteriores, estas funções são soluções típicas de leis de conservação hiperbólicas. Nas Figuras 2.23–2.24 marcamos o conjunto de pontos associados aos coeficientes wavelet significativos $\mathcal{D}_\epsilon$ de (2.50) e (2.51) no plano posição–escala. Observemos que, de fato, os coeficientes wavelet significativos estão concentrados em regiões perto das singularidades da função, indicando claramente a localização das mesmas. Notemos que esta região de concentração possui a forma geométrica de um cone cujo vértice aponta para a localização da singularidade. Com base nestas observações, estruturaremos a malha irregular utilizada na construção da análise de multi-resolução para valores pontuais e médias celulares em malhas não uniformes do próximo capítulo.

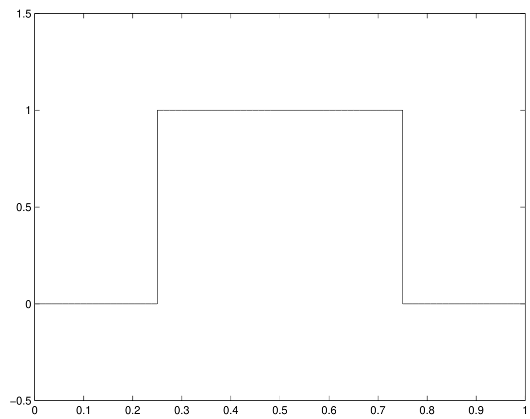


Figura 2.21: $f(x)$

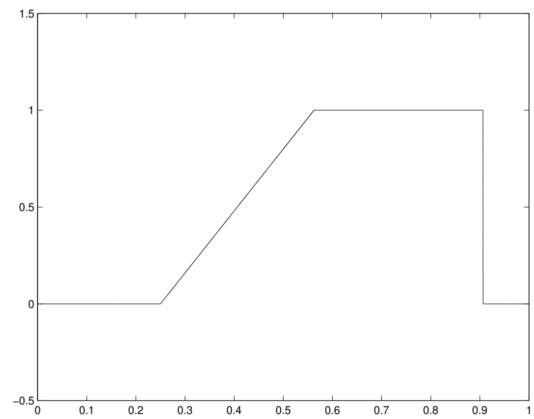


Figura 2.22: $g(x)$

l

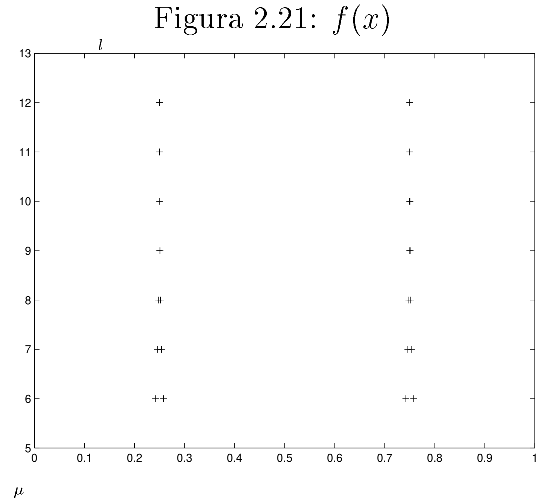


Figura 2.23: Coeficientes wavelet significativos de f

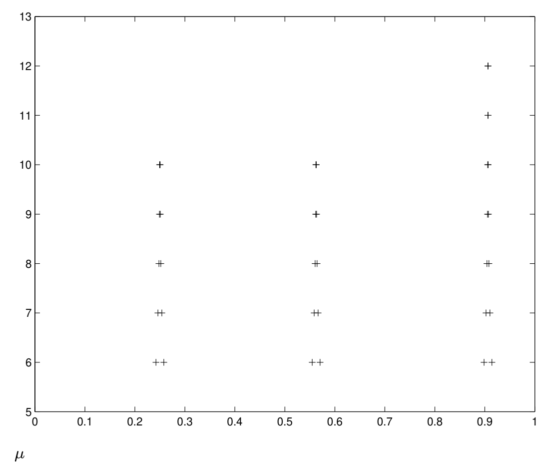


Figura 2.24: Coeficientes wavelet significativos de g

Capítulo 3

Análise de Multi-resolução em Malhas Irregulares

Neste capítulo construímos análises de multi-resolução para valores pontuais e médias celulares associadas a malhas irregulares. Estes resultados são obtidos pela combinação das idéias de F. Plantevin [24] e o formalismo introduzido por A. Harten em [14].

3.1 Sobre as Malhas

Como dissemos, nesta parte de nosso trabalho construímos análises de multi-resolução para valores pontuais e médias celulares associadas a malhas irregulares. Esta construção é baseada nas análises de multi-resolução em malhas regulares. Deste modo, as malhas irregulares que consideramos aqui são subconjuntos de malhas regulares diádicas e as reconstruções são definidas a partir dos conhecimentos e técnicas do caso regular.

Definição 3.1 *Seja* $\{\Gamma^l\}_{l\geq k_0}$ *uma seqüência de malhas irregulares encaixadas*

$$\Gamma^l \subset \Gamma^{l+1}.$$

Supomos que $\Gamma^{k_0} = X^{k_0}$*, e para* $l > k_0$*,* $\Gamma^l \subset X^l$ *é construída a partir de* Γ^{l-1} *pelo acréscimo de alguns pontos de* $X^l \setminus X^{l-1}$*. Vamos denotar por* $\Lambda^{l-1} = \Gamma^l \setminus \Gamma^{l-1}$ *o conjunto que contém estes pontos novos.*

Vamos assumir que $N_{k_0} > 2M$, para evitar interação entre as fronteiras do intervalo. Lembremos que N_{k_0} é o número de células da malha mais grossa e M é a ordem do esquema de aproximação utilizado no refinamento interpolatório em malhas regulares.

Em análise wavelet as malhas que formam um cone (veja definição a seguir) de são de particular interesse pois, como já observamos, elas estão associadas aos coeficientes wavelet significativos de funções que possuem singularidades locais isoladas. Por isso, consideramos malhas Γ^k que satisfaçam essa condição.

Definição 3.2 *Condição do Cone: Sejam ρ um número inteiro positivo e $\Gamma^k = \Gamma^{k_0} \cup (\cup_{l=k_0}^{k-1} \Lambda^l)$ uma malha como na definição 3.1. Γ^k satisfaz a ρ – condição do cone se para cada $\mu = (2j-1)2^{-l-1} \in \Lambda^l,\ k_0 \leq l \leq k-1$, os 2ρ pontos de X^l mais próximos de μ estão em Γ^k.*

A condição do cone garante então, que a transição entre o menor e o maior nível não seja abrupta.

Na Figura 3.1 apresentamos a malha irregular $\Gamma = X^3 \cup \Lambda^3 \cup \Lambda^4 \cup \Lambda^5 \subset X^6$, satisfazendo a condição do cone com $\rho = 2$.

Numa malha irregular o conceito de escala local associada a um ponto de Γ^k é muito importante.

Definição 3.3 *Para cada ponto $\mu \in \Gamma^k$ associamos o número $a^k(\mu)$ que chamamos de escala local associada a μ, e que definimos como a distância entre μ e seu vizinho mais próximo em Γ^k, isto é,*

$$a^k(\mu) \;=\; \inf \{|\mu - \nu| : \ \nu \in \Gamma^k, \nu \neq \mu\}.$$

Supondo que Γ^k satisfaz a ρ-condição do cone, $\rho \geq 1$, segue imediatamente desta definição as propriedades

1. $2^{-k} \leq a^k(\mu) \leq 2^{-k_0}$.
2. Existe l, $k_0 \leq l \leq k$, tal que $a^k(\mu) = 2^{-l}$.
3. Seja $k' = \inf\{s : \ \mu \in \Gamma^s\}$. Para cada $\mu \in \Gamma^k$ fixo , $a^s(\mu)$ é uma função decrescente de $s,\ k' \leq s \leq k$.
4. Se $\mu \in \Lambda^l$, então
$$a^{l+1}(\mu) \leq 2^{-l-1}. \tag{3.1}$$

Vamos construir análises de multi-resolução para discretizações numa malha Γ^k. Estudaremos dois tipos de discretizações, f^k e $\bar{f}^k$. O primeiro tipo contém como informação os valores pontuais em Γ^k e o outro as médias celulares de uma função f em subintervalos definidos pela malha Γ^k.

Figura 3.1: $\Gamma = X^3 0 \cup \Lambda^3 \cup \Lambda^4 \cup \Lambda^5$

3.2 Análise de Multi-resolução para Valores Pontuais

Nesta seção consideraremos discretizações f^k de uma função f nos pontos da malha irregular Γ^k. Vamos construir uma análise de multi-resolução para f^k. Os conceitos e métodos descritos a seguir são uma adaptação ao intervalo daqueles introduzidos em [24] para malhas irregulares da reta. Deste modo, as contruibuições originais desta seção consistem na generalização de algumas das propriedades e teoremas demonstradas por F. Plantevin. Como em nosso caso a malha está definida em um intervalo, devemos levar em conta os pontos da fronteira quando formos generalizar aquelas propriedades e teoremas, que conforme veremos é bastante trabalhosa. Em particular, destacamos o Teorema 3.1, que nos fornece uma estimativa para o tamanho do suporte da função escala interpolatória. Este resultado é uma generalização do teorema demonstrado por F. Plantevin em [24], que fornece uma estimativa para o tamanho do suporte da função escala interpolatória de uma malha irregular da reta.

3.2.1 Discretização

Neste caso $(\mathcal{D}^k f)_\mu = f^k_\mu$ são os valores pontuais de uma função f sobre a malha Γ^k,

$$f^k_\mu = f(\mu), \quad \mu \in \Gamma^k.$$

3.2.2 Reconstrução

Uma reconstrução conservativa $\mathcal{I}^k(x; f^k)$ para valores pontuais deve interpolar f na malha Γ^k, isto é,

$$\mathcal{I}^k(\mu; f^k) \;\; = \;\; f^k_\mu, \quad \mu \in \Gamma^k.$$

Como no caso de malha regular, a definição de $\mathcal{I}^k(x; f^k)$ será feita inicialmente para os pontos diádicos e depois por limite.

Definição 3.4 *Dados os valores pontuais, f^k_μ, $\mu \in \Gamma^k$, definimos*

1. *Para $\nu \in X^{k_0}$*

$$s^{k_0}(\nu) := \mathcal{I}^k(\nu; f^k) = f^{k_0}_\nu.$$

2. *Para $\nu \in X^{l+1}$, $k_0 \leq l \leq k-1$,*

$$s^{l+1}(\nu) := \mathcal{I}^k(\nu; f^k) = \begin{cases} f^k_\nu, & \nu \in \Lambda^l \\ P_l^{l+1} s^l(\nu), & \nu \in X^{l+1} \setminus \Lambda^l. \end{cases}$$

3. *Para* $\nu \in X^{l+1},\ l > k-1$,

$$s^{l+1}(\nu) := I^k(\nu; f^k) = P_l^{l+1} s^l(\nu),$$

onde P_l^{l+1} *é o operador de refinamento interpolatório da Definição 2.5.*

Observemos que:

1. A Definição 3.4 difere da Definição 2.6 apenas com relação aos pontos diádicos de X^k. Como para os diádicos de $X^l,\ l \geq k+1$ a definição segue os mesmos passos do esquema em malha regular, a passagem ao limite para pontos não diádicos segue também da mesma maneira. Conseqüentemente, pelo item 3 da Definição 3.4, vale a seguinte representação

$$\mathcal{I}^k(x; f^k) = I^k(x; \tilde{f}^k) = \sum_{\nu \in X^k} \tilde{f}_\nu^k \phi_\nu^k(x), \tag{3.2}$$

   onde $\tilde{f}_\nu^k = \mathcal{I}^k(\nu; f^k),\ \nu \in X^k$.

2. $\mathcal{I}^k(x; f^k)$ satisfaz a seguinte relação

$$\mathcal{I}^k(x; f^k) = \mathcal{I}^{k+1}(x; \mathcal{D}^{k+1}\mathcal{I}^k(.; f^k)). \tag{3.3}$$

3.2.3 Aspecto Discreto

Algoritmos de Análise e Síntese

A diferença de informação entre o nível l e $l+1$ também é definida pelo erro de interpolação

$$d_\mu^l = f_\mu^{l+1} - \mathcal{I}^l(\mu; f^l).$$

Desta forma, os algoritmos de análise e síntese são basicamente os mesmos do caso regular. Basta substituir X^l por Γ^l, $X^{l+1} \setminus X^l$ por Λ^l e o operador I^l por $\mathcal{I}^l$.

- **Análise** - $f^{k+1} \to (f^{k_0}, d^{k_0}, \ldots d^k)$
  Para $l = k, k-1, \ldots, k_0$ *façamos*
  – *Para* $\mu \in \Gamma^l$

$$f_\mu^l \;=\; f_\mu^{l+1}$$

– *Para $\mu \in \Lambda^l$, calculamos*

$$d_\mu^l = f_\mu^{l+1} - \mathcal{I}^l(\mu; f^l).$$

- **Síntese** - $(f^{k_0}, d^{k_0}, \ldots, d^k) \to f^{k+1}$
  Para $l = k_0, \ldots, k$ façamos
  - *Para $\mu \in \Gamma^l$*

$$f_\mu^{l+1} = f_\mu^l$$

  - *Para $\mu \in \Lambda^l$ calculamos*

$$f_\mu^{l+1} = \mathcal{I}^l(\mu; f^l) + d_\mu^l.$$

3.2.4 Aspecto Funcional

Para caracterizarmos o operador de multi-resolução sob o ponto de vista funcional vamos inicialmente definir as funções escala e wavelet.

Funções Escala

Para $\mu \in \Gamma^k$, definimos a função escala $\Phi_\mu^k(x)$ por

$$\Phi_\mu^k(x) = \mathcal{I}^k(x; \delta_{\mu\nu}^k),$$

onde para $\nu \in \Gamma^k$,

$$\delta_{\mu\nu}^k = \begin{cases} 1, & \nu = \mu, \\ 0, & \nu \neq \mu. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{V}^k$ o espaço gerado pelas funções escala $\Phi_\mu^k(x),\ \mu \in \Gamma^k$.

Segue diretamente da definição do operador de reconstrução as seguintes propriedades das funções escalas, $\Phi_\mu^k(x)$.

1. *Interpolatória*: $\Phi_\mu^k(\nu) = \delta_{\mu,\nu}^k$, $\mu,\ \nu \in \Gamma^k$, ou seja,

$$< \delta_{\mu\nu}^k, \Phi_\mu^k >= \int_0^1 \Phi_\mu^k(x)\delta(x - \nu)dx = \Phi_\mu^k(\nu) = \delta_{\mu\nu}.$$

2. *Regularidade*: Devido a igualdade (3.2) segue que as funções escalas $\Phi^k_\mu(x)$ herdam as propriedades de regularidade das funções escala interpolatórias $\phi^k_\mu(x)$ do caso regular.

3. *Relação de Escala*: Segue de (3.3) que $\Phi^k_\mu(x)$ satisfaz a seguinte relação de escala

$$\Phi^k_\mu(x) = \sum_{\nu \in \Gamma^{k+1}} c^k(\mu,\nu)\Phi^{k+1}_\nu(x)$$

   onde $c^k(\mu,\nu) = \Phi^k_\mu(\nu)$.

4. *Reprodução de Polinômios*: Os polinômios de grau menor ou igual a $M-1$ são reproduzidos por $\Phi^k_\mu(x)$, ou seja,

$$x^n = \sum_{\mu \in \Gamma^k} \mu^n \Phi^k_\mu(x),\ n = 0,1,\ldots,M-1. \tag{3.4}$$

5. Seja $\mu \in \Lambda^l$, $k_0 \leq l \leq k-1$. Temos que para todo $x \in X^{l+1}$,

$$\Phi^k_\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \neq \mu, \\ 1, & x = \mu. \end{cases} \tag{3.5}$$

   Portanto, se $l = k-1$ então $\Phi^k_\mu(x) = \phi^k_\mu(x)$.

6. *Suporte*: O suporte de $\Phi^k_\mu(x)$ é influenciado pela escala local $a^k(\mu)$ e, por isso ao estimarmos o seu tamanho requer-se um pouco mais de elaboração. Aqui, simplesmente enunciaremos este resultado, cuja demonstração faremos numa seção posterior.

   Teorema 3.1 *Seja Γ^k uma malha satisfazendo a ρ-condição do cone com $\rho \geq M+1$ e que inclua os M pontos de X^k mais próximos às fronteiras. Então existe uma constante $C = C(M,\rho)$ tal que para todo $\mu \in \Gamma^k$, $a^k(\mu) = 2^{-l_0}$, o suporte de $\Phi^k_\mu(x)$ está contido em $[\mu - Ca^k(\mu)\ ,\ \mu + Ca^k(\mu)] \cap \mathcal{I}$.*

Funções Wavelet

Seja $\mu \in \Lambda^k$. Por definição, $\Phi^{k+1}_\mu(\nu) = 0$ para todo $\nu \in \Gamma^{k+1} \setminus \{\mu\}$. Logo, pela definição do operador de reconstrução interpolatório, obtemos que $\Phi^{k+1}_\mu(\nu) = 0$ para todo $\nu \in X^{k+1} \setminus \{\mu\}$. Este fato implica que as funções básicas $\Phi^{k+1}_\mu(x)$ e $\phi^{k+1}_\mu(x)$ associadas aos pontos $\mu \in \Lambda^k$ coincidem. Portanto, definimos

$$\psi^k_\mu(x) = \Phi^k_\mu(x) = \phi^{k+1}_\mu(x).$$

Seja $\mathcal{W}^k$ o espaço gerado pelas funções $\psi_\mu^k(x),\ \mu \in \Lambda^k$. Analogamente ao caso regular segue que $\mathcal{V}^{k+1}$ é soma direta de $\mathcal{V}^k$ e $\mathcal{W}^k$, e vale a representação

$$\sum_{\mu \in \Gamma^{k+1}} f_\mu^{k+1} \Phi_\mu^{k+1}(x) = \sum_{\mu \in \Gamma^k} f_\mu^k \Phi_\mu^k(x) + \sum_{\mu \in \Lambda^k} d_\mu^k \psi_\mu^k(x). \tag{3.6}$$

Ou seja, sob o ponto de vista funcional a transformação $\{f^{k+1}\} \leftrightarrow \{f^k, d^k\}$ corresponde à mudança de base entre $\{\Phi_\mu^{k+1}\}$ e $\{\Phi_\mu^k\} \cup \{\psi_\mu^k\}$. Aplicando iterativamente (3.6), e observando que $\Phi_\mu^{k_0}(x) = \phi_\mu^{k_0}(x)$, obtemos a decomposição em multiescala

$$\sum_{\mu \in \Gamma^{k+1}} f_\mu^{k+1} \Phi_\mu^{k+1}(x) = \sum_{\mu \in \Gamma^{k_0}} f_\mu^{k_0} \phi_\mu^{k_0}(x) + \sum_{l=k_0}^{k} \sum_{\mu \in \Lambda^l} d_\mu^l \psi_\mu^l(x), \tag{3.7}$$

que corresponde à soma direta

$$\mathcal{V}^{k+1} = V^{k_0} + \mathcal{W}^{k_0} + \ldots + \mathcal{W}^k.$$

Observações:

1. Se Γ^k satisfizer a condição do cone com $\rho \geq M/2$, então para um ponto $\mu \in \Lambda^l$, $k_0 \leq l \leq k-1$, os M pontos em X^l mais próximos de μ também estão em Γ^l. Portanto, para o cálculo de $\mathcal{I}^l(\mu; f^l)$ interpolamos os mesmos valores do esquema de refinamento interpolatório regular , que estão disponíveis em Γ^l. Portanto, o coeficiente

$$d_\mu^l = f_\mu^{l+1} - \mathcal{I}^l(\mu; f^l) = f_\mu^{l+1} - I^l(\mu; f^l)$$

é o mesmo coeficiente wavelet do caso regular.

2. Notemos que as funções básicas do segundo membro da igualdade (3.7) correspondem àquelas obtidas na análise de multi-resolução baseada numa malha regular. Isto significa que $\mathcal{V}^{k+1} \subset V^{k+1}$ é gerado por $\{\phi_\mu^{k_0}\}$ e pelas wavelets $\{\psi_\mu^l\}$ associadas aos pontos $\mu \in \Lambda^l,\ k_0 \leq l \leq k$. Neste sentido, se $\rho \geq M/2$, a representação (3.7) pode ser interpretada como o resultado de uma representação em multi-resolução baseada na malha regular X^{k+1} de uma função f, seguida pela compressão dos coeficientes wavelet, ou seja, depois de descartarmos os coeficientes wavelet associados aos pontos $\nu \in X^{l+1} \setminus \{X^l \cup \Lambda^l\}$.

Para a estimativa de suporte enunciada no Teorema 3.1 adaptaremos as idéias de F. Plantevin em [24] para o contexto de malhas irregulares no intervalo. Para estimarmos o tamanho do suporte das funções escala, vamos inicialmente, deduzir alguns resultados que serão de utilidade. Para os próximos quatro resultados assumimos que Γ^k satisfaz a condição do cone com $\rho \geq 1$. Isto garante que se $\mu \in \Lambda^l$ então $a^k(\mu) \leq 2^{-l-1}$, conforme (3.1).

Lema 3.1 *Se* $\mu \in \Gamma^k$ *e* $a^k(\mu) = 2^{-l_0}$, $k_0 \leq l_0 \leq k$ *então* $\mu \in \Gamma^{l_0}$.

Demonstração: Para $l_0 = k$, claramente $\mu \in \Gamma^{l_0} = \Gamma^k$. Se $\mu \notin \Gamma^{k_0} = X^{k_0}$, então $j2^{-k_0} < \mu < (j+1)2^{-k_0}$ para algum $0 \leq j \leq 2^{k_0} - 1$. Isto implica que $a^k(\mu) < 2^{-k_0}$. Logo, para $l_0 = k_0$, segue que $\mu \in \Gamma^{l_0} = \Gamma^{k_0}$. Para $k_0 < l_0 < k$, existe $l_1 \leq k - 1$ tal que $\mu \in \Lambda^{l_1 - 1} \subset \Gamma^{l_1}$. Conseqüentemente, $a^k(\mu) = 2^{-l_0} \leq 2^{-l_1}$. Logo, $l_1 \leq l_0$ o que implica $\mu \in \Gamma^{l_1} \subseteq \Gamma^{l_0}$. $\square$

Utilizaremos os conjuntos disjuntos $\mathcal{E}_l$, $\mathcal{C}_l$ e $\mathcal{D}_l$, $k_0 \leq l \leq k$ que definimos por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_l &= \{j2^{-l} : j = 0, \ldots, 2\rho - 1\}, \\
\mathcal{C}_l &= \{j2^{-l} : j = 2\rho, \ldots, 2^l - 2\rho\}, \\
\mathcal{D}_l &= \{j2^{-l} : j = 2^l - 2\rho + 1, \ldots, 2^l\},
\end{aligned}
$$

de tal forma que $X^l = \mathcal{E}_l \cup \mathcal{C}_l \cup \mathcal{D}_l$.

Lema 3.2 *Seja* $\mu \in \Gamma^k$, *com* $a^k(\mu) = 2^{-l_0}$.

1. *Se* $\mu \in \mathcal{E}_{l_0}$, *então* $\mathcal{E}_{l_0 - r} \subset \Gamma^{l_0 - r}$, $1 \leq r \leq l_0 - k_0$ *e* $a^k(\xi) \leq 2^{-l_0 + r}$, *para todo* $\xi \in \mathcal{E}_{l_0 - r}$.

2. *Se* $\mu \in \mathcal{D}_{l_0}$, *então* $\mathcal{D}_{l_0 - r} \subset \Gamma^{l_0 - r}$, $1 \leq r \leq l_0 - k_0$ *e* $a^k(\xi) \leq 2^{-l_0 + r}$, *para todo* $\xi \in \mathcal{D}_{l_0 - r}$.

Demonstração: Segue do Lema 3.1 que $\mu \in \Gamma^{l_0}$.

1. $\mu \in \mathcal{E}_{l_0}$.
   Se $\mu \in \Lambda^{l_0 - 1}$, podemos escrever $\mu = (2p-1)2^{-l_0}$, $1 \leq p \leq \rho$. Neste caso, é fácil ver que o conjunto dos 2ρ pontos de X^{l_0-1} mais próximos de μ é igual a $\mathcal{E}_{l_0-1}$. Se $\mu \in \Gamma^{l_0-1}$, escrevemos $\mu = 2p2^{-l_0}$, $0 \leq p \leq \rho - 1$. Como $a^k(\mu) = 2^{-l_0}$, pela definição de escala local $\mu^- = (2p-1)2^{-l_0}$ ou $\mu^+ = (2p+1)2^{-l_0}$ está em Γ^k, e logo em Λ^{l_0-1}. Em ambos os casos, o conjunto dos 2ρ pontos de X^{l_0-1} mais próximos de μ^- ou de μ^+ também é igual a $\mathcal{E}_{l_0-1}$. Pela condição do cone segue que $\mathcal{E}_{l_0-1} \subset \Gamma^{l_0-1}$. Seja $\tau_1 = (2\rho-1)2^{-l_0+1}$, o último ponto de $\mathcal{E}_{l_0-1}$. Como $\tau_1 \in \Lambda^{l_0-2}$, por um procedimento

análogo ao utilizado acima, obtemos que os 2ρ pontos de X^{l_0-2} mais próximos de τ_1 são os pontos de $\mathcal{E}_{l_0-2} \subset \Gamma^{l_0-2}$. Indutivamente, para $1 \leq r \leq l_0 - k_0$ consideramos $\tau_r = (2\rho-1)2^{-l_0+r} \in \Lambda^{l_0-r-1}$ o último ponto de $\mathcal{E}_{l_0-r}$. Pela condição do cone, os 2ρ pontos de X^{l_0+r-1} mais próximos de τ_r formam $\mathcal{E}_{l_0-r-1} \subset \Gamma^{l_0-r-1}$. Conseqüentemente, segue que $a^k(\xi) \leq 2^{-l_0+r}$, para todo $\xi \in \mathcal{E}_{l_0-r}$.

2. $\mu \in \mathcal{D}_{l_0}$
   Neste caso, a demonstração é análoga ao caso (1). □

No próximo lema estimamos a distância entre dois pontos de Γ^k.

Lema 3.3 *Sejam* $\mu,\ \nu \in \Gamma^k$ *tais que* $a^k(\mu) = 2^{-l_0}$ *e* $a^k(\nu) = 2^{-m}$, *onde* $k_0 \leq l_0 \leq k$ *e* $k_0 \leq m \leq l_0 - 2$. *Nestas condições segue que*

$$|\mu - \nu| \geq (\rho-1)2^{-m}(1 - 2^{-l_0+m+1}). \tag{3.8}$$

Demonstração: A estimativa da distância entre μ e ν depende da posição de μ em X^{l_0}.

1. $\mu \in \mathcal{E}_{l_0}$.
   Temos duas possibilidades para ν.

   (a) $\nu \in \cup_{r=0}^{l_0-k_0} \mathcal{E}_{l_0-r}$.
   Pelo Lema 3.2-1, $\mathcal{E}_{l_0-1} \subset \Gamma^{l_0-1}$ e os pontos $\xi \in \mathcal{E}_{l_0-1}$ possuem escala menor ou igual 2^{-l_0+1}. Conseqüentemente, os pontos ξ de $\Gamma^k \cap \mathcal{E}_{l_0}$ também possuem escala $a^k(\xi) \leq 2^{-l_0+1}$. Como $a^k(\nu) = 2^{-m} \geq 2^{-l_0+2}$, então $\nu \notin \mathcal{E}_{l_0} \cup \mathcal{E}_{l_0-1}$. Portanto, $\nu \in \cup_{r=2}^{l_0-k_0} [\mathcal{E}_{l_0-r} \setminus \mathcal{E}_{l_0-r+1}]$. Seja $\bar{r} \geq 2$, tal que $\nu \in \mathcal{E}_{l_0-\bar{r}} \setminus \mathcal{E}_{l_0-\bar{r}+1}$. Como $\nu > \tau_{\bar{r}-1} = (2\rho-1)2^{-l_0+\bar{r}-1}$,

$$\begin{aligned} \nu - \mu &\geq \tau_{\bar{r}-1} - \tau_0 \\ &= (2\rho-1)(2^{-l_0+\bar{r}-1} - 2^{-l_0}). \end{aligned}$$

   Pelo Lema 3.2-1, $2^{-l_0+\bar{r}} \geq a^k(\nu) = 2^{-m}$, donde $m \geq l_0 - \bar{r}$ e, conseqüentemente

$$\begin{aligned} \nu - \mu &\geq (2\rho-1)(2^{-m-1} - 2^{-l_0}) \\ &= (\rho - 1/2)2^{-m}(1 - 2^{-l_0+m+1}). \end{aligned}$$

(b) $\nu \notin \cup_{r=0}^{l_0-k_0} \mathcal{E}_{l_0-r}$.
Neste caso, $\nu > \tau_{l_0-m}$, onde τ_{l_0-m} é o último ponto de $\mathcal{E}_m$. De fato, $\nu \leq \tau_{l_0-m}$ implicaria $a^k(\nu) < 2^{-m}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\nu - \mu &> \tau_{l_0-m} - \tau_0 \\
&= (2\rho - 1)(2^{-m} - 2^{-l_0}) \\
&= (\rho - 1/2)(2^{-m+1} - 2^{-l_0+1}) \\
&= (\rho - 1/2)2^{-m}(2 - 2^{-l_0+m+1}).
\end{aligned}$$

2. $\mu \in \mathcal{C}_{l_0}$.
Temos duas possibilidades para ν: $\nu < \mu$ ou $\nu > \mu$. Vamos provar (3.8) para $\nu < \mu$. A demonstração para $\nu > \mu$ é análoga. Se $\mu \in \Lambda^{l_0-1}$, isto é, $\mu = (2p-1)2^{-l_0}$, $\rho + 1 \leq p \leq 2^{l_0-1} - \rho$, pela condição do cone, o conjunto $\mathcal{J}^\mu = \{j2^{-l_0+1} : j = p-\rho, \ldots, p+\rho-1\}$ dos 2ρ pontos de X^{l_0-1} mais próximos de μ está contido em Γ^{l_0-1}. Se $\mu \in \Gamma^{l_0-1}$, escrevemos $\mu = 2p2^{-l_0}$, $\rho \leq p \leq 2^{l_0-1} - \rho$. Como $a^k(\mu) = 2^{-l_0}$, pela definição de escala local, $\mu^- = (2p-1)2^{-l_0}$ ou $\mu^+ = (2p+1)2^{-l_0}$ está em Γ^k e logo em Λ^{l_0-1}. Novamente, pela condição do cone, o conjunto $\mathcal{J}^\mu = \{j2^{-l_0+1} : j = p-\rho, \ldots, p-1+\rho\}$ ou $\mathcal{J}^\mu = \{j2^{-l_0+1} : j = p-\rho+1, \ldots, p+\rho\}$ está contido em Γ^{l_0-1}. Em qualquer dos casos, segue que $a^k(\xi) \leq 2^{-l_0+1}$ para todo $\xi \in \mathcal{J}^\mu$. Conseqüentemente, $\nu \notin \mathcal{J}^\mu$ e nem está entre dois pontos de $\mathcal{J}^\mu$. Logo devemos ter $0 \leq \nu < \eta_1$, onde η_1 é o primeiro elemento de $\mathcal{J}^\mu$. Repetimos o argumento acima para η_1. Se $\eta_1 = (2q-1)2^{-l_0+1}$ teremos $\mathcal{J}^{\eta_1} = \{j2^{-l_0+2} : j = q-\rho, \ldots, q+\rho-1\} \cap X^{l_0-2} \subset \Gamma^{l_0-2}$, e se $\eta_1 = 2q2^{-l_0+1} \in \Gamma^{l_0-2}$ teremos que $\mathcal{J}^{\eta_1} = \{j2^{-l_0+2} : j = q-\rho+1, \ldots, q+\rho\} \cap X^{l_0-2} \subset \Gamma^{l_0-2}$, de tal forma que $a^k(\xi) \leq 2^{-l_0+2}$ para todo $\xi \in \mathcal{J}^{\eta_1}$. Se $\nu \in \mathcal{J}^{\eta_1}$ ou ν está entre dois pontos de $\mathcal{J}^{\eta_1}$, então $2^{-m} = a^k(\nu) \leq 2^{-l_0+2}$, o que implica que $m = l_0 - 2$. Portanto,

$$\mu - \nu \geq \mu - \eta_1 \geq (\rho - 1)2^{-l_0+1}.$$

Caso contrário, seja η_2, o menor elemento de $\mathcal{J}^{\eta_1}$ de tal forma que $\nu < \eta_2 < \eta_1$, com $\eta_1 - \eta_2 \geq (\rho-1)2^{-l_0+2}$. Indutivamente, se $\eta_0 = \mu$, para $r \geq 0$ teremos $\nu < \eta_{r+1} < \eta_r$ com $\eta_r - \eta_{r+1} \geq (\rho-1)2^{-l_0+r+1}$. O processo terminará quando $r = l_0 - m - 2$. Logo

$$\begin{aligned}
\mu - \nu &\geq \mu - \eta_{l_0-m-1} \\
&= (\mu - \eta_1) + (\eta_1 - \eta_2) + \ldots + (\eta_{l_0-m-2} - \eta_{l_0-m-1}) \\
&\geq (\rho-1)2^{-l_0+1} + (\rho-1)2^{-l_0+2} + \ldots + (\rho-1)2^{-m-1} \\
&= (\rho-1)2^{-m}(2^{m-l_0+1} + 2^{m-l_0+2} + \ldots + 2^{-2} + 2^{-1})
\end{aligned}$$

$$= \quad (\rho-1)2^{-m}(1-2^{-l_0+m+1}).$$

3. $\mu \in \mathcal{D}_0$.
   A demonstração de (3.8) é análoga ao caso em que $\mu \in \mathcal{E}_0$. $\square$

A distância entre $\mu \in \Gamma^k$ e um ponto ν em $X^m \setminus \Gamma^k,\ m \leq l_0 - 1$ também pode ser estimada, seguindo os mesmos passos da demonstração do lema anterior.

Corolário 3.1 *Sejam $\mu \in \Gamma^k$ tal que $a^k(\mu) = 2^{-l_0}$ e $\nu \in X^m \setminus X^{m-1},\ m \leq l_0 - 1$. Então,*

$$|\mu - \nu| \geq (\rho-1)2^{-m}(1-2^{-l_0+m+1}).$$

Por construção sabemos que $\Phi^k_\mu(x)$ pertence a V^k. Mais precisamente, no próximo lema demonstraremos que $\Phi^k_\mu(x) \in V^{l_0+1}$, onde l_0 é o nível associado a escala local de μ. Para isto é necessário ser mais exigente na condição do cone.

Lema 3.4 *Suponhamos que Γ^k satisfaz a ρ-condição do cone com $\rho \geq M+1$. Seja $\mu \in \Gamma^k$ com $a^k(\mu) = 2^{-l_0}$. Nestas condições, $\Phi^k_\mu(x) \in V^{l_0+1}$, isto é,*

$$\Phi^k_\mu(x) = \sum_{\nu \in X^{l_0+1}} \Phi^k_\mu(\nu)\phi^{l_0+1}_\nu(x). \tag{3.9}$$

Demonstração: Definimos

$$f(x) = \sum_{\nu \in X^{l_0+1}} \Phi^k_\mu(\nu)\phi^{l_0+1}_\nu(x),\ x \in \mathcal{I}. \tag{3.10}$$

Vamos mostrar que $f(x) = \Phi^k_\mu(x)$ para todo $x \in \Gamma^k$. Para $x \in \Gamma^k \cap X^{l_0+1}$, segue que $f(x) = \Phi^k_\mu(x)$. Vamos provar que isto também é verdadeiro para $x \in \Gamma^k \setminus X^{l_0+1}$. Como $\mu \in \Gamma^{l_0}$, x deve ser diferente de μ. Segue então que $\Phi^k_\mu(x) = 0$. Suponhamos por absurdo que $f(x) \neq 0$. De (3.10) obtemos então que para algum $\nu \in X^{l_0+1}$, $\Phi^k_\mu(\nu) \neq 0$ e $\phi^{l_0+1}_\nu(x) \neq 0$. Pelas propriedades do suporte de $\phi^{l_0+1}_\nu$ da Seção 2.2.4 segue que

$$|x-\nu| \leq (M-1)2^{-l_0-1}. \tag{3.11}$$

Por outro lado, $\Phi_\mu^k(\nu) \neq 0$ implica que $\nu = \mu$ ou $\nu \notin \Gamma^k$. Se $\nu = \mu$ então $a^k(\nu) = 2^{-l_0}$. Como $x \in \Gamma^k \setminus X^{l_0+1}$, temos que $a^k(x) = 2^{-l'}$ com $l' \geq l_0 + 2$. Do Lema 3.3 segue que

$$|x - \nu| \geq (\rho - 1)2^{-l_0-1}. \tag{3.12}$$

Como $\rho \geq M+1$, a desigualdade (3.11) é incompatível com (3.12). Logo, $\nu \notin \Gamma^k$. Escrevendo $a^k(x) = 2^{-l_0-1-p}$ com $p \geq 1$, e aplicando o Corolário 3.1 obtemos também que

$$|x - \nu| \geq 3(\rho - 1)2^{-l_0-1}, \tag{3.13}$$

que também é incompatível com (3.11). Portanto, para $x \in \Gamma^k \setminus X^{l_0+1}$ devemos ter $f(x) = 0$, isto é, $f(x) = \Phi_\mu^k(x)$. □

No próximo lema provaremos que o suporte de Φ_μ^k contém somente pontos $\nu \in X^m \setminus X^{m-1}$ com $m \geq l_0 - N + 1$, onde N depende somente de ρ e M. No caso de uma malha irregular na reta este resultado é verdadeiro se $\rho \geq M + 1$. No caso de uma malha irregular no intervalo, só esta condição não é suficiente. Devemos tomar alguns cuidados próximo às fronteiras, onde o estêncil de interpolação não é centrado. Para evitar, problemas deste tipo incluímos em Γ^k os M pontos de X^k mais próximos às fronteiras.

Lema 3.5 *Seja Γ^k uma malha satisfazendo a ρ-condição do cone com $\rho \geq M + 1$ e que inclua os M pontos de X^k mais próximos às fronteiras. Então, existe $N = N(\rho,\ M)$ tal que para todo $\mu \in \Gamma^k$, $a^k(\mu) = 2^{-l_0}$, o suporte de $\Phi_\mu^k(x)$ contém pontos de $\nu \in X^m \setminus X^{m-1}$, $\nu \neq \mu$ somente para $m \geq l_0 - N + 1$.*

Demonstração: Se $\nu \in \Gamma^k$ e $\nu \neq \mu$, segue que $\Phi_\mu^k(\nu) = 0$. Então, podemos assumir que $\nu \notin \Gamma^k$. Vamos considerar três casos:

1. $0 \leq \mu \leq (M-1)2^{-k}$.
   Como os M pontos de X^k mais próximos as fronteiras estão em Γ^k, segue que $a^k(\mu) = 2^{-k}$. Neste caso, provaremos que $\Phi_\mu^k(\nu) = 0$ para todo $\nu \neq \mu$, $\nu \in X^m$, $m \leq k - 1$. Seja

   $$\mathcal{F}^p = \{\nu = (2j-1)2^{-m} : k_0 + 1 \leq m \leq k - 1,\ 1 < j \leq p\} \cap \mathcal{I}.$$

   Para $p = \rho$, segue que $\mathcal{F}^p = \cup_{m=k_0+1}^{k-1} \mathcal{E}_m$. Pelo Lema 3.2 sabemos que $\mathcal{E}_m \subset \Gamma^k$. Portanto, $\Phi_\mu^k(\nu) = 0$, para todo $\nu \in \mathcal{F}^p$, $\nu \neq \mu$. Por indução sobre p, provaremos que isto é verdadeiro para todo $\rho \leq p \leq 2^{k_0} - M/2 + 1$. Seja $\nu = (2p+1)2^{-m} \in \mathcal{F}^{p+1} \setminus \mathcal{F}^p$.

Logo, $\Phi_\mu^k(\nu)$ é obtido pela interpolação dos valores $\Phi_\mu^k(\xi)$, $\xi \in S_\nu^{m-1} = \{\xi \in X^{m-1} : \xi = \nu + (2i+1)2^{-m},\ -M/2 \leq i \leq M/2 - 1\}$. Observe que o estêncil S_ν^{m-1}, é centrado em torno de ν. Neste caso, $\Phi_\mu^k(\xi) = 0$ para todo $\xi \in S_\nu^{m-1}$. De fato, pois

(a) $\xi > \mu$, para todo $\xi \in S_\nu^{m-1}$. Basta lembramos que $\nu > 2\rho 2^{-m}$, $m \leq k-1$ e que $\rho \geq M+1$. Desta forma segue que:

$$\begin{aligned} \xi &\geq \nu - (M-1)2^{-m} \\ &> (2\rho - M + 1)2^{-m} \\ &\geq (2\rho - M + 1)2^{-l_0+1} = (4\rho - 2M + 2)2^{-k} \\ &\geq (2\rho + 4)2^{-k} > 2\rho 2^{-k} > \mu. \end{aligned}$$

(b) $S_\nu^{m-1} \subset \mathcal{F}^p$, isto é, $\xi < (2p-1)2^{-m+1}$. Como $\xi \leq \nu + (M-1)2^{-m} = (2p+M)2^{-m}$, devemos verificar que $(2p+M)2^{-m}$ é menor que o último ponto de $\mathcal{F}^p$ associado ao nível $m-1$, ou seja, $(2p+M)2^{-m} < (2p-1)2^{-m+1}$. Mas esta desigualdade é claramente verdadeira pois $p \geq \rho \geq M+1$.

Seja $\nu \in \mathcal{D}_{NC}^m$, onde

$$\mathcal{D}_{NC}^m = \{j2^{-m} : \ j = 2^m - (M-1), \ldots, 2^m\}, \quad m \leq k,$$

é o conjunto dos M pontos de X^m mais próximos a fronteira superior de $\mathcal{I}$. Por hipótese sabemos que $\mathcal{D}_{NC}^m \subset \Gamma^k$. Logo, para todo $\nu \in \mathcal{D}_{NC}^m$, $\Phi_\mu^k(\nu) = 0$. Falta verificar que $\Phi_\mu^k(\nu) = 0$ para os pontos ν entre os pontos de $\mathcal{F}^{2^{k_0} - M/2+1}$ e de $\cup_{m=k_0}^{k-1} \mathcal{D}_{NC}^m$. Seja $\nu = (2j-1)2^{-m}$, $k_0 + 1 \leq m \leq k-1$. Para $m = k_0 + 1$ temos que o estêncil que contém os pontos de interpolação $S_\nu^{m-1} \subset X^{k_0}$ estão em $\mathcal{F}^{2^{k_0} - M/2+1}$ ou em $\mathcal{D}_{NC}^{k_0}$, donde segue que $\Phi_\mu^k(\xi) = 0$ para todo $\xi \in S_\nu^{m-1}$. Conseqüentemente, $\Phi_\mu^k(\nu) = 0$. Para $m = k_0 + 2$, os pontos de S_ν^{m-1} estão em $\mathcal{F}^{2^{k_0} - M/2+1}$ ou em $\mathcal{D}_{NC}^{k_0+1}$ ou são os pontos ν considerados anteriormente. Logo, neste caso, também $\Phi_\mu^k(\nu) = 0$. Prosseguindo desta forma, obtemos que para todo $\nu \notin \mathcal{F}^p \cup_{m=k_0}^{k-1} \mathcal{D}_{NC}^m$, $\Phi_\mu^k(\nu) = 0$.

Portanto, segue que para todo $\nu \in X^m$, $m \leq l_0 - N$, $\Phi_\mu^k(\nu) = 0$ com $N = 1$.

2. $(M-1)2^{-k} < \mu < 1 - (M-1)2^{-k}$.
   Seja $\nu \in X^m \setminus X^{m-1}$ satisfazendo $\Phi_\mu^k(\nu) \neq 0$. Logo, $\Phi_\mu^k(\nu)$ é obtido pela interpolação dos valores $\Phi_\mu^k(\xi)$, $\xi \in S_\nu^{m-1}$, que por hipótese está centrado em torno de μ. Conseqüentemente, existe pelo menos um ponto $\xi_1 \in S_\nu^{m-1}$ tal que $\Phi_\mu^k(\xi_1) \neq 0$. Pelo fato de que $\xi_1 \in S_\nu^{m-1}$, segue que $|\nu - \xi_1| \leq (M-1)2^{-m}$. Observamos que nesta estimativa

estamos usando o fato de que o estêncil é centrado. Se $\xi_1 = \mu$, usando o Corolário 3.1, obtemos que

$$(\rho - 1)2^{-m}(1 - 2^{-l_0+m+1}) \leq |\nu - \mu| \leq (M-1)2^{-m},$$

donde segue que

$$2^{l_0-m-1} \leq \frac{\rho - 1}{\rho - M}.$$

Isto é,

$$m \geq l_0 - log\left(\frac{\rho-1}{\rho-M}\right) - 1.$$

Se $\xi_1 \neq \mu$ repetimos o argumento acima para ξ_1. Como $\xi_1 \notin \Gamma^k$, segue que $\xi_1 \in X^{m_1} \setminus X^{m_1-1}$, $m_1 \leq m-1$. O fato de que $\Phi^k_\mu(\xi_1) \neq 0$ também implica a existência de um ponto $\xi_2 \in S^{m_1-1}_{\xi_1} \subset X^{m_1-1}$ tal que $\Phi^k_\mu(\xi_2) \neq 0$ e $|\xi_1 - \xi_2| \leq (M-1)2^{-m_1}$. Se $\xi_2 = \mu$, pelo Corolário 3.1, temos que $|\xi_1 - \xi_2| \geq (\rho-1)2^{-m_1}(1 - 2^{-l_0+m_1+1})$. Conseqüentemente, $m_1 \geq l_0 + 1 - N$. Ou seja, $\Phi^k_\mu(\xi_1) \neq 0$ para todo $\xi_1 \in X^{m_1} \setminus X^{m_1-1}$, sempre que $m_1 \geq l_0 + 1 - N$. Como $m > m_1$, segue que $m > l_0 + 1 - N$.

Se $\xi_2 \neq \mu$, repetimos o processo acima. Prosseguindo com este tipo de raciocínio obtemos então uma seqüência m_s, $s = 1, \ldots, l_0 - k_0$, associada a cada $\xi_s \neq \mu$, estritamente decrescente. Como $X^{k_0} \subset \Gamma^k$, existe um s tal que $\xi_s = \mu$, $m_s \geq l_0 + 1 - N$. Conseqüentemente, $m > l_0 + 1 - N$.

3. $1 - (M-1)2^{-k} \leq \mu \leq 1$.
   Neste caso, a demonstração é análoga ao caso (1). □

A seguir vamos estimar o tamanho do suporte de $\Phi^k_\mu(x)$.

Demonstração do Teorema 3.1

Se $\mu \in \Lambda^{k-1}$, então $a^k(\mu) = 2^{-k}$ para todo $\mu \in \Gamma^k$ e $\Phi^k_\mu(x) = \phi^k_\mu(x)$. Ou seja, o suporte de Φ^k_μ coincide com o suporte de ϕ^k_μ. Suponhamos, então, que $\mu \notin \Lambda^{k-1}$ e que $a^k(\mu) = 2^{-l_0}$. Pelo Lema 3.4, segue que

$$\Phi^k_\mu(x) = \sum_{\nu \in X^{l_0+1}} \Phi^k_\mu(\nu)\phi^{l_0+1}_\nu(x).$$

Seja $A = \{\nu \in X^{l_0+1} : \Phi^k_\mu(\nu) \neq 0\}$ o conjunto dos pontos de X^{l_0+1} que estão no suporte de Φ^k_μ. Para $\nu \in A$, $\nu \neq \mu$, queremos estimar $|\mu - \nu|$. Vamos considerar três casos:

1. $0 \leq \mu \leq (M-1)2^{-k}$.
   Pelo Lema 3.5, basta considerarmos os pontos $\nu \in X^m \setminus X^{m-1}$ com $m \geq k$. Se $m = k$,

então $\Phi_\mu^k(\nu)$ é obtido pela interpolação dos M valores $\Phi_\mu^k(\xi)$, $\xi \in S_\nu^{k-1} = \{\xi = \nu + (2j+1)\, 2^{-k} \in X^{k-1} :\ j = -M/2, \ldots, M/2\}$. Mas $\Phi_\mu^k(x) = 0$ para todo $x \in X^{k-1} - \{\mu\}$. Logo o único termo diferente de zero em S_ν^{k-1} é $\xi = \mu$, o que implica que

$$|\nu - \mu| \leq (M-1)2^{-k}.$$

Para $m = k+1$, segue $\Phi_\mu^k(\nu)$ é obtido pela interpolação dos M valores $\Phi_\mu^k(\xi)$, $\xi \in S_\nu^k$. Logo, existe $\xi_1 \in S_\nu^k$ tal que $\Phi_\mu^k(\xi_1) \neq 0$ e $|\nu - \xi_1| \leq (M-1)2^{-k}$. Aplicando o passo anterior a ξ_1, obtemos que $|\mu - \xi_1| \leq (M-1)2^{-k}$. Logo,

$$|\nu - \mu| \leq |\xi_1 - \mu| + |\xi_1 - \nu| = 2(M-1)2^{-k}.$$

2. $(M-1)2^{-k} < \mu < 1 - (M-1)2^{-k}$.
   Pelo Lema 3.5, devemos considerar $m \geq l_0 + 1 - N$. Para $m = l_0 + 1 - N$, $\Phi_\mu^k(\nu)$ é obtido pela interpolação dos M valores $\Phi_\mu^k(\xi)$, $\xi \in S_\nu^{l_0 - N}$. Mas pelo mesmo Lema sabemos que $\Phi_\mu^k(\xi) = 0$ para todo $\xi \in X^m - \{\mu\}$, $m \leq l_0 - N$. Logo o único ponto $\xi \in S_\nu^{l_0 - N}$ tal que $\Phi_\mu^k(\xi) \neq 0$ é $\xi = \mu$. Logo, $0 \leq |\mu - \nu| \leq (M-1)2^{-l_0+N-1}$. Para $m = l_0 - N + 2$ existe $\xi_1 \in S_{\xi_1}^{l_0 - N + 1} \subset X^{l_0 - N + 1}$ tal que $\Phi_\mu^k(\xi_1) \neq 0$ e $0 \leq |\nu - \xi_1| \leq (M-1)2^{-l_0+N-2}$. O passo anterior aplicado a ξ_1 implica que $0 \leq |\mu - \xi_1| \leq (M-1)2^{-l_0+N-1}$. O que acarreta

$$\begin{aligned} |\mu - \nu| &\leq |\mu - \xi_1| + |\nu - \xi_1| \\ &\leq (1 + 1/2)(M-1)2^{-l_0+N-1} \\ &= (M-1)(1+1/2)2^{N-1}2^{-l_0}. \end{aligned}$$

   Repetindo o mesmo argumento para $m = l_0 - N + 3, \ldots, l_0 + 1$ concluímos que

$$\begin{aligned} |\mu - \nu| &\leq (M-1)(1 + 2^{-1} + \ldots + 2^{-N})2^{N-1}2^{-l_0} \\ &= (M-1)(1 - 2^{N+1})2^N 2^{-l_0}. \end{aligned}$$

3. $1 - (M-1)2^{-k} \leq \mu \leq 1$.
   A demonstração deste caso, é análoga ao caso (1).

Em qualquer um dos casos, o suporte de $\Phi_\mu^k(x)$ está contido em $[\mu - Ca^k(\mu)\ ,\ \mu + Ca^k(\mu)] \cap \mathcal{I}$.
□

3.3 Análise de Multi-resolução de Médias Celulares

Nesta seção construímos a análise de multi-resolução de uma função f utilizando suas médias celulares numa malha irregular. A construção aqui apresentada é baseada nos resultados obtidos na análise de multi-resolução interpolatória da seção anterior. Deste modo as contruibuições originais desta seção consistem na generalização das propriedades e teoremas do caso interpolatório irregular para o caso de médias celulares. Damos especial destaque para o Teorema 3.2 que nos fornece uma estimativa para o tamanho do suporte da função escala de médias celulares.

3.3.1 Discretização

Seja $\bar{\Gamma}^k = \Gamma^k \setminus \{0\}$. Para $\mu \in \bar{\Gamma}^k$, seja $\mu^- = \mu_k^-$ o vizinho mais próximo à esquerda de μ em Γ^k. Definimos

$$\bar{f}_\mu^k \;=\; \frac{1}{h_{k,\mu}} \int_{\mu^-}^{\mu} f(x)dx$$

como a média celular de f na célula $[\mu^-, \mu]$, onde $h_{k,\mu} = \mu - \mu^-$. Conseqüentemente, $\bar{\mathcal{D}}^k(f)_\mu = \bar{f}_\mu^k,\ \mu \in \bar{\Gamma}^k$.

As médias celulares nos níveis k e $k+1$ satisfazem as relações,

$$\bar{f}_\mu^k \;=\; \frac{h_{k+1,\mu}}{h_{k,\mu}}\, \bar{f}_\mu^{k+1}, \quad \text{se } \mu_{k+1}^- \in \Gamma^k \tag{3.14}$$

$$\bar{f}_\mu^k \;=\; \frac{h_{k+1,\mu}}{h_{k,\mu}}\, \bar{f}_\mu^{k+1} + \frac{h_{k+1,\mu_{k+1}^-}}{h_{k,\mu}}\, \bar{f}_{\mu_{k+1}^-}^{k+1}, \quad \text{se } \mu_{k+1}^- \in \Lambda^k \tag{3.15}$$

As igualdades acima foram obtidas usando a propriedade aditiva da integral.

3.3.2 Reconstrução

Analogamente ao caso regular, o conhecimento das médias celulares $\bar{f}_\mu^k$ para $\mu \in \bar{\Gamma}^k$ é equivalente ao conhecimento dos valores nodais $F(\mu)$ da função primitiva de f em Γ^k, mais precisamente

$$\bar{f}_\mu^k = \frac{F(\mu) - F(\mu^-)}{h_{k,\mu}} \tag{3.16}$$

e

$$F(\mu) = \sum_{\nu \leq \mu,\ \nu \in \Gamma^k} h_{k,\nu} \bar{f}_\nu^k. \tag{3.17}$$

Portanto, para malhas irregulares a reconstrução de médias celulares também pode ser feita usando interpolação da função primitiva de f.

Seja $\mathcal{I}^k(x; F^k)$ uma reconstrução de valores pontuais da função primitiva de f em Γ^k. Definimos o operador de reconstrução das médias celulares $\bar{f}^k$ por

$$\mathcal{R}^k(x; \bar{f}^k) = \frac{d}{dx}\mathcal{I}^k(x; F^k).$$

O par $\{\overline{\mathcal{D}}^k,\ \mathcal{R}^k\}$ é conservativo. De fato, para $\mu \in \bar{\Gamma}^k$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_{k,\mu}}\int_{\mu^-}^{\mu} \mathcal{R}^k(x; \bar{f}^k)dx &= \frac{\mathcal{I}^k(\mu; F^k) - \mathcal{I}^k(\mu^-; F^k)}{h_{k,\mu}} \\ &= \frac{F(\mu) - F(\mu^-)}{h_{k,\mu}} = \bar{f}^k_\mu. \end{aligned}$$

Como conseqüência, quando o operador de reconstrução interpolatório $\mathcal{I}^k(x; F^k)$ da função primitiva possuir uma regularidade de ordem r, o operador de reconstrução das médias celulares será de ordem $r-1$. Observemos também que $\mathcal{R}^k(x; \bar{f}^k)$ satisfaz as seguintes propriedades

1. Se $\quad \tilde{f}^k_\nu = \dfrac{1}{h_{k,\nu}}\displaystyle\int_{\nu^-}^{\nu} \mathcal{R}^k(x; \bar{f}^k)dx = \dfrac{\mathcal{I}^k(\nu; F^k) - \mathcal{I}^k(\nu^-; F^k)}{h_{k,\nu}} \quad$ então,
$$\mathcal{R}^k(x; \bar{f}^k) = R^k(x; \tilde{f}^k) = \sum_{\nu \in X^k} \tilde{f}^k_\nu \theta^k_\nu(x), \tag{3.18}$$

2. Segue de (3.3) que
$$\mathcal{R}^k(x; \bar{f}^k) = \mathcal{R}^{k+1}(x; \bar{\mathcal{D}}^{k+1}\mathcal{R}^k(,; \bar{f}^k)). \tag{3.19}$$

Dadas as médias celulares no nível l, o operador de reconstrução $\mathcal{R}^l(x; \bar{f}^l)$ pode ser usado para aproximar médias celulares na malha mais fina $\bar{\Gamma}^{l+1}$. Seja $\mu \in \Lambda^l$ e μ^- o seu vizinho à esquerda mais próximo na malha Γ^{l+1}. Uma aproximação para a média celular $\bar{f}^{l+1}_\mu$ pode ser dada por

$$\tilde{f}^{l+1}_\mu = \frac{1}{h_{l+1,\mu}}\int_{\mu^-}^{\mu} \mathcal{R}^l(x; \bar{f}^l)\, dx = \frac{\mathcal{I}^l(\mu; F^l) - \mathcal{I}^l(\mu^-; F^l)}{h_{l+1,\mu}} = \frac{\mathcal{I}^l(\mu; F^l) - F(\mu^-)}{h_{l+1,\mu}}. \tag{3.20}$$

Desta forma, definimos a diferença de informação entre o nível l e $l+1$ como sendo o erro nesta aproximação

$$\begin{aligned} \bar{d}^l_\mu &= \bar{f}^{l+1}_\mu - \tilde{f}^{l+1}_\mu \\ &= \frac{F(\mu) - \mathcal{I}^l(\mu; F^l)}{h_{l+1,\mu}}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Tendo em vista as equações (3.14), (3.15) e (3.21) vamos definir os algoritmos de análise e síntese.

3.3.3 Aspecto Discreto

- **Análise** – $\bar{f}^{k+1} \rightarrow (\bar{f}^{k_0}, d^{k_0}, \ldots, \bar{d}^k)$
  Para $l = k, k-1, \ldots, k_0$ fazemos
  - *Para* $\mu \in \bar{\Gamma}^l$ *calculamos*

$$\begin{aligned} \bar{f}^l_\mu &= \frac{h_{l+1,\mu}}{h_{l,\mu}} \bar{f}^{l+1}_\mu, \quad se\ \mu^-_{l+1} \in \Gamma^l \\ \bar{f}^l_\mu &= \frac{h_{l+1,\mu}}{h_{l,\mu}} \bar{f}^{l+1}_\mu + \frac{h_{l+1,\mu^-_{l+1}}}{h_{l,\mu}} \bar{f}^{l+1}_{\mu^-_{l+1}}, \quad se\ \mu^-_{l+1} \in \Lambda^l \end{aligned}$$

  - *Para* $\mu \in \Lambda^l$ *calculamos* $\tilde{f}^{l+1}_\mu$ *pela fórmula (3.20) e*

$$\bar{d}^l_\mu = \bar{f}^{l+1}_\mu - \tilde{f}^{l+1}_\mu$$

- **Síntese** – $(\bar{f}^{k_0}, \bar{d}^{k_0}, \ldots, \bar{d}^k) \rightarrow \bar{f}^{k+1}$
  Para $l = k_0, \ldots, k$ fazemos
  - *Para* $\mu \in \Lambda^l$, *calculamos* $\tilde{f}^{l+1}_\mu$ *pela fórmula (3.20) e*

$$\bar{f}^{l+1}_\mu = \bar{d}^l_\mu + \tilde{f}^{l+1}_\mu$$

  - *Para* $\mu \in \bar{\Gamma}^l$ *calculamos*

$$\begin{aligned} \bar{f}^{l+1}_\mu &= \frac{h_{l,\mu}}{h_{l+1,\mu}} \bar{f}^l_\mu \ se\ \mu^- \in \Gamma^l \\ \bar{f}^{l+1}_\mu &= \frac{1}{h_{l+1,\mu}} \left[h_{l,\mu} \bar{f}^l_\mu - h_{l+1,\mu^-_{l+1}} \bar{f}^{l+1}_{\mu^-_{l+1}} \right], \quad se\ \mu^-_{l+1} \in \Lambda^l \end{aligned}$$

Portanto, o conhecimento de $(\bar{f}^{k_0}, \bar{d}^{k_0}, \ldots, \bar{d}^{k})$ é equivalente ao conhecimento de $\bar{f}^{k+1}$ no sentido que existe uma transformação entre os dois conjuntos.

3.3.4 Aspecto Funcional

Como feito nos casos analisados anteriormente, vamos caracterizar a transformação $\bar{f}^{k+1} \leftrightarrow (\bar{f}^{k_0}, \bar{d}^{k_0}, \ldots, \bar{d}^{k})$ sob o ponto de vista funcional.

Funções Escala

Para $\mu \in \bar{\Gamma}^k$ definimos a função escala $\Theta_\mu^k(x)$ por

$$\Theta_\mu^k(x) = \mathcal{R}^k(x; \delta_{\mu\nu}^k) = \frac{d}{dx}\mathcal{I}^k(x; \Delta_{\mu\nu}^k) = \frac{d}{dx}\sum_{\nu\in\Gamma^k} \Delta_{\mu\nu}^k \Phi_\nu^k(x) = h_{k,\mu}\frac{d}{dx}\sum_{\nu\geq\mu} \Phi_\nu^k(x), \qquad (3.22)$$

onde a seqüência $\Delta_{\mu\nu}^k$ é obtida a partir de (3.17) e, portanto, é da forma

$$\Delta_{\mu\nu}^k = \begin{cases} 0, & \nu < \mu, \\ h_{k,\mu}, & \nu \geq \mu. \end{cases} \qquad (3.23)$$

Seja $\overline{\mathcal{V}}^k$ o espaço gerado por $\Theta_\mu^k(x),\ \mu \in \bar{\Gamma}^k$.

Como conseqüência imediata da definição, as funções escala possuem as propriedades descritas a seguir.

1. *Interpolação de médias celulares*: Sejam $\mu,\ \nu \in \bar{\Gamma}^k$,

$$\frac{1}{h_{k,\nu}}\int_{\nu^-}^{\nu} \Theta_\mu^k(x)dx = \delta_{\mu\nu}. \qquad (3.24)$$

   Notemos que a equação (3.24) pode ser escrita como $<\Theta_\mu^k, \Theta_\nu^{*k}>= \delta_{\mu\nu}$, em termos da função

$$\Theta_\nu^{*k}(x) = \begin{cases} (h_{k,\nu})^{-1}, & x \in [\nu^-, \nu], \\ 0, & x \notin [\nu^-, \nu]. \end{cases}$$

2. *Regularidade*: $\Theta_\mu^k(x)$ herdam as propriedades de regularidade das funções escala $\theta_\mu^k(x)$ do caso regular.

3. *Relação de Escala*: Segue de (3.19) que para $\mu \in \bar{\Gamma}^k$.

$$\Theta_\mu^k(x) = \sum_{\nu \in \bar{\Gamma}^{k+1}} \bar{c}^k(\nu, \mu) \Theta_\nu^{k+1}(x),$$

onde

$$\bar{c}^k(\nu, \mu) = \frac{1}{h_{k+1,\nu}} \int_{\nu^-}^{\nu} \Theta_\mu^k(x) dx.$$

4. *Reprodução Polinomial*: Os polinômios de grau menor ou igual a $M-2$ são reproduzidos por $\Theta_\mu^k(x),\ \mu \in \bar{\Gamma}^k$,

$$x^n = \sum_{\mu \in \bar{\Gamma}^k} \frac{(\mu - \mu^-)^n}{n+1} \Theta_\mu^k(x), \quad n = 0, 1, \ldots M-2. \tag{3.25}$$

5. *Fórmula de Comutação*: A fórmula de comutação entre a análise de multi-resolução interpolatória e a análise de multi-resolução usando médias celulares é fornecida pelo próximo lema.

Lema 3.6 $(M \geq 4)$ *Seja $\mu \in \bar{\Gamma}^k$. Então*

$$\frac{d}{dx} \Phi_\mu^k(x) = \begin{cases} -\dfrac{\Theta_\mu^k(x)}{h_{k,\mu}}, & \mu = 0^+ \\[2ex] \dfrac{\Theta_\mu^k(x)}{h_{k,\mu}} - \dfrac{\Theta_{\mu^+}^k(x)}{h_{k,\mu^+}}, & 0^+ < \mu < 1 \\[2ex] \dfrac{\Theta_\mu^k(x)}{h_{k,\mu}}, & \mu = 1 \end{cases}$$

Demonstração: Da fórmula (3.22) temos que

(a) Para $\mu = 0^+$,

$$\begin{aligned} \Theta_\mu^k(x) &= \mu \frac{d}{dx} \sum_{\nu \geq \mu} \Phi_\nu^k(x) \\ &= \mu \left[-\frac{d}{dx} \Phi_0^k(x) + \frac{d}{dx} \sum_{\nu \in \Gamma^k} \Phi_\nu^k(x) \right] \\ &= -\mu \frac{d}{dx} \Phi_0^k(x). \end{aligned}$$

Observemos que neste caso, $h_{k,\mu} = \mu$ e que na última igualdade usamos a propriedade (3.25).

(b) Para $0^+ < \mu < 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\Phi_\mu^k(x) &= \frac{d}{dx}\sum_{\nu\geq\mu}\Phi_\nu^k(x) - \frac{d}{dx}\sum_{\nu\geq\mu^+}\Phi_\nu^k(x) \\
&= \frac{\Theta_\mu^k(x)}{h_{k,\mu}} - \frac{\Theta_{\mu^+}^k(x)}{h_{k,\mu^+}}.
\end{aligned}$$

(c) Para $\mu = 1$,

$$\Delta_{\mu\nu}^k = \begin{cases} 0, & \nu < 1 \\ h_{k,1}, & \nu = 1 \end{cases}$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dx}\Phi_1^k(x) = \frac{\Theta_1^k(x)}{1-1^-}.\Box$$

6. <u>*Suporte*</u> : O suporte de $\Theta_\mu^k(x)$ é influenciado pela escala local $a^k(\mu)$. Portanto, ao estimarmos o seu tamanho, como no caso das funções escala interpolatórias, alguns resultados preliminares são necessários. Por enquanto, apenas enunciamos o teorema que estima o tamanho do suporte de $\Theta_\mu^k(x)$.

Teorema 3.2 *Nas mesmas condicões do Teorema 3.1, obtemos a existência de uma constante $C = C(M,\rho)$ tal que o suporte da função escala $\Theta_\mu^k(x)$ está contido em $[\mu - Ca^k(\mu)\ ,\ \mu + Ca^k(\mu)] \cap \mathcal{I}$.*

Funções Wavelets

Seguindo o procedimento usual, para $\mu \in \Lambda^k$, seja $\tilde{f}_\nu^{k+1}$, $\nu \in X^{k+1}$ o valor obtido pelo algoritmo de síntese de $\bar{f}_\nu^k = 0$, $\nu \in \bar{\Gamma}^k$ e $\bar{d}_\nu^k = \delta_{\nu\mu}$, $\nu \in \Lambda^k$. É fácil ver que $\tilde{f}_\nu^{k+1} = \delta_{\mu\nu}^{k+1} - \delta_{\mu^+\nu}^{k+1}$. Então, conforme Definição 2.4, a função wavelet $\Psi_\mu^k(x)$ é dada por

$$\Psi_\mu^k(x) = R^{k+1}(x; \delta_{\mu\nu}^{k+1} - \delta_{\mu^+\nu}^{k+1}) = \Theta_\mu^{k+1}(x) - \Theta_{\mu^+}^{k+1}(x).$$

Definimos $\overline{\mathcal{W}}^k$ como o espaço gerado por $\Psi_\mu^k(x)$, $\mu \in \Lambda^k$. Segue como no caso regular que vale a soma direta $\overline{\mathcal{V}}^{k+1} = \overline{\mathcal{V}}^k + \overline{\mathcal{W}}^k$ e que a transformação de dois níveis $\bar{f}^{k+1} \to (\bar{f}^k, \bar{d}^k)$ corresponde à mudança de base

$$\sum_{\mu\in\bar{\Gamma}^{k+1}} \bar{f}_\mu^{k+1}\Theta_\mu^{k+1}(x) = \sum_{\mu\in\bar{\Gamma}^k} f_\mu^k\Theta_\mu^k(x) + \sum_{\mu\in\Lambda^k} \bar{d}_\mu^k\Psi_\mu^k(x). \tag{3.26}$$

Aplicando iterativamente a fórmula (3.26), e observando que $\Theta_\mu^{k_0}(x) = \theta_\mu^{k_0}(x)$, obtemos a decomposição em multiescala

$$\sum_{\mu \in \bar{\Gamma}^{k+1}} \bar{f}_\mu^{k+1} \Theta_\mu^{k+1}(x) = \sum_{\mu \in \bar{\Gamma}^{k_0}} \bar{f}_\mu^{k} \theta_\mu^{k_0}(x) + \sum_{l=k_0}^{k} \sum_{\mu \in \Lambda^l} \bar{d}_\mu^l \Psi_\mu^l(x) \tag{3.27}$$

que corresponde a soma direta

$$\overline{\mathcal{V}}^{k+1} = \overline{V}^{k_0} + \overline{\mathcal{W}}^{k_0} + \ldots + \overline{\mathcal{W}}^{k}.$$

Observações:

1. Devido à fórmula de comutação (Lema 3.6), as funções básicas do segundo membro da igualdade (3.27) correspondem àquelas obtidas na análise de multi-resolução baseada numa malha regular. De fato, para $\mu \in \Lambda^l$ segue pela condição do cone que $h_{l+1,\mu} = h_{l+1,\mu^+} = h_{l+1}$. Logo,

$$\Psi_\mu^l(x) = \Theta_\mu^{l+1}(x) - \Theta_{\mu^+}^{l+1}(x) = h_{l+1} \frac{d}{dx} \Phi_\mu^{l+1}(x) = h_{l+1} \frac{d}{dx} \phi_\mu^{l+1}(x).$$

   Pela fórmula de comutação para o caso regular (2.44), o último termo desta igualdade é exatamente a wavelet do caso regular.

2. De (3.21) obtemos para cada $\mu \in \Lambda^l$

$$\bar{d}_\mu^l = \frac{F(\mu) - \mathcal{I}^l(\mu; F^l)}{h_{l+1,\mu}}.$$

   Supondo que a malha Γ^k satisfaz a condição do cone com $\rho \geq M/2$, segue que $\mathcal{I}^l(\mu; F^l) = I^l(\mu; F^l)$, e que os valores utilizados nessa interpolação estão disponíveis em Γ^l, conforme primeira observação da página 51. Portanto, os coeficientes $\bar{d}_\mu^l$ são os mesmos do caso regular.

Demonstração do Teorema 3.2

Seja $H_\mu^k(x) = \sum_{\nu \geq \mu} \Phi_\nu^k(x), \mu \in \bar{\Gamma}^k$, a função obtida pela interpolação dos valores

$$H_\mu(\nu) = \begin{cases} 0, & \nu < \mu \\ 1, & \nu \geq \mu. \end{cases}$$

Da fórmula (3.22) segue que

$$\Theta_\mu^k(x) = h_{k,\mu}\frac{d}{dx}H_\mu^k(x). \tag{3.28}$$

Proposição 3.1 *Suponhamos que* Γ^k *satisfaz a* ρ*-condição do cone com* $\rho \geq M+1$. *Seja* $\mu \in \Gamma^k$ *com* $a^k(\mu) = 2^{-l_0}$. *Nestas condições* $H_\mu^k(x) \in V^{l_0+1}$, *isto é,*

$$H_\mu^k(x) = \sum_{\nu \in X^{l_0+1}} H_\mu^k(\nu)\phi_\nu^{l_0+1}(x). \tag{3.29}$$

Demonstração: É análoga à demonstração do Lema 3.4. Definimos

$$f(x) = \sum_{\nu \in X^{l_0+1}} H_\mu^k(\nu)\phi_\nu^{l_0+1}(x).$$

Por definição, $f(x) = H_\mu^k(x)$, para todo $x \in X^{l_0+1}$. Vamos provar que isto também é verdadeiro para todo $x \in \Gamma^k \setminus X^{l_0+1}$. Lembremos que para $x \in \Gamma^k$,

$$H_\mu^k(x) = \begin{cases} 0 & x < \mu \\ 1 & x \geq \mu. \end{cases}$$

Consideremos primeiramente o caso em que $x < \mu$, e suponhamos que $f(x) \neq 0$. Logo, para algum $\nu \in X^{l_0+1}$, $H_\mu^k(\nu) \neq 0$ e $\phi_\nu^{l_0+1}(x) \neq 0$. A última afirmação implica que

$$|x-\mu| \leq (M-1)2^{-l_0-1}. \tag{3.30}$$

Existem duas possibilidades: ν está em Γ^k ou não. Se $\nu \in \Gamma^k$, a primeira condição ($H_\mu^k(\nu) \neq 0$) implica que $\nu \geq \mu$. O que significa que $|x-\nu| > |\mu - x|$. Mas, como $a^k(\mu) = 2^{-l_0}$ e $a^k(x) = 2^{-m}$ com $m \geq l_0+2$, o Lema 3.3, implica que $|x-\mu| \geq (\rho-1)2^{-l_0-1} \geq M2^{-l_0-1}$, que contradiz (3.30). Se ν não está em Γ^k, então usamos o Corolário 3.1 e obtemos a contradição $|x-\nu| \geq (\rho-1)2^{-l_0-1} \geq M2^{-l_0-1}$.

Para o caso em que $x \geq \mu$, suponhamos que

$$1 - f(x) = \sum_{\nu \in X^{l_0+1}} (1 - H_\mu^k(\nu))\phi_\nu^{l_0+1}(x) \neq 0.$$

Isto garante a existência de algum ponto $\nu \in X^{l_0+1}$ tal que $H_\mu^k(\nu) \neq 1$ e $\phi_\nu^{l_0+1}(x) \neq 0$. Novamente a última afirmação implica (3.30). A primeira implica que $\nu < \mu \leq x$, para

$\nu \in \Gamma^k$, o que fornece a contradição $|x - \nu| \geq |x - \mu| \geq M2^{-l_0-1}$. Se ν não está em Γ^k, obtemos também a mesma contradição como no caso anterior. $\Box$

Corolário 3.2 *Se $\rho \geq M + 1$, então $\Theta_\mu^k(x) \in \bar{V}^{l_0+1}$, com $a^k(\mu) = 2^{-l_0}$.*

Demonstração: Da Proposição anterior segue que

$$\begin{aligned} \Theta_\mu^k(x) &= h_{k,\mu} \frac{d}{dx} H_\mu^k(x) \\ &= h_{k,\mu} \sum_{\nu \in X^{l_0+1}} H_\mu^k(\nu) \frac{d}{dx} \phi_\nu^{l_0+1}(x). \end{aligned}$$

Da fórmula de comutação (2.44) para o caso regular obtemos o resultado desejado. $\Box$

Valem também resultados similares ao Lema 3.5 e ao Teorema 3.1, cujas demonstrações também são análogas, e que omitiremos aqui.

Lema 3.7 *Seja Γ^k uma malha satisfazendo a ρ-condição do cone com $\rho \geq M+1$ e que inclua os M pontos de X^k mais próximos às fronteiras. Se $H_\mu^k(\nu) \neq 0$, para $\nu < \mu$ e $H_\mu^k(\nu) \neq 1$, para $\nu > \mu$, $\nu \in X^m \setminus X^{m-1}$ então $m \geq l_0 - N + 1$, onde N depende somente de ρ e M.*

Teorema 3.3 *Seja Γ^k uma malha satisfazendo a ρ-condição do cone com $\rho \geq M + 1$ e que inclua os M pontos de X^k mais próximos às fronteiras. Então existe uma constante $C = C(M, \rho)$ tal que para todo $\mu \in \Gamma^k$, $a^k(\mu) = 2^{-l_0}$, $x \in \mathcal{I}$*

$$H_\mu^k(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \mu - Ca^k(\mu), \\ 1, & x \geq \mu + Ca^k(\mu). \end{cases}$$

Para demonstrar o Teorema 3.2 basta levar em conta o Teorema 3.3 combinado com a fórmula (3.28).

Capítulo 4

Esquemas de Multi-resolução para Leis de Conservação

Neste capítulo desenvolvemos um esquema de multi-resolução para a resolução de leis de conservação em malhas adaptativas com o objetivo de acelerar os cálculos numéricos. Estas malhas são esparsas em regiões de suavidade e refinadas próximo de descontinuidades. Na construção de tais malhas as principais ferramentas são provenientes da análise wavelet descrita nos capítulos anteriores. Para o cálculo do fluxo numérico usamos como esquema básico um operador de diferenças finitas adaptativo, que alternamos para um esquema ENO na parte mais fina das malhas. Apresentamos resultados comparando os tempos de CPU do esquema proposto com o do esquema ENO puro numa malha uniforme, bem como com os dos esquemas de multi-resolução desenvolvidos por A. Harten em [15], [16].

4.1 Introdução

O esquema que propomos neste trabalho aplica-se a resolução de sistemas de leis de conservação hiperbólicas em uma dimensão

$$\begin{cases} u_t(x,t) + (f(u(x,t)))_x &= 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^m$ é um vetor m-dimensional. Para maiores detalhes sobre este tipo de sistemas, veja o Apêndice A.

Integrando (4.1) sobre $B = (\mu^-, \mu) \times (t_n, t_{n+1})$, obtemos que

$$\bar{u}_\mu^{n+1} = \bar{u}_\mu^n - \frac{\Delta t}{h_\mu}(f_\mu^n - f_{\mu^-}^n),$$

onde

$$\bar{u}^n_\mu = \frac{1}{h_\mu}\int_{\mu^-}^{\mu} u(x,t_n)dx,$$

são as médias celulares da solução $u(x,t_n)$ em células $[\mu^-,\mu]$ definidas por uma malha irregular do intervalo $[0,1]$, e

$$f^n_\mu = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(\mu,t))dt$$

é a média temporal do fluxo da solução $f(u(\mu,t))$, no intervalo de tempo $[t_n,t_{n+1}]$, com $t_{n+1} = t_n + \Delta t$.

Consideramos soluções numéricas de (4.1) obtidas pelo esquema explícito

$$v^{n+1}_\mu = v^n_\mu - \lambda_\mu(\bar{f}_\mu - \bar{f}_{\mu^-}) \equiv [\mathcal{D}v^n]_\mu, \tag{4.2}$$

onde $\lambda_\mu = \Delta t/h_\mu$, $\bar{f}_\mu$ é o fluxo numérico definido em termos de v^n, $\bar{f}_\mu = \bar{f}(v^n)$ e $\mathcal{D}$ é o operador de evolução numérico do esquema. Deste modo, v^n_μ pode ser visto como uma aproximação para as médias celulares da solução $u(x,t_n)$ e $\bar{f}_\mu$ como uma aproximação da média temporal do fluxo da solução $f(u(\mu,\ t))$.

Dependendo de como o fluxo numérico $\bar{f}_\mu$ é definido, vários esquemas do tipo (4.2) tem sido propostos e aplicados extensivamente [23]. Entre eles, destacamos o esquema de Godunov, o de Lax-Wendroff e os esquemas essencialmente não oscilatórios, mais conhecidos como esquemas ENO. O esquema de Godunov resolve bem os choques, mas por ser de primeira ordem, não fornece uma boa precisão na parte suave da solução. Um esquema de segunda ordem é o de Lax-Wendroff. Mas apesar de apresentar uma boa resolução na parte suave, infelizmente, pode apresentar sérias oscilações em regiões de descontinuidade. Os esquemas ENO são boas alternativas pois fornecem alta resolução tanto em regiões de suavidade quanto em regiões de singularidade. Mas exigem um alto custo computacional. Diante disso, Ami Harten propôs em [15] e [16] estratégias simples para diminuir o número de fluxos ENO calculados. A ferramenta básica é uma análise de multi-resolução para médias celulares em malhas uniformes, que fornece um indicador dos pontos onde os fluxos são calculados exatamente. Nos demais pontos, os fluxos numéricos são interpolados, o que permite uma economia computacional. Tipicamente, tais pontos são esparsos em regiões de regularidade e mais concentrados próximo das descontinuidades.

O esquema apresentado aqui é baseado nas idéias de Ami Harten mencionadas acima. Mas ao invés de evoluir as médias celulares da malha uniforme, propomos evoluir as médias celulares das malhas adaptativas definidas pela análise de multi-resolução. Ou seja, no total teremos um número pequeno de células, com tamanho grande em regiões de suavidade e mais finas próximo das irregularidades. Para isto precisamos usar análises de multi-resolução para médias celulares em malhas irregulares do intervalo. Para a definição do fluxo numérico adotamos Lax-Wendroff como esquema básico, mas alternamos para o esquema ENO de segunda ordem na parte mais fina das malhas. Além disso, no cálculo dos fluxos, usamos a idéia de um esquema adaptativo para diferenças finitas em malhas esparsas introduzido por Mats Holmströn [19], modificado para o contexto de médias celulares.

Os principais ingredientes de nosso algorítmo são: o tipo de malha irregular sobre a qual construímos as análises de multi-resolução de valores pontuais e de médias celulares, como estender ou reduzir as malhas, e como calcular os fluxos numéricos. Neste capítulo, apresentamos os passos principais do algoritmo de evolução e exemplos numéricos comparando os tempos de CPU do esquema adaptativo com o esquema ENO puro e os esquemas desenvolvidos por A. Harten em [15], [16], em malhas regulares.

4.2 Esquema de Multi-resolução Adaptativo em Malhas Irregulares

No Capítulo 3, as análises de multi-resolução foram definidas sobre uma malha irregular pré-estabelecida. Até este momento, não fizemos nenhuma conexão entre a malha com a particular função sob estudo. Observamos também que em análise wavelet este tipo de malha irregular aparece depois do truncamento dos coeficientes wavelet. Por exemplo, suponhamos que uma certa função f é representada por meio de médias celulares sobre uma malha Γ. Podemos obter uma representação mais econômica usando um operador de truncamento, que atua sobre os coeficientes obtidos depois do algoritmo de análise. Pela interpretação dos coeficientes wavelet como erros de interpolação polinomial, podemos usá-los como indicadores locais de regularidade da solução. Isto significa que os coeficientes wavelet pequenos correspondem a regiões de suavidade. Como resultado, removendo os pontos associados a estes coeficientes, teremos uma malha mais esparsa nestas regiões e mais refinada próximo das irregularidades.

Por outro lado, a partir da representação de f por meio de médias celulares sobre uma malha Γ, podemos necessitar de uma outra representação sobre uma malha estendida contendo Γ. Se este for o caso, e se não tivermos acesso às médias celulares exatas nessas novas células, podemos aproxima-lás usando o operador de reconstrução $\mathcal{R}(x; \bar{f})$.

Quando consideramos a solução numérica adaptativa de leis de conservação, existem várias malhas envolvidas, com vários operadores de discretização e reconstrução associados a elas e, portanto, várias análises de multi-resolução. Nesta seção construímos um esquema numérico para a resolução de (4.2) usando estas análises de multi-resolução.

4.2.1 Sobre as Malhas

Em cada passo de tempo t_n teremos uma malha Γ^n cujos pontos estão associados aos coeficientes wavelet significativos da análise de multi-resolução de v^n. Assumimos que no nível mais grosso a malha é X^{k_0}, e que o número máximo de níveis permitidos é $L+1$, para todo n. Isto significa que a malha Γ^n está contida em X^{k_0+L} e que

$$\Gamma^n = X^{k_0} \cup \mathcal{D}_\epsilon^n,$$

onde

$$\mathcal{D}_\epsilon^n = \cup_{l=k_0}^{k_0+L_n} \Lambda^{n,l}, \qquad L_n \leq L-1.$$

Γ^n é uma malha esparsa onde a solução é suave e refinada em regiões de singularidades. Como as soluções podem variar com o tempo, estas regiões é claro, podem também variar com o tempo. O que significa que Γ^n pode não ser mais conveniente no próximo passo temporal. Portanto, antes de fazermos a evolução temporal da solução numérica, algumas precauções devem ser tomadas.

Extensão de Malhas

A fim de acompanhar possíveis movimentos ou surgimento de singularidades entre os passos temporais, devemos considerar $\tilde{v}^n$, a representação da solução no tempo t_n numa malha estendida $\Gamma^{n+1/2}$ do tipo

$$\Gamma^{n+1/2} = X^{k_0} \cup \tilde{\mathcal{D}}_\epsilon^{n+1},$$

onde $\tilde{\mathcal{D}}_\epsilon^{n+1}$ é uma estimativa de $\mathcal{D}_\epsilon^{n+1}$. Esta operação que denominamos de *extensão* é descrita a seguir.

Definição 4.1 Operador de Extensão: $(\Gamma^n,\ v^n) \overset{\mathcal{E}}{\longmapsto} (\Gamma^{n+1/2},\ \tilde{v}^n)$. *$\mathcal{E}$ atua nas médias celulares v^n da malha Γ^n, fornecendo médias celulares $\tilde{v}^n$ na malha estendida $\Gamma^{n+1/2}$ como resultado dos seguintes passos:*

1. *Formamos $\tilde{\mathcal{D}}_\epsilon^{n+1}$ pelos seguintes pontos:*
   (a) *todos os pontos $\mathcal{D}_\epsilon^n$.*
   (b) *por uma vizinhança de $\mathcal{D}_\epsilon^n$. Isto é, para cada ponto $\mu \in \Lambda^{n,l}$ alguns vizinhos da mesma escala, bem como alguns vizinhos de escalas mais finas devem estar presentes em $\Gamma^{n+1/2}$. Em todos os testes apresentados neste trabalho para cada ponto $\mu = (2j-1)2^{-l-1} \in \Lambda^{n,l}$ os vizinhos $\nu = (2j-3)2^{-l-1}$ e $\nu = (2j+1)2^{-l-1}$*

da mesma escala, bem como alguns vizinhos da escala mais fina $\nu = (4j-3)2^{-l-2}$ *e* $\nu = (4j-1)2^{-l-2}$*, devem estar presentes em* $\Gamma^{n+1/2}$ *(respeitando, é claro o nível máximo* $l+2 = k_0 + L$*).*

(c) *pelos pontos que completam o cone com abertura* $\rho = M/2$*. Isto é feito da escala mais fina para a mais grossa.*

2. *Estendemos os coeficientes wavelet para todos os pontos de* $\mu \in \tilde{\mathcal{D}}_\epsilon^{n+1}$*, fazendo* $d_\mu^l = 0$ *se* $\mu \in \tilde{\mathcal{D}}_\epsilon^{n+1} \setminus \mathcal{D}_\epsilon^n$*, e aplicamos o algoritmo de síntese associado a* $\Gamma^{n+1/2}$*, para obter* $\tilde{v}^n$*.*

Na Figura 4.1 exemplificamos a operação de extensão de malhas no plano $(\mu,\ l)$. Na malha Γ os pontos de X^{k_0} estão marcados em negro na parte inferior e os pontos de $\mathcal{D}_\epsilon$ são os pontos em vermelho. Os pontos vizinhos de $\mathcal{D}_\epsilon$ são marcados com a cor azul, e o ponto amarelo completa o cone ($\rho = 2$). A malha estendida $\Gamma^{1/2}$ está indicada na parte superior da figura em verde.

Redução de Malhas

Na próxima seção será explicado como fazer a evolução temporal sobre a malha estendida $\Gamma^{n+1/2}$ para obter $\hat{v}^{n+1}$. Esta pode não ser a representação mais econômica no tempo t_{n+1}. O operador de truncamento $\mathcal{T}_\epsilon$, que veremos a seguir resolve este problema.

Para um certo $\epsilon > 0$, definimos os parâmetros de tolerância

$$\epsilon_l = \frac{\epsilon}{2^{L-l}}, \quad l = 0, \ldots, L-1.$$

Definição 4.2 Operador de truncamento*:* $(\Gamma^{n+1/2},\ \hat{v}^{n+1}) \xmapsto{\mathcal{T}_\epsilon} (\Gamma^{n+1},\ v^{n+1})$*.* $\mathcal{T}_\epsilon$ *atua sobre as médias celulares* $\hat{v}^{n+1}$ *na malha* $\Gamma^{n+1/2}$ *e fornece as médias celulares* v^{n+1} *na malha* Γ^{n+1}*, como resultado dos seguintes passos:*

1. *A partir das médias celulares* $\hat{v}^{n+1}$ *obtemos os coeficientes wavelet associados utilizando o algoritmo de análise correspondente à malha* $\Gamma^{n+1/2}$*.*

2. *Removemos de* $\Gamma^{n+1/2}$ *aqueles pontos* μ *onde os coeficientes satisfizerem* $|d_\mu^{k_0+l}| \leq \epsilon_l$*.* Γ^{n+1} *é a malha reduzida resultante.*

3. *Aplicamos o algoritmo de síntese associado a* Γ^{n+1} *para obter as médias celulares* v^{n+1}*.*

$(\Gamma^{n+1},\ v^{n+1})$ *é a representação mais econômica procurada.*

Figura 4.1: Exemplo de malha estendida

Figura 4.2: Exemplo cálculo de f_{μ}^{LW}

4.2.2 Definição do Fluxo Adaptativo

Um ingrediente fundamental na solução numérica de leis de conservação é o cálculo dos fluxos numéricos. Em nossos testes adotamos o esquema de Lax-Wendroff de segunda ordem como algorítmo básico. Mas onde existirem coeficientes wavelet significativos na escala mais fina $k_0 + L$, mudamos para o esquema ENO de segunda ordem.

Indicador de Fluxo: $\Gamma^{n+1/2} \overset{i^n}{\longmapsto} \{0,\ 1\}$**.**

$i^n(\mu)$ indica o tipo de fluxo $\bar{f}_\mu$ adotado: se $i^n(\mu) = 0$ então $\bar{f}_\mu = f_\mu^{LW}$ (Lax-Wendroff), caso contrário $\bar{f}_\mu = f_\mu^{ENO}$. O critério para a definição de $i^n(\mu)$ é o seguinte:

1. Se $L_n < L$ então $i^n(\mu) = 0$ para todo $\mu \in \Gamma^{n+1/2}$.

2. Se $L_n = L$, então

   (a) Inicializamos $i^n(\mu) = 0$ para todo $\mu \in \Gamma^{n+1/2}$.

   (b) Para $\mu \in \Lambda^{k_0+L-1}$ verificamos se $|d_\mu^{k_0+L-1}| \geq \epsilon_{L-1}$. Se isto ocorrer fazemos $i^n(\mu^-) = 1,\ i^n(\mu) = 1,\ i^n(\mu^+) = 1$, onde μ^- e μ^+ são os vizinhos mais próximos à esquerda e à direita de μ em X^{k_0+L} que pela condição do cone, também estão em $\Gamma^{n+1/2}$.

Fluxo Lax-Wendroff Adaptativo

Seja $\mu \in \Gamma^{n+1/2}$ com $i^n(\mu) = 0$, onde o fluxo Lax-Wendroff será usado. Inicialmente, identificamos a célula $\mathcal{I}_\mu = [\mu^-,\ \mu]$, onde é conhecida a média celular $\tilde{v}_\mu^n$. Definimos o nível k_μ de forma que $2^{-k_\mu} = h_\mu = \mu - \mu^-$, e usamos as médias celulares de X^{k_μ} para calcular o fluxo f_μ^{LW}. Isto é,

$$f_\mu^{LW} = f\left(\frac{1}{2}\left(\tilde{v}_\mu + \tilde{w}_{\mu^+}\right) - \frac{\Delta t}{2h_\mu}\left(f(\tilde{w}_{\mu^+}) - f(\tilde{v}_\mu)\right)\right), \tag{4.3}$$

onde μ^+ é o vizinho à direita mais próximo de μ em X^{k_μ}, e $\tilde{w}_{\mu^+}$ é a média celular na célula $[\mu,\ \mu^+]$ (ver Apêndice A). Eventualmente, $\tilde{w}_{\mu^+}$ não está disponível, seja porque μ^+ não é um ponto de $\Gamma^{n+1/2}$, ou porque na célula $[\mu,\ \mu^+]$ existem outros pontos de $\Gamma^{n+1/2}$. Em qualquer um dos casos, $\tilde{w}_{\mu^+}$ é calculada ou aproximada usando a reconstrução de médias celulares, como descrito na Seção 3.3.

Na Figura 4.2 ilustramos estas duas possibilidades para a malha $\Gamma^{1/2}$ da Figura 4.1. Consideramos o fluxo Lax-Wendroff adaptativo para os pontos μ_1 e μ_2. Para μ_1, estamos no caso em que a célula $[\mu_1,\ \mu_1^+]$ contém outro ponto ν de $\Gamma^{1/2}$, neste caso a média celular correspondente é obtida como o resultado do quociente da soma das médias celulares v_μ com v_{μ^+} por 2. Para μ_2, caso em que o extremo superior da célula $[\mu_2,\ \mu_2^+]$ não está em $\Gamma^{1/2}$, a média celular é obtida por interpolação.

Esta idéia foi sugerida em [19] no contexto de análises de multi-resolução de valores pontuais.

Fluxo ENO

Seja $\mu \in \Gamma^{n+1/2}$ com $i^n(\mu) = 1$, onde o fluxo ENO será utilizado. Existem duas possibilidades para μ.

1. $\mu \in \Lambda^{k_0+L-1}$ com $|d_\mu^{k_0+L-1}| \geq \epsilon_{L-1}$. Pelo algoritmo de extensão, sabemos que se $\mu = (2j-1)2^{-k_0-L}$ então $\nu = (2j-3)2^{-k_0-L}$ também pertence a $\Gamma^{n+1/2}$. Pela condição do cone, sabemos que $\mu^- = (2j-2)2^{-k_0-L}$ e $\mu^+ = 2j2^{-k_0-L}$ também pertencem a $\Gamma^{n+1/2}$. Como visto no Apêndice A, no cálculo de f_μ^{ENO} na malha X^{k_0+L} usamos as médias celulares $\tilde{v}_{\mu^-}^n$, $\tilde{v}_\mu^n$ e $\tilde{v}_{\mu^+}^n$ associadas às células $[\nu,\ \mu^-]$, $[\mu^-,\ \mu]$ e $[\mu,\ \mu^+]$ que estão na porção da malha $\Gamma^{n+1/2}$ formada por pontos igualmente espaçados de X^{k_0+L}.

2. μ é um vizinho à direita ou à esquerda em X^{k_0+L} de algum ponto ν de Λ^{k_0+L-1} com coeficiente wavelet $|d_\nu^{k_0+L-1}| \geq \epsilon_{L-1}$. Por exemplo, se $\mu = 2j2^{-k_0-L}$ for o vizinho à direita de $\nu = (2j-1)2^{-k_0-L} = \mu^-$, então pelos mesmos argumentos acima $\mu^+ = (2j+1)2^{-k_0-L}$ e $\nu^- = (2j-2)2^{-k_0-L}$ estão em $\Gamma^{n+1/2}$ e as médias celulares $\tilde{v}_{\mu^-}^n$, $\tilde{v}_\mu^n$ e $\tilde{v}_{\mu^+}^n$ são as médias usadas no cálculo de f_μ^{ENO} e que estão associadas a uma porção de $\Gamma^{n+1/2}$ formada por pontos igualmente espaçados de X^{k_0+L}.

Em qualquer um dos dois casos

$$f_\mu^{ENO} = \bar{f}^R(w_\mu,\ w_{\mu^+}),$$

onde $h = h_{k_0+L}$, f^R é algum fluxo numérico de Riemann, e

$$w_\mu = \tilde{v}_\mu + \frac{h}{2}\ S_\mu + \frac{\Delta t}{2h}\ f'(\tilde{v}_\mu + \frac{h}{2}\ S_\mu)\ S_\mu,$$

$$S_\mu = \bar{m}\left(\tilde{v}_{\mu^+}^n - \tilde{v}_\mu^n,\ \tilde{v}_\mu^n - \tilde{v}_{\mu^-}^n\right),$$

com

$$\bar{m}(x,y) = \begin{cases} x, & |x| \leq |y| \\ y, & |y| < |x|. \end{cases} \tag{4.4}$$

Detalhes no Apêndice A.

Esquema de Evolução Automaticamente ADAPTATIVO

Com todos estes ingredientes o esquema ADAPTATIVO proposto pode ser resumido da seguinte maneira.

Suponhamos que a solução numérica está representada no nível de tempo t_n pelas médias celulares v^n em uma malha esparsa Γ^n. Os seguintes passos nos conduzem à representação v^{n+1} em Γ^{n+1} do próximo nível de tempo.

1. Extensão
$$(\Gamma^n,\ v^n) \overset{\mathcal{E}}{\longmapsto} (\Gamma^{n+1/2},\ \tilde{v}^n)$$

2. Evolução temporal
$$\tilde{v}^n \overset{\mathcal{D}}{\longmapsto} \hat{v}^{n+1}.$$

3. Truncamento
$$(\Gamma^{n+1/2},\ \hat{v}^{n+1}) \overset{\mathcal{T}_\epsilon}{\longmapsto} (\Gamma^{n+1},\ v^{n+1}).$$

No Apêndice C descrevemos o algoritmo associado ao esquema ADAPTATIVO.

Antes de prosseguirmos vamos listar as principais características dos esquemas de multi-resolução desenvolvidos por A. Harten que usaremos nos próximos capítulos para efeito de comparação. Em [16], ele construiu o esquema de multi-resolução MRENO cujas principais características são:

1. A evolução é sempre realizada na malha uniforme X^{k_0+L}.

2. Os algoritmos de análise e síntese sempre utilizam médias celulares na malha uniforme X^{k_0+L}.

3. Os coeficientes wavelet significativos são utilizados para identificar os pontos onde o fluxo numérico é calculado exatamente. A estrutura de tais pontos é similar à da malha estendida $\Gamma^{n+1/2}$ do algoritmo ADAPTATIVO. Nos demais pontos de X^{k_0+L} os fluxos são interpolados.

Em [15], A. Harten desenvolveu o esquema de multi-resolução MRSENO, que é exatamente MRENO com o indicador de fluxo análogo ao do ADAPTATIVO. Nos próximos capítulos chamaremos simplesmente de ENO o esquema ENO tradicional em malhas uniformes. Mais detalhes sobre estes três esquemas encontram-se nos Apêndices A, B.

4.3 Aplicando o Esquema ADAPTATIVO

Para testar o esquema ADAPTATIVO vamos considerar a equação de Burgers

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0, \quad x \in [0,1],$$

com condição inicial $u(x,0)$ e condições de fronteira periódicas. Adotamos um esquema de multi-resolução onde a malha possui 2^3 pontos no nível mais grosso e 6 níveis de escala. Isto é, $k_0 = 3$, $L = 5$, e $h_{k_0+L} = 2^{-8}$. Para $CFL = 0.8$, o passo temporal Δt utilizado satisfaz a condição

$$\frac{\Delta t}{h_L} \max_{x\in[0,1]} |f'(u(x,t))| = 0.8. \tag{4.5}$$

4.3.1 Testes de Habilidade do Esquema ADAPTATIVO

Para testar a habilidade do esquema ADAPTATIVO em seguir as singularidades da solução automaticamente, primeiro escolhemos a condição inicial

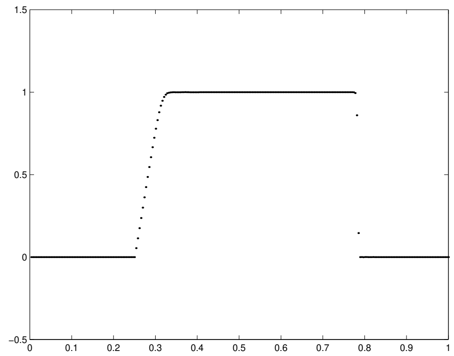
$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & x \in [0.25, 0.75] \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4.6}$$

No topo das Figuras (4.3)–(4.6) plotamos o gráfico da solução numérica nos tempos $t = 0.0625,\ 0.1875,\ 0.25,\ 0.359375$ no plano $x \times u(x,t)$. Abaixo destas figuras, os pontos de $\tilde{\mathcal{D}}_\epsilon^{n+1}$ são marcados de acordo com o nível de escala no plano $(\mu,\ l)$. Lembramos que os pontos de $\tilde{\mathcal{D}}_\epsilon^{n+1}$ juntamente com os pontos da malha mais grossa X^{k_0} formam a malha $\Gamma^{n+1/2}$ sobre a qual é feita a evolução temporal. Inicialmente, a solução possui duas descontinuidades: em $x = 0.25$ e em $x = 0.75$. A primeira gera uma onda rarefação e a segunda propaga-se como um choque. No plano posição-escala das Figuras (4.3)–(4.6) observamos que os pontos da malha possuem formato de cones. Note que os vértices onde concentram-se os pontos do nível mais fino $k_0 + L$ indicam justamente o extremo esquerdo da onda de rarefação ($x = 0.25$), e o ponto associado ao choque.

Para testar a habilidade do método em refinar perto de singularidades que surgem no decorrer do tempo escolhemos a condição inicial

$$u(x,0) = 0.5 + \sin 2\pi x. \tag{4.7}$$

No topo das Figuras (4.7)–(4.9) mostramos o gráfico da solução numérica nos tempos $t = 0.015625,\ 0.121875,\ 0.3984375$. Abaixo destas figuras marcamos no plano posição-escala



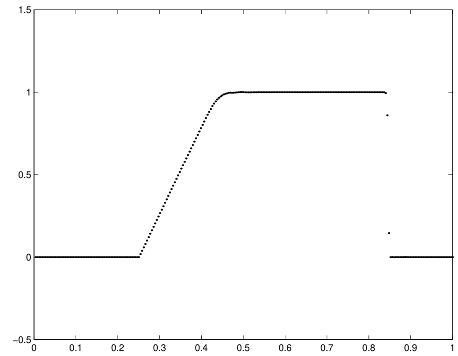
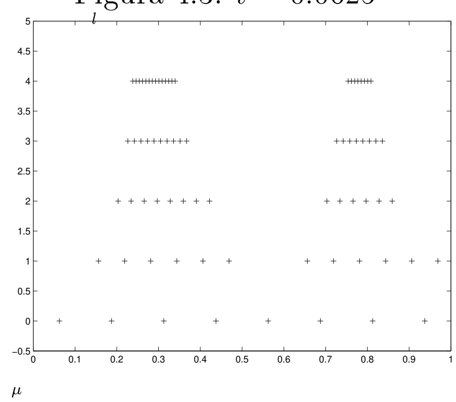
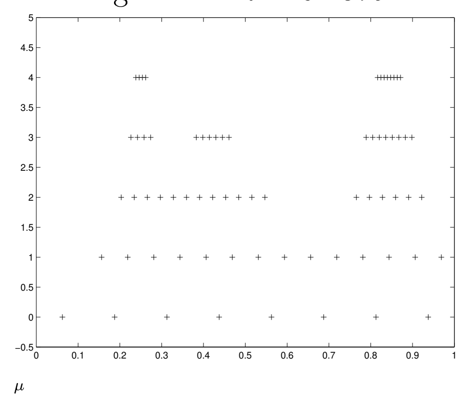
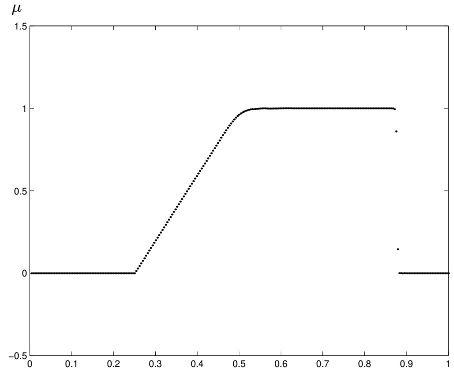


Figura 4.3: $t = 0.0625$ Figura 4.4: $t = 0.1875$

l







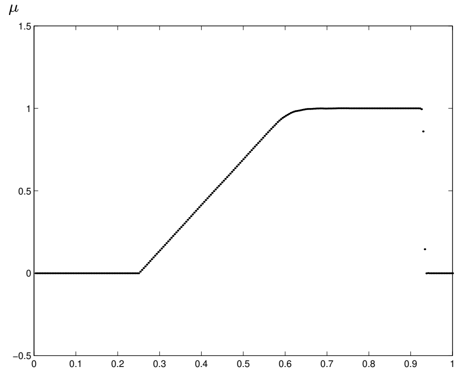
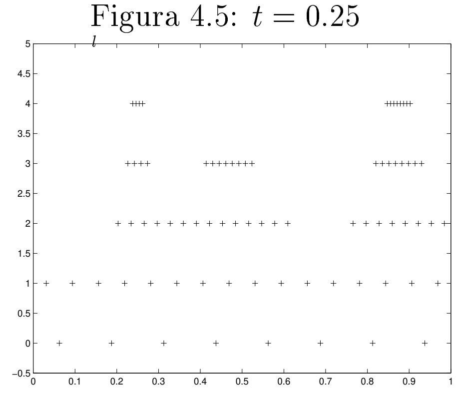
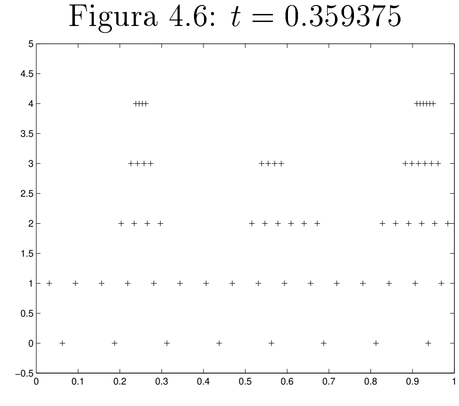


Figura 4.5: $t = 0.25$ Figura 4.6: $t = 0.359375$

l





os pontos de $\tilde{\mathcal{D}}_{\epsilon}^{n+1}$. A condição inicial é periódica e suave. Em $t = 0.015625$ e $t = 0.121875$

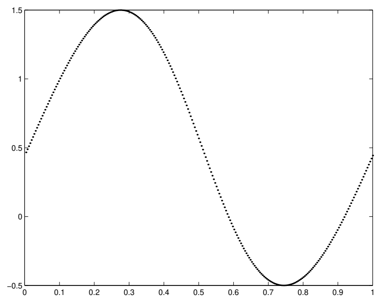


Figura 4.7: 0.015625

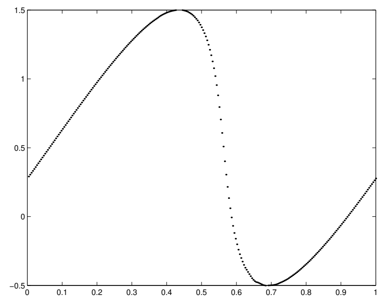


Figura 4.8: 0.121875

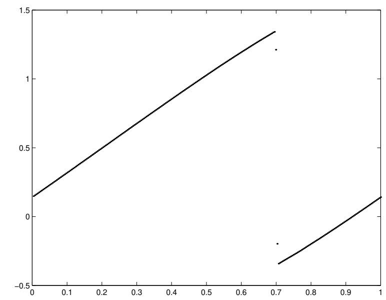
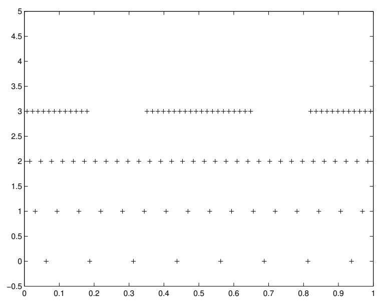
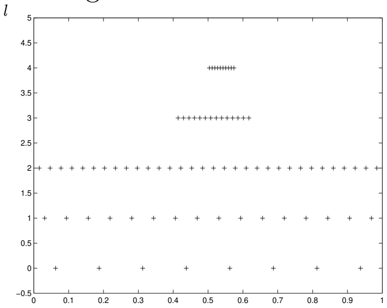
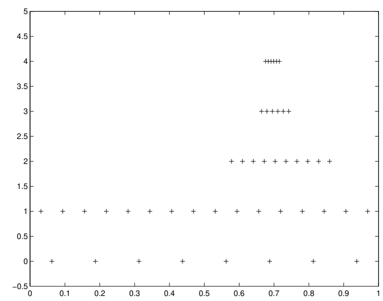


Figura 4.9: 0.3984375

l







a solução ainda é suave e ainda não foi necessário usar o fluxo ENO. Em $t = 0.3984375$ o choque já está formado e bem resolvido, com um refinamento local próximo dele.

Diferença entre os Esquemas ENO e ADAPTATIVO

Definimos $DIF(t_n) = \bar{w}^n - \tilde{v}^n$ como a diferença entre a solução $\bar{w}^n$ do esquema ENO, definido na malha uniforme X^{k_0+L}, e $\tilde{v}^n$, a solução do esquema ADAPTATIVO estendida a X^{k_0+L}, e

$$||DIF(t)||_1 = \frac{1}{N_L} \sum_{\mu \in X^L \setminus \{0\}} |\tilde{v}_\mu^n - \bar{w}_\mu^n|,$$

onde N_L é o número de células da malha X^{k_0+L}. Calculamos $||DIF(t)||_1$, para os dois casos (4.6) e (4.7). Como mostra a Tabela 4.1, $\max_{0 \leq t \leq 1} ||DIF(t)||_1$ permanece da mesma ordem do parâmetro de truncamento. Verifica-se portanto o mesmo comportamento previsto no esquema MRSENO de A. Harten [15].

ϵ	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
(4.6)	$1.29\ 10^{-2}$	$2\ 10^{-3}$	$1.615\ 10^{-4}$	$1.2028\ 10^{-5}$	$1.5995\ 10^{-6}$
(4.7)	$6.4\ 10^{-3}$	$1.1\ 10^{-3}$	$2.6924\ 10^{-4}$	$4.7212\ 10^{-5}$	$6.944\ 10^{-6}$

Tabela 4.1: $\max_{0 \le t \le 1} ||DIF(t)||_1$.

Estudo Comparativo

Para se ter uma idéia do comportamento qualitativo do tempo de CPU, da diferença $DIF(t)$ e do número de células em função do tempo t no esquema ADAPTATIVO realizamos experimentos com $k_0 + L = 14$ e $\epsilon = 10^{-3}$.

Nas Figuras (4.10), (4.11) e (4.12) mostramos o gráfico do tempo de CPU para evoluir a solução até o tempo t no plano $t \times CPU(t)$, para os esquemas ENO (linha tracejada) e para os esquemas de multi-resolução (linha contínua). Quando comparamos ENO com MRENO e com MRSENO não há um ganho computacional significativo de tempo de CPU. Lembramos que, tanto em MRENO quanto em MRSENO, a evolução é feita na malha mais fina, e o ganho é apenas em número de fluxos calculados exatamente. No caso em questão, a expressão do fluxo f é bem simples, e este ganho não é significativo para compensar os esforços introduzidos pelos algoritmos de multi-resolução. Usando o esquema ADAPTATIVO ocorreu aproximadamente 55% de economia computacional, ou seja , nosso método gasta apenas 45% do tempo do esquema de referência ENO. Este ganho é devido ao pequeno número de células utilizadas em cada iteração temporal, como pode ser observado no gráfico plotado no plano $t\times$ Número de células no tempo t, da Figura 4.13. Para o mesmo experimento, a diferença $DIF(t)$ permanece da ordem de $\epsilon = 10^{-3}$, como mostra o gráfico plotado no plano $t \times DIF(t)$, da Figura 4.14.

Para a condição inicial (4.7), medimos o tempo de CPU em segundos para evoluir a solução até $t = 0.109375$, para diferentes parâmetros de truncamento $\epsilon = 10^{-3},\ 10^{-4}$ e 10^{-5}, e para diferentes níveis da malha mais fina $L = 5, 6, \ldots, 11$. A Tabela 4.2 mostra os resultados para os quatro esquemas ENO, MRENO, MRSENO e ADAPTATIVO. Observamos que a utilização do esquema ADAPTATIVO começa a ser vantajosa a partir do nível $L = 8$ e para $\epsilon = 10^{-3}$. Essa vantagem aumenta conforme L e ϵ aumentam.

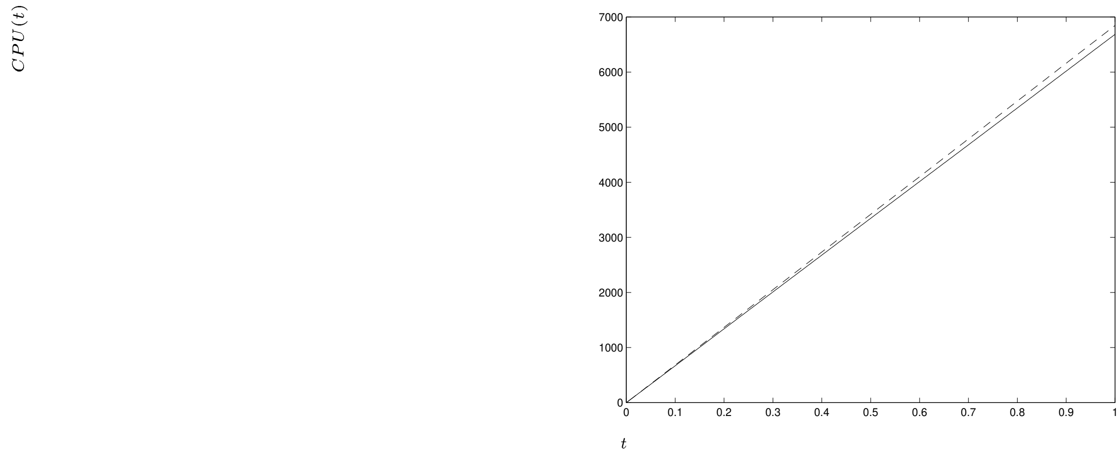


Figura 4.10: Tempo de CPU para ENO e MRENO

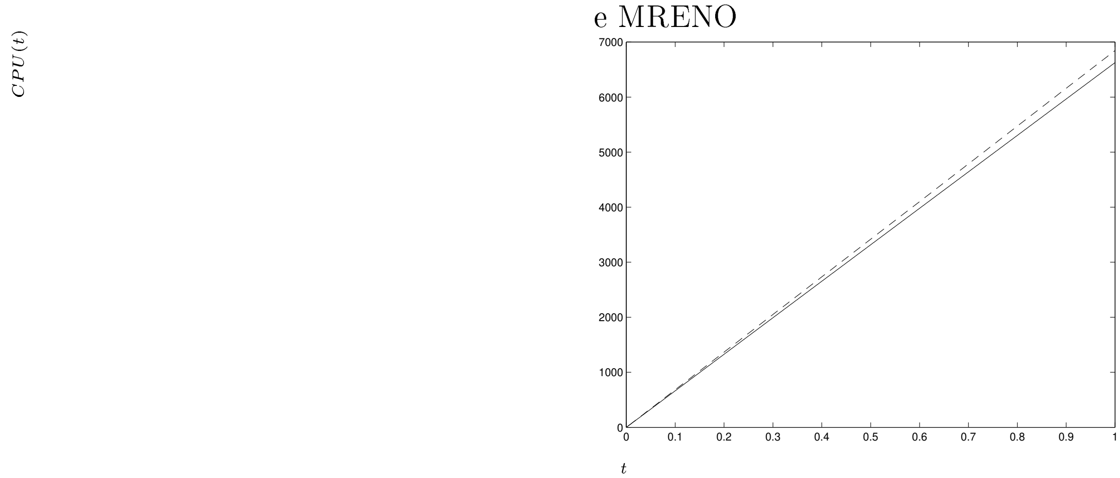


Figura 4.11: Tempo de CPU para ENO e MRSENO

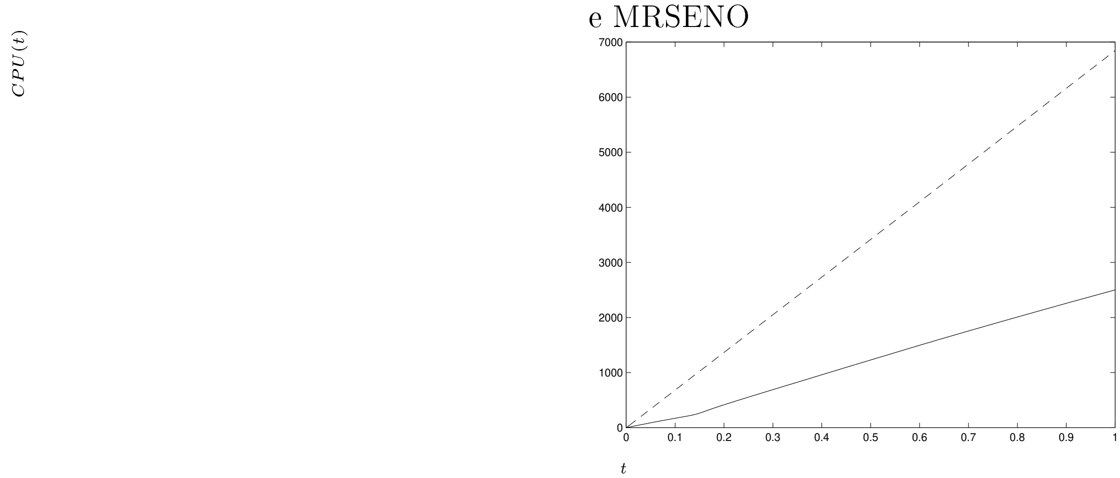


Figura 4.12: Tempo de CPU para ENO e ADAPTATIVO

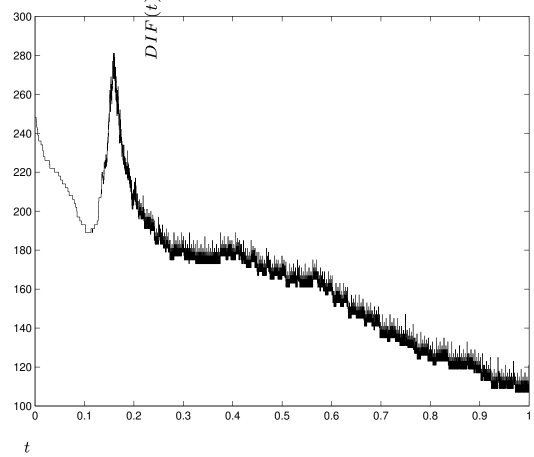


Figura 4.13: Número de Células

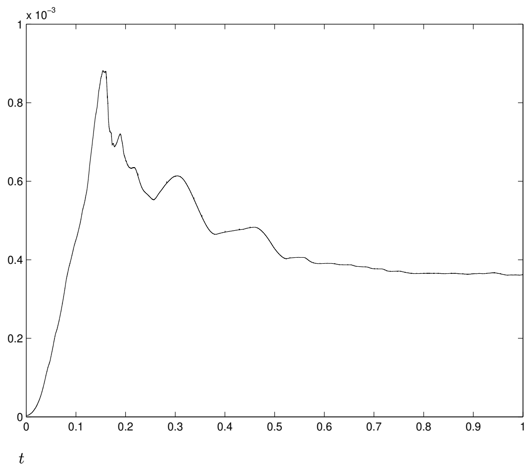


Figura 4.14: Diferença entre ENO e ADAPTATIVO

ϵ	esquema	$L=5$	$L=6$	$L=7$	$L=8$	$L=9$	$L=10$	$L=11$
	ENO	0.19	0.74	2.94	11.65	48.51	186.46	744.06
	MRENO	0.25	0.86	3.15	12.5	46.54	182.24	743.95
10^{-3}	MRSENO	0.21	0.78	2.97	12.24	46.28	183.42	729.64
	ADAPTATIVO	0.73	1.66	3.64	10.26	25.98	67.42	187.36
	MRENO	0.32	1.02	3.47	12.53	47.99	185.61	729.05
10^{-4}	MRSENO	0.25	0.85	3.12	11.94	46.89	184.86	733.96
	ADAPTATIVO	1.45	3.35	7.84	16.54	45.95	111.52	284.75
	MRENO	0.38	1.29	4.12	14.01	51.02	192.91	744.61
10^{-5}	MRSENO	0.31	0.95	3.38	12.56	48.18	188.05	741.42
	ADAPTATIVO	2.29	6.57	15.29	36.65	86.85	210.82	501.71

Tabela 4.2: Tempo de CPU

Capítulo 5

Aplicação

Neste capítulo, aplicamos o esquema de multi-resolução ADAPTATIVO desenvolvido no capítulo anterior para calcular a solução numérica do problema de Buckley-Leverett e do sistema de equações que modela a injeção de água com polímero num reservatório de óleo. Comparamos o tempo de CPU desta solução com aquelas obtidas utilizando os esquemas ENO, e os esquemas MRENO E MRSENO.

5.1 Introdução

Um reservatório de óleo é um meio poroso, cujos poros contém alguns hidrocarbonetos comumente chamados de óleo. A fim de obter o óleo contido nesse meio, os técnicos que trabalham nessa área dividem os poços em dois conjuntos - um conjunto de poços de injeção e outro de poços de produção. Os poços de injeção são utilizados para injetar um fluído não caro, usualmente água, no meio poroso, a fim de empurrar o óleo na direção dos poços de produção.

Consideremos uma massa cilíndrica porosa estendida sobre o eixo x. Supondo que a água é injetada a partir de um poço localizado em $x = 0$, a interpretação para a solução deste problema é a seguinte. Quando a água é injetada no poço, ela desloca uma certa fração de óleo instantaneamente. Depois deste choque existe uma mistura de óleo e água, onde a quantidade de óleo vai diminuindo conforme o tempo avança. Em um poço de produção localizado em $x = 1$ obtém-se óleo até a chegada do choque, seguida pela mistura de óleo e água. Matematicamente, o fluxo de água em óleo na massa cilíndrica porosa é modelado em termos da saturação da água pela equação de Buckley-Leverett, conforme descreveremos na Seção 5.2.

Com o objetivo de aumentar a eficiência do processo acima, uma pequena quantidade de um certo polímero é acrescentado a água a fim de aumentar a viscosidade da mesma.

Isto possibilita uma maior produção de óleo do poço. Matematicamente, este problema é modelado medindo-se a saturação de água e a concentração do polímero no reservatório. As equações que modelam este problema formam o sistema de equações que descrevemos na Seção 5.3. Maiores detalhes das seções acima mencionadas podem ser encontrados nas referências [20] e [21].

Aplicamos os esquemas ENO, MRENO, MRSENO e ADAPTATIVO aos dois modelos, fazendo um estudo comparativo em termos de tempo de CPU.

5.2 Equação de Buckley-Leverett

Nesta seção trabalharemos com a equação de Buckley-Leverett

$$s(x,\ t)_t + (f(s(x,t))_x = 0, \tag{5.1}$$

onde $s = s(x,t)$ mede a saturação de água no meio poroso e varia de 0 a 1, e o fluxo $f(s)$, chamado de fluxo fracionário, é da forma

$$f(s) = \frac{s^2}{s^2 + a(1-s)^2}$$

com $0 \leq a \leq 1$. Assumimos as seguintes condições inicial e de fronteira

$$\begin{aligned} s(x,0) &= 0, \quad 0 < x \leq 1, t > 0, \\ s(0,t) &= 1. \end{aligned}$$

O problema acima possui uma única solução entrópica que desenvolve um choque e uma onda de rarefação. Para o estudo da existência, unicidade e dependência contínua para este tipo de equação indicamos a referência [27]. A solução exata para a equação de Buckley-Leverett é dada por

$$s(x,t) = \begin{cases} 1, & x \leq f'(1)\,t \\ (f')^{-1}\left(\dfrac{x}{t}\right), & f'(1)\,t \leq x \leq f'(s^*)\,t \\ 0, & x \leq f'(s^*)\,t, \end{cases}$$

onde

$$s^* = \sqrt{\frac{a}{a+1}},$$

e

$$f'(s) = \frac{2a(s-s^2)}{(s^2+a(1-s)^2)^2}.$$

Na figura 5.1 plotamos a solução exata $s(x,t)$ no tempo $t = 0.109375$ para $a = 0.7$. Nas figuras 5.2, 5.3 e 5.4 estão plotadas as soluções numéricas usando, respectivamente, os métodos Upwind, Lax-Wendroff e ENO numa malha uniformemente espaçada do intervalo $[0,1]$ com 1024 pontos. A solução obtida usando Lax-Wendroff não satisfaz o nosso problema. A solução numérica obtida pela utilização do esquema ENO e Upwind é boa, sendo que aquela obtida com ENO é mais precisa.

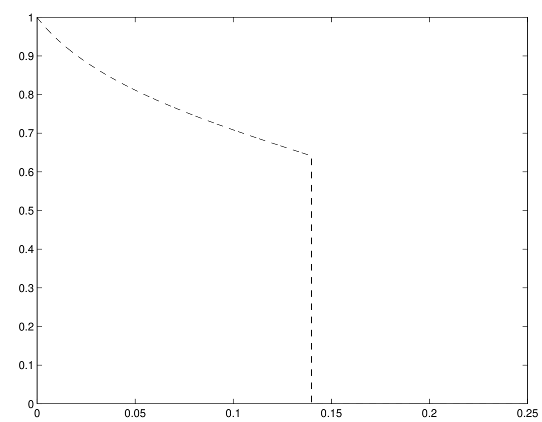


Figura 5.1: Solução exata

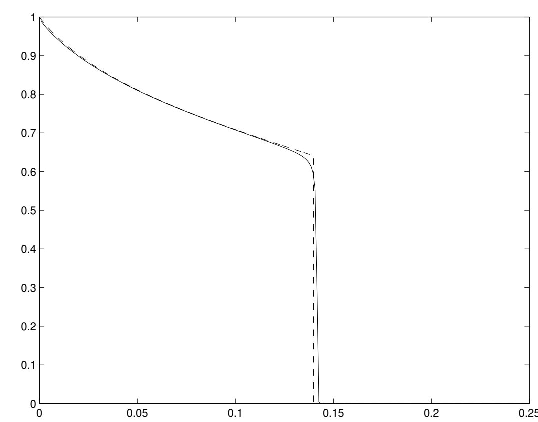


Figura 5.2: Esquema Upwind

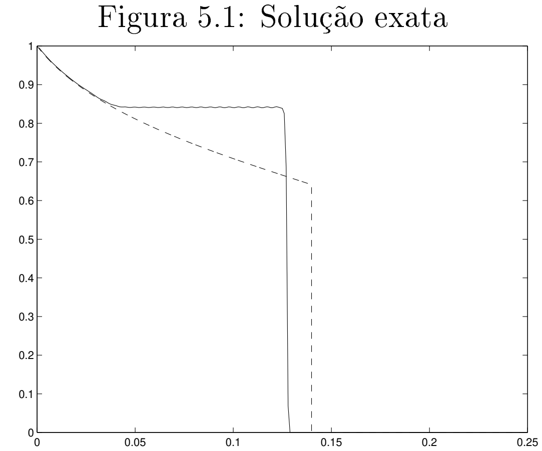


Figura 5.3: Esquema Lax-Wendroff

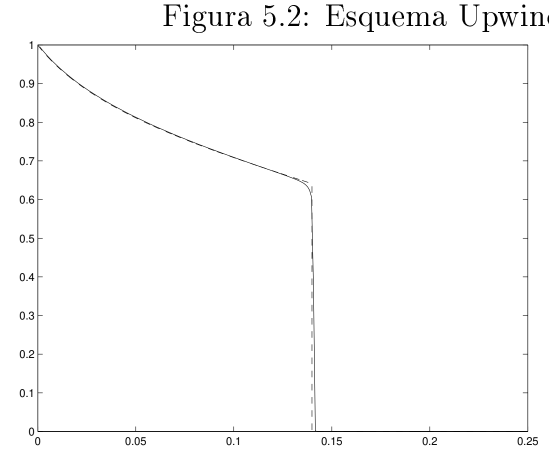


Figura 5.4: Esquema ENO

5.2.1 Aplicando o Esquema ADAPTATIVO

Nesta seção aplicamos o esquema ADAPTATIVO para calcular a solução numérica do problema de Buckley-Leverett. Comparamos o tempo de CPU desta solução com aquelas obtidas utilizando o esquema ENO, e os esquemas MRENO E MRSENO.

Assumimos que $a = 0.7$. Salvo menção em contrário, no método ADAPTATIVO o parâmetro de truncamento $\epsilon = 10^{-3}$, a malha possui 2^3 pontos no nível mais grosso e 9 níveis de escala. Isto é, $k_0 = 3$, $L = 8$ e $h_{k_0+L} = 2^{-11}$. Para CFL=0.8 o passo temporal Δt utilizado satisfaz (4.5). Na Figura 5.5 mostramos o gráfico da solução numérica obtida pelo esquema ADAPTATIVO no tempo $t = 0.109375$ e na Figura 5.6 marcamos os pontos de $\tilde{\mathcal{D}}_\epsilon^{n+1}$ no plano posição-escala. Lembramos que no esquema ADAPTATIVO usamos o

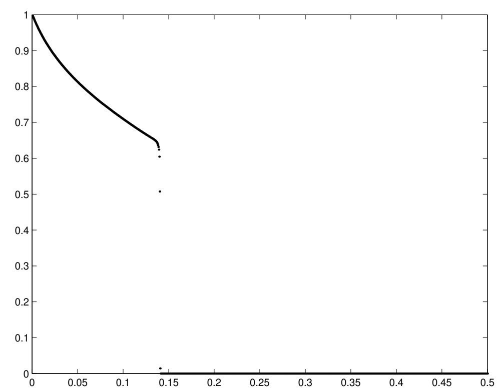
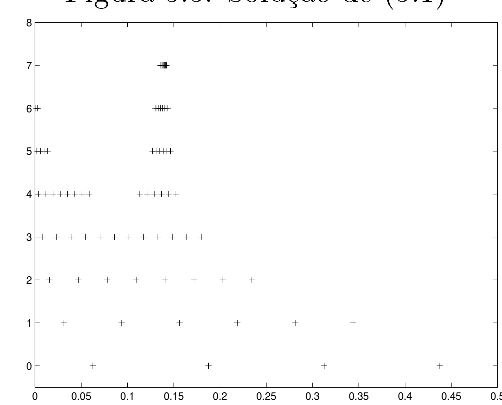


Figura 5.5: Solução de (5.1)

l



μ

Figura 5.6: $\tilde{\mathcal{D}}_\epsilon^{n+1}$

ϵ	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
$\max_{0<t\leq 1} \|\|DIF(t)\|\|_1$	$2.8\ 10^{-3}$	$5.73\ 10^{-4}$	$5.4\ 10^{-5}$	$1.29\ 10^{-5}$	$3.5\ 10^{-6}$

Tabela 5.1: Diferença entre os esquemas ENO e ADAPTATIVO

esquema de Lax-Wendroff somente onde a solução é suave, combinado com o esquema ENO próximo do choque. Obtemos desta maneira uma solução numérica com a precisão desejada e com um esforço computacional bastante reduzido.

A Tabela 5.1 mostra a diferença $\max_{0\leq t\leq 1} ||DIF(t)||$ entre os esquemas ENO e ADAPTATIVO para diferentes valores do parâmetro de truncamento. Observamos que ele permanece da mesma ordem deste parâmetro.

As Figuras 5.7, 5.8 e 5.9 ilustram o comportamento qualitativo do tempo de CPU, da diferença $DIF(t)$ e do número de células em função do tempo. A Figura 5.7 mostra o gráfico do tempo de CPU em função do tempo t para os esquemas ENO (linha tracejada) e ADAPTATIVO (linha contínua). Observamos um ganho de 70% deste sobre o outro, que é justificado pelo pequeno número de células usadas em cada iteração temporal. Observamos na Figura 5.9 que apenas uma média de 71 células são utilizadas. Neste caso de estudo a diferença $DIF(t)$ é da ordem de 10^{-4}, inferior ao parâmetro de truncamento $\epsilon = 10^{-3}$, como pode ser observado na Figura 5.8.

A Tabela 5.2 mostra o tempo de CPU para diferentes valores de L e do parâmetro de truncamento ϵ para evoluir a solução até $t = 0.109375$. Observamos que neste caso, o esquema ADAPTATIVO já passa a ser vantajoso sobre o esquema ENO a partir de $L = 5$, e sobre os esquemas MRENO e MRSENO a partir de $L = 8$. Essa vantagem aumenta com L. Por exemplo, para $\epsilon = 10^{-3}$ e $L = 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$, o ganho do esquema ADAPTATIVO sobre o esquema ENO é de 13%, 36%, 55%, 70%, 78%, 84%, 87%, respectivamente. Como esperado, esta vantagem também aumenta à medida que o parâmetro ϵ aumenta. Por exemplo, para $L = 11$ e $\epsilon = 10^{-5},\ 10^{-4},\ 10^{-3}$ a vantagem do esquema ADAPTATIVO sobre o esquema ENO é de 82%, 85%, 87% , respectivamente. A mesma tendência de comportamento também é verificada quando comparamos o esquema ADAPTATIVO com os esquemas MRENO e MRSENO.

Comparando os resultados da Tabela 5.2 com aqueles da Tabela 4.2, em que $f(u) = u^2/2$, observamos que a eficácia do método ADAPTATIVO aumenta à medida que a função fluxo fica mais complicada.

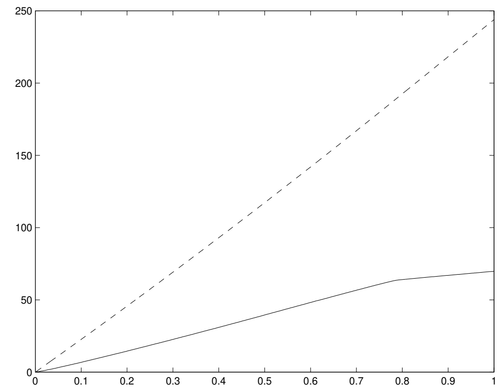


Figura 5.7: Tempo de CPU para ENO e ADAPTATIVO

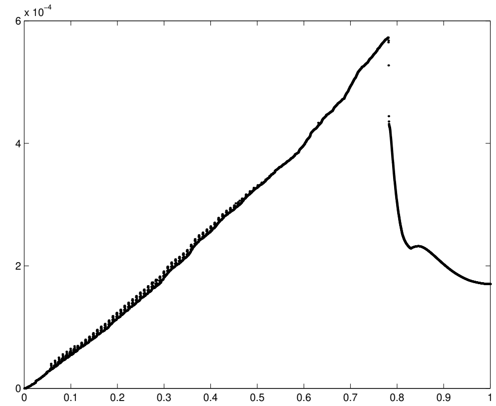


Figura 5.8: Diferença entre esquemas ENO e ADAPTATIVO

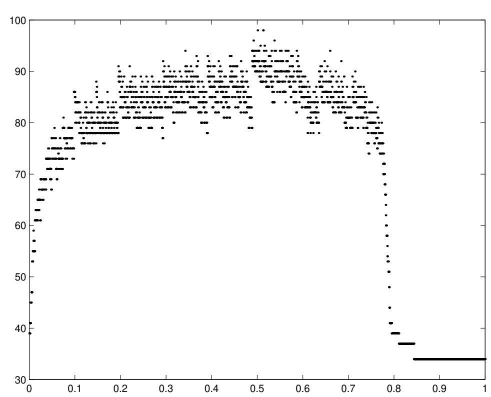


Figura 5.9: Número de células

ϵ	método	$L=5$	$L=6$	$L=7$	$L=8$	$L=9$	$L=10$	$L=11$
	ENO	0.4	1.57	6.22	24.82	98.98	396.03	1587.20
10^{-3}	MRENO	0.25	0.89	3.3	12.33	47.48	185.24	730.38
	MRSENO	0.22	0.82	3.09	12.03	46.66	184.25	731.46
	ADAPTATIVO	0.35	1.01	2.78	7.57	21.36	63.66	204.07
10^{-4}	MRENO	0.26	0.91	3.38	12.66	48.61	189.71	745.14
	MRSENO	0.24	0.84	3.16	12.1	47.45	187.15	743.08
	ADAPTATIVO	0.38	1.15	3.31	9.32	26.2	75.80	230.93
10^{-5}	MRENO	0.25	0.95	3.52	13.25	50.27	193.27	754.09
	MRSENO	0.25	0.91	3.30	12.46	48.33	189.54	747.93
	ADAPTATIVO	0.39	1.25	4.01	11.80	33.79	96.30	286.35

Tabela 5.2: Tempo de CPU

5.3 Sistema de Equações que Modela a Injeção de Água com Polímero num Reservatório de Óleo

Vimos que a produção de óleo de um reservatório pode ser feita pela injeção de água em certos poços para a produção de óleo em outros. Com o objetivo de aumentar a eficiência do processo acima, uma pequena quantidade de um certo polímero é acrescentado à água a fim de aumentar a viscosidade da mesma. Isto possibilita uma maior produção de óleo do poço. Para medir a quantidade de óleo produzida, matematicamente, este problema é modelado medindo-se a saturação de água e a concentração do polímero no reservatório. As equações que modelam este problema formam o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} s_t + (f(s,c))_x & = 0 \\ (cs)_t + (cf(s,c))_x & = 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

A primeira equação modela a conservação de água, onde s é a saturação de água e c é a concentração do polímero na água, $0 \leq c \leq 1$, e

$$f(s,c) = \frac{s^2}{s^2 + (1-s)^2 \ (0.5+c)},$$

é o fluxo fracionário. A segunda equação reflete o fato de que o polímero é conservado e se movimenta passivamente com a água.

O sistema (5.2) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} s_t + (f(s,c))_x = 0 \\ c_t + \dfrac{f(s,c)}{s} c_x = 0, \end{cases}$$

ou na forma matricial como

$$\begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} f_s & f_c \\ 0 & \dfrac{f}{s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Observemos que estas equações não estão na forma conservativa. Mas, definindo a mudança de variáveis

$$b = cs,$$

$$g(s,b) = \frac{f(s,c)}{s},$$

obtemos o sistema equivalente

$$\begin{cases} s_t + (sg(s,b))_x = 0 \\ b_t + (bg(s,b))_x = 0, \end{cases} \tag{5.3}$$

onde $0 \leq b \leq s \leq 1$. As soluções dos sistemas (5.2) e (5.3) estão respectivamente, na região $0 \leq s, c \leq 1$ no plano s–c e na região $0 \leq b \leq s \leq 1$ no plano s–b.

Matricialmente, o sistema (5.3) assume a forma

$$\begin{pmatrix} s_t \\ b_t \end{pmatrix} + J(s,b) \begin{pmatrix} s_x \\ b_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

onde

$$J(s,b) = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

com $J_{11} = g + sg_s,\ J_{12} = sg_b,\ J_{21} = bg_s,\ J_{22} = g + bg_b$ e

$$g(s,b) = \frac{s^2}{s^3 + (1-s)^2(0.5s + b)},$$

$$g_s(s,b) = \frac{s(2b(s-1) + 0.5s - 1.5s^3)}{[s^3 + (1-s)^2(0.5s+b)]^2}$$

e

$$g_b(s,b) = \frac{-s^2(1-s)^2}{[s^3+(1-s)^2(0.5s+b)]^2}.$$

As velocidades características (autovalores da matriz de ordem 2 em (5.4)) são

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \lambda_1(s,b) = g(s,b),\\
\lambda_2 &= \lambda_2(s,b) = g(s,b) + sg_s(s,b) + bg_b(s,b) = f_s(s,c),
\end{aligned}$$

cujos correspondentes autovetores à direita são:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= r_1(s,b) = (-g_b(s,b), g_s(s,b)),\\
\mathbf{r}_2 &= r_2(s,b) = (s,b).
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Calculemos o conjunto formado pelos vetores $\mathbf{l}_1$ e $\mathbf{l}_2$, biortonormal a $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$. Inicialmente, montamos a matriz $T(s,b)$ cujas colunas são formadas por $\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2$.

$$T(s,b) = \begin{pmatrix} -g_b & s \\ g_s & b \end{pmatrix}.$$

A seguir, definimos $\mathbf{l}_1,\ \mathbf{l}_2$ como a k-ésima linha de $T^{-1}(s,b)$, a matriz inversa de $T(s,b)$,

$$T^{-1}(s,b) = \frac{-1}{bg_b+sg_s}\begin{pmatrix} b & -s \\ -g_s & -g_b \end{pmatrix} = \frac{1}{bg_b+sg_s}\begin{pmatrix} -b & s \\ g_s & g_b \end{pmatrix}.$$

Obtemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{l}_1 &= l_1(s,b) = \frac{1}{bg_b+sg_s}(-b,s)\\
\mathbf{l}_2 &= l_2(s,b) = \frac{1}{bg_b+sg_s}(g_s,g_b).
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Posteriormente utilizaremos estas expressões para montar o fluxo ENO de ordem dois para (5.3). Aplicaremos o algoritmo apresentado no capítulo anterior na resolução do sistema (5.3) com as seguintes condições iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} s(x,0) = 0.6,\\ b(x,0) = 0.0, \end{cases} \tag{5.8}$$

$$\begin{cases} s(0,t) = 1.0,\\ b(0,t) = 0.2. \end{cases} \tag{5.9}$$

Observamos que a solução exata deste sistema é dada por

$$s(x,t) = \begin{cases} (f')^{-1}\left(\dfrac{x}{t}\right), & 0 \leq x \leq f'(s^*, 0.7)\, t, \\ s_m, & f'(s^*, 0.7)\, t \leq x \leq \dfrac{f(s_m, 0.5)}{s_m}, \\ 0.6, & \dfrac{f(s_m, 0.5)}{s_m}\, t \leq x, \end{cases}$$

$$b(x,t) = \begin{cases} 0.2\, s(x,t), & 0 \leq x \leq f'(s^*, 0.7)\, t, \\ 0, & x > f'(s^*, 0.7)\, t, \end{cases}$$

onde

$$s^* = \sqrt{\frac{7}{1.7}},$$

e s_m é a solução da equação

$$\frac{s^2}{s^2 + 0.5(1-s)^2} = \frac{f(s^*)}{s^*}\, s.$$

Detalhes sobre o cálculo da solução exata de (5.3) podem ser encontrados na referência [20].

A seguir fornecemos as expressões do fluxo numérico utilizadas para o cálculo da solução numérica.

Esquema Upwind

O fluxo é calculado usando-se a expressão

$$\bar{f}_\mu = f_\mu^{UP} = f\begin{pmatrix} s_\mu \\ b_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_\mu\, g(s_\mu, b_\mu) \\ b_\mu\, g(s_\mu, b_\mu) \end{pmatrix}.$$

Esquema Lax-Wendroff

O fluxo é calculado usando-se a expressão

$$f_\mu^{LW} = f\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} s_\mu + s_{\mu^+} \\ b_\mu + b_{\mu^+} \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2}\left[f\begin{pmatrix} s_\mu \\ b_\mu \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} s_{\mu^+} \\ b_{\mu^+} \end{pmatrix}\right]\right).$$

Esquema ENO de Ordem Dois

O fluxo é calculado usando-se a seguinte expressão

$$f_\mu^{ENO} = f^{UP}(\tilde{\mathbf{v}}_\mu, \tilde{\mathbf{v}}_{\mu^+}),$$

onde

$$\tilde{\mathbf{v}}_\mu = \mathbf{z}_\mu - \frac{\Delta t}{2h}\ J(\mathbf{z}_\mu)(S_{1\mu}\ \mathbf{r}_{1\mu} + S_{2\mu}\ \mathbf{r}_{2\mu})$$

é uma aproximação de $(s(x,t), b(x,t))^t$ em (μ^-, μ) calculada em $x = \mu$ e $t = t_n$,

$$\mathbf{z}_\mu \quad = \quad w_{1\mu}\ \mathbf{r}_{1\mu} + w_{2\mu}\ \mathbf{r}_{2\mu} + \frac{1}{2}(S_{1\mu}\ \mathbf{r}_{1\mu} + S_{2\mu}\ \mathbf{r}_{2\mu}),$$

é a reconstrução de (s, b) em $[\mu^-, \mu]$, a partir das médias celulares, calculada em $x = \mu$ no tempo $t = t_n$, e

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{i\mu} &= r_i(\mathbf{v}_\mu), \\
w_{i\mu} &= l_i(\mathbf{v}_\mu) \cdot \mathbf{v}_\mu, \\
S_{i\mu} &= \bar{m}(w_{i\mu} - w_{i\mu^-}, w_{i\mu^+} - w_{i\mu}), \quad i = 1,\ 2,
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{v}_\mu$ indica as médias celulares de (s, b) em $[\mu^-, \mu]$ no tempo $t = t_n$. Lembramos que $J(\mathbf{z}_\mu)$ é a matriz em (5.5) calculada em $\mathbf{z}_\mu$, as expressões de $\mathbf{r}_i$ e $\mathbf{l}_i$ são fornecidas pelas fórmulas (5.6), (5.7), e $\bar{m}$ é dada pela fórmula (4.4). Maiores detalhes encontram-se no Apêndice A.

Nas Figuras 5.10–5.13 plotamos a solução exata (linha tracejada) e soluções numéricas (linhas contínuas) em $t = 0.109375$ numa malha uniformemente espaçada com 2048 pontos. Como esperado o método de Lax-Wendroff não se aplica satisfatoriamente, e a solução numérica fornecida pelo esquema ENO é visivelmente melhor do que a fornecida pelo esquema Upwind. Entretanto, o esquema ENO tem um elevado custo computacional tendo em vista o processo não linear de escolha dos estênceis.

5.3.1 Aplicando o Esquema ADAPTATIVO

Para os resultados apresentados nesta seção, as malhas dos esquemas considerados possuem 2^3 pontos no nível mais grosso, isto é $k_0 = 3$, e $CFL = 0.8$. Na operação de truncamento utilizamos a norma

$$||d_\mu^l(v^n)|| = |d_\mu^l(s^n)| + |d_\mu^l(b^n)|.$$

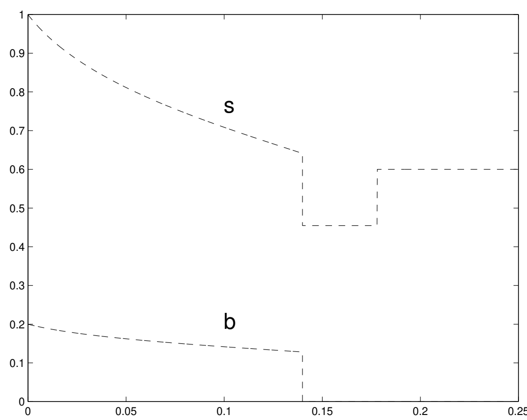


Figura 5.10: Solução exata

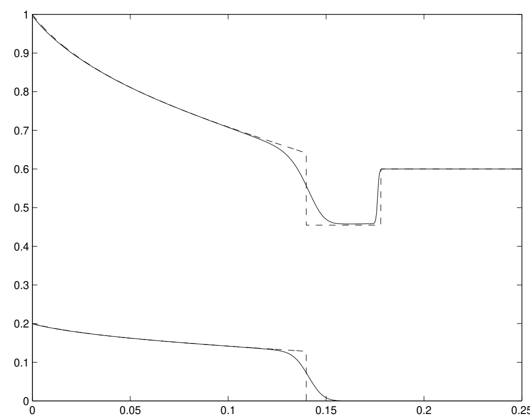


Figura 5.11: Esquema Upwind

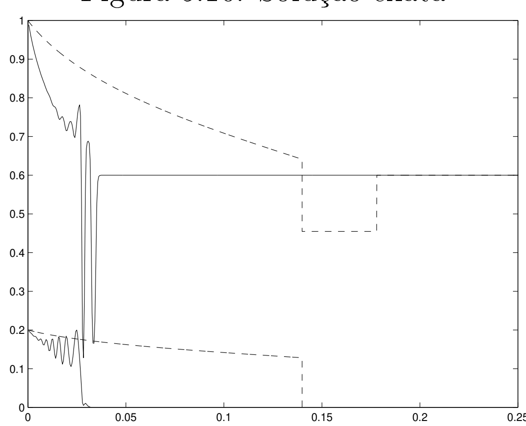


Figura 5.12: Esquema Lax-Wendroff

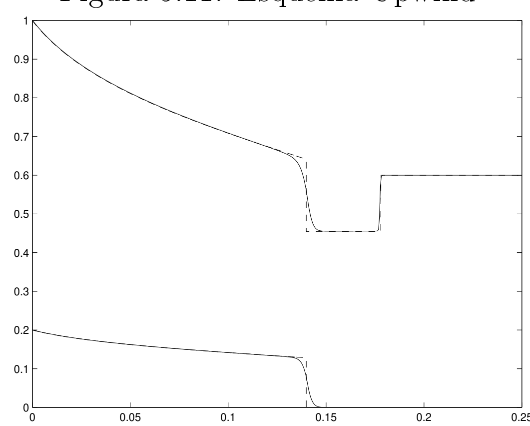


Figura 5.13: Esquema ENO

Para $\epsilon = 10^{-5}$ e $h_{k_0+8} = 2^{-11}$, mostramos na Figura 5.14 o gráfico da solução numérica obtida pelo esquema ADAPTATIVO no tempo $t = 0.109375$. Ela nos dá uma idéia da qualidade da solução obtida pelo esquema. Na Figura 5.15 marcamos os pontos de $\tilde{\mathcal{D}}_\epsilon^{n+1}$. Notamos a presença de refinamentos locais próximo aos choques e ao extremo esquerdo da onda de rarefação ($t = 0$).

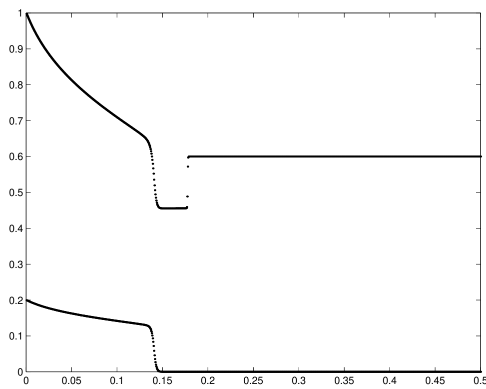


Figura 5.14: Solução de (5.3)

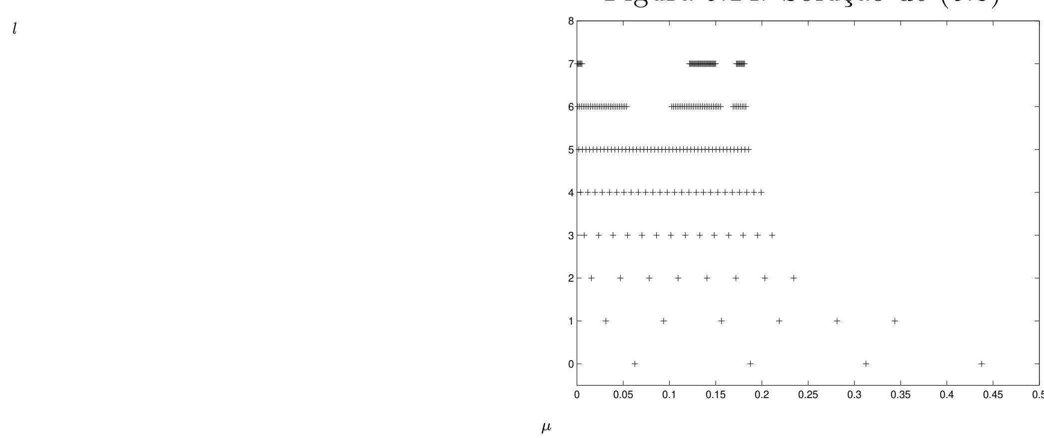


Figura 5.15: $\tilde{\mathcal{D}}_\epsilon^{n+1}$

Na Tabela 5.3 fornecemos a diferença entre os esquemas ENO e ADAPTATIVO para diferentes valores de truncamento ϵ. Como mostrado, $\max_{0\leq t\leq 1} ||DIF(t)||_1$ permanece da ordem de ϵ.

ϵ	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
s	$1.1\ 10^{-2}$	$6.2\ 10^{-3}$	$1.5\ 10^{-3}$	$5.76\ 10^{-5}$	$4.97\ 10^{-6}$
b	$6.3\ 10^{-3}$	$2.1\ 10^{-3}$	$4.92\ 10^{-4}$	$1.53\ 10^{-5}$	$1.27\ 10^{-6}$

Tabela 5.3: $\max_{0\leq t\leq 1}||DIF(t)||_1$.

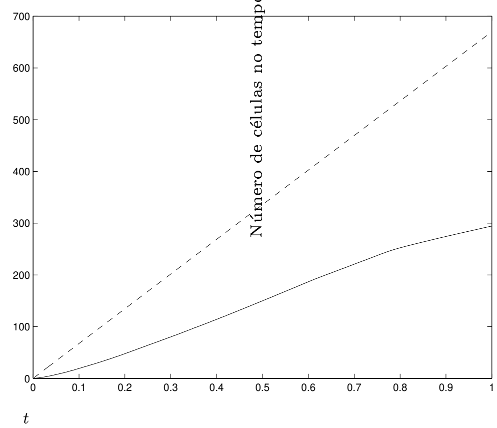


Figura 5.16: Tempo de CPU para ENO e ADAPTATIVO

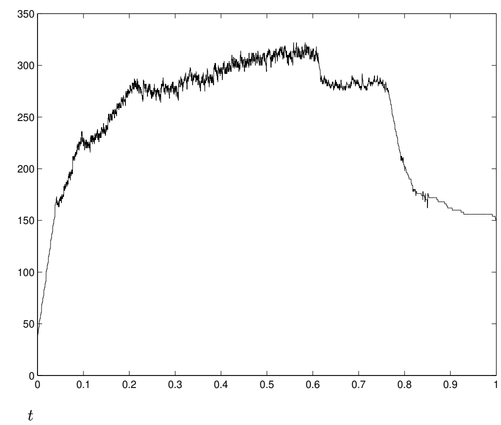


Figura 5.17: Número de Células

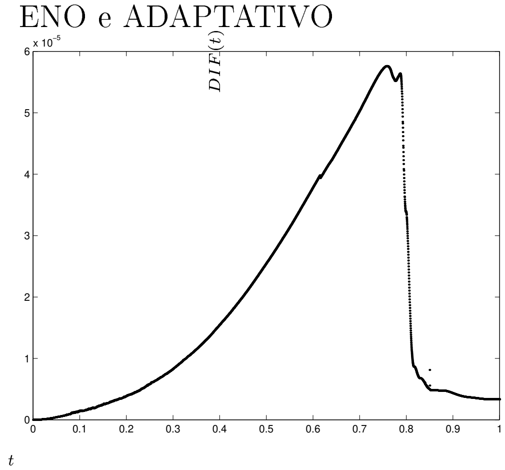


Figura 5.18: Diferença entre ENO e ADAPTATIVO para s

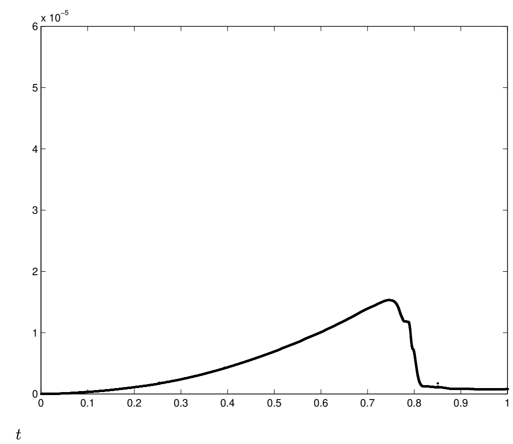


Figura 5.19: Diferença entre ENO e ADAPTATIVO para b

ϵ	método	$L=5$	$L=6$	$L=7$	$L=8$	$L=9$	$L=10$	$L=11$
	ENO	1.14	4.53	17.98	71.52	285.92	1143.07	4608.98
	MRENO	0.58	1.99	7.50	27.22	101.66	390.56	1547.29
10^{-3}	MRSENO	0.53	1.85	6.85	25.99	100.26	393.15	1553.52
	ADAPTATIVO	0.60	1.78	5.26	15.24	46.34	148.75	485.45
	MRENO	0.59	2.07	7.62	28.49	104.70	397.90	1568.10
10^{-4}	MRSENO	0.55	1.94	7.14	26.83	102.44	397.64	1564.93
	ADAPTATIVO	0.64	2.00	6.16	17.96	51.73	154.45	496.64
	MRENO	0.59	2.10	7.95	29.55	108.71	409.28	1596.06
10^{-5}	MRSENO	0.56	2.02	7.47	27.87	105.44	405.24	1581.95
	ADAPTATIVO	0.66	2.15	7.08	21.70	63.40	182.04	547.01

Tabela 5.4: Tempo de CPU

As Figuras 5.16–5.19 ilustram o comportamento qualitativo do tempo de CPU, da diferença $DIF(t)$ e do número de células em função do tempo. A Figura 5.16 mostra o gráfico do tempo de CPU em função do tempo t para os esquemas ENO (linha tracejada) e ADAPTATIVO (linha contínua). Observamos um ganho de 57% do esquema ADAPTATIVO sobre o esquema ENO, isto é justificado pelo pequeno número de células usadas em cada iteração temporal. Observamos na Figura 5.17 que apenas uma média de 245 células são utilizadas. Neste caso de estudo a diferença $DIF(t)$ se manteve da ordem de 10^{-5}, o mesmo valor do parâmetro de truncamento ϵ, como pode ser observado nas Figuras 5.18 e 5.19.

A Tabela 5.4 mostra o tempo de CPU para diferentes valores de L e do parâmetro de truncamento ϵ para evoluir a solução até o tempo $t = 0.109375$. Observamos que já a partir de $L = 5$ os esquemas MRENO, MRSENO e ADAPTATIVO são mais vantajosos do que o esquema ENO. O esquema ADAPTATIVO passa a ter melhor performance sobre os outros três esquemas a partir de $L = 7$. Essa vantagem aumenta conforme L aumenta. Por exemplo, para $\epsilon = 10^{-5}$ e $L = 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$, o ganho do esquema ADAPTATIVO sobre o esquema ENO é de 42%, 53%, 61%, 70%, 78%, 84%, 88%, respectivamente. Como esperado, esta vantagem também aumenta à medida que o parâmetro ϵ aumenta. Por exemplo, para $L = 11$ e $\epsilon = 10^{-5},\ 10^{-4},\ 10^{-3}$ a vantagem do esquema ADAPTATIVO sobre o esquema ENO é de 88%, 89%, 90% , respectivamente. A mesma tendência de comportamento também é verificada quando comparamos o esquema ADAPTATIVO com os esquemas MRENO e MRSENO.

Capítulo 6

Conclusões e Trabalhos Futuros

6.1 Conclusões

Este trabalho, pode ser dividido em duas partes. Na primeira parte, construímos os esquemas de multi-resolução de valores pontuais e médias celulares numa malha irregular de um intervalo fechado. Vimos que podemos usar este tipo de representação para representar uma dada função de uma maneira mais econômica. Isto é, conhecendo os valores pontuais ou as médias celulares de uma função podemos obter uma representação mais econômica desta função usando apenas os coeficientes significativos obtidos após o truncamento da representação em multi-resolução. A cada um destes coeficientes está associada uma função wavelet. Em geral, funções que possuem singularidades isoladas são representadas por estas bases de uma maneira mais econômica.

Na segunda parte deste trabalho, propomos um esquema de multi-resolução em malhas adaptativas de um intervalo para a resolução de leis de conservação hiperbólicas com o objetivo principal de acelerar os cálculos numéricos. A adaptividade é obtida pelo monitoramento dos coeficientes wavelets fornecidos pela análise de multi-resolução de médias celulares da solução numérica da lei de conservação. A análise de multi-resolução automaticamente se adapta à evolução temporal da solução. Ela acompanha a solução que se move, bem como detecta o surgimento de choques que se desenvolvem com a evolução temporal. A representação esparsa conduz a uma redução significativa no tempo de CPU quando comparada com os esquemas ENO, MRENO E MRSENO em uma malha uniforme. O método é mais eficiente quando aplicado a problemas com soluções suaves em quase todo o domínio, com pequenas áreas de variação. A eficácia do método aumenta à medida que aumentamos a resolução do nível mais fino, e também à medida que a função de fluxo fica mais complicada. O esquema de multi-resolução ADAPTATIVO produz resultados a um custo computacional reduzido, que é obtido pela utilização do fluxo ENO somente em vizinhanças de singularidades da solução, e pelo fluxo de Lax-Wendroff na parte suave. Além dos ganhos em tempo de computação, ocorre também uma economia de memória pelo uso compacto de armazenamento.

6.2 Trabalhos Futuros

Tendo como base o trabalho realizado visualizamos as seguintes possibilidades de trabalhos futuros.

1. O primeiro, sem dúvida, é a extensão deste esquema para o caso bidimensional.

2. No caso unidimensional podemos aumentar a ordem dos esquemas de interpolação e de fluxo numérico.

3. Demonstração analítica da convergência e estabilidade dos esquemas envolvidos.

Apêndice A

Leis de Conservação

A modelagem matemática de problemas que envolvem a conservação de quantidades conduz a certos tipos de equações diferenciais parciais denominadas de leis de conservação. Neste apêndice descrevemos alguns dos aspectos teóricos e numéricos sobre sistemas de leis de conservação. Para maiores detalhes indicamos [8], [23], [26].

A.1 Introdução

Sistemas unidimensionais de leis de conservação hiperbólicas são sistemas de equações diferenciais parciais que dependem do tempo e que possuem a seguinte forma

$$u_t(x,t) + (f(u(x,t)))_x = 0, \tag{A.1}$$

onde $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^m$ é um vetor m-dimensional cujas coordenadas são chamadas de variáveis de estado ou de quantidades conservadas. A função vetorial $f(u)$ é chamada de função fluxo.

À equação (A.1) devemos acrescentar algumas condições iniciais e, possivelmente, dependendo do problema, condições de fronteira.

Assumimos que o sistema (A.1) é hiperbólico, ou seja, a matriz jacobiana de ordem m da função fluxo, denotada por $f'(u)$, possui a seguinte propriedade: para cada valor u, $f'(u)$ é uma matriz diagonalizável com autovalores reais.

Em geral, as funções fluxo são funções não lineares de u que conduzem a sistemas não lineares de equações diferenciais parciais, cuja solução exata nem sempre é possível de ser obtida. Apesar de poucas soluções exatas serem conhecidas, sabemos muito sobre a estrutura matemática destas equações e sua solução. Tal estrutura pode ser explorada no desenvolvimento de métodos numéricos. Apresentamos os princípios teóricos destas leis de conservação bem como alguns métodos numéricos desenvolvidos para a resolução das mesmas. Isto é feito primeiramente para uma única lei de conservação, e posteriormente para sistemas.

A.2 Uma Única Lei de Conservação

A.2.1 Parte Teórica

Se $u(x,t)$ mede a densidade de uma certa substância em I e f descreve o fluxo de u através da fronteira de I, uma lei de conservação estabelece que a taxa de variação da quantidade total de substância contida em I é igual ao fluxo que atravessa a fronteira de I. Ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b u(x,t)dx = f(u(a,t)) - f(u(b,t)). \tag{A.2}$$

Assumindo suficiente regularidade de u e f, segue que (A.2) é equivalente à forma diferencial

$$u_t(x,t) + (f(u(x,t)))_x = 0. \tag{A.3}$$

Observemos no entanto, que (A.2) pode ser satisfeita por funções u não diferenciáveis e até mesmo descontínuas.

Solução Clássica e Características

Uma solução clássica do problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t(x,t) + (f(u(x,t)))_x &= 0 \qquad \text{em } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad x\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{A.4}$$

é uma função u de $C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ que satisfaz (A.4). As soluções clássicas de (A.4) são constantes ao longo das características, que são curvas $(x(t),t)$ definidas por

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= f'(u), \quad t\in\mathbb{R}^+ \\ \\ x(0) &= x_0. \end{cases}$$

Além disso, as características são retas com inclinação igual a $f'(u_0(x_0))$. Portanto,

$$u(x(t),t) = u_0(x_0).$$

Supondo que u_0 seja de classe C^1, e usando diferenciação implícita, obtemos que as derivadas de primeira ordem de u podem ser calculadas se, e só se

$$1 + tu_0'(x)f''(u_0(x)) \neq 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Então se $\inf_{x\in\mathbb{R}} u_0'(x)f''(u_0(x)) \geq 0$, as soluções clássicas existem para todo $t > 0$. Entretanto se $\inf_{x\in\mathbb{R}} u_0'(x)f''(u_0(x)) < 0$, as soluções clássicas existem somente para $t \in (0, T^*)$ onde

$$T^* = -\frac{1}{\inf_{x\in\mathbb{R}} u_0'(x)f''(u_0(x))}.$$

No instante $t = T^*$ a derivada de u em algum ponto torna-se infinito. Em outras palavras, uma descontinuidade é criada. Concluímos que, em geral, a existência de uma solução clássica do problema de valor inicial é garantida somente em um intervalo de tempo finito. Notemos que se $x \mapsto u_0(x)$ é crescente (decrescente) e se $u \mapsto f(u)$ é convexa (côncava), a solução clássica de (A.4) é bem definida para todo $t > 0$.

Solução Fraca

Observando a formulação integral da lei de conservação, notamos que u pode ser descontínua. Então, exigir que u seja C^1 é uma condição muito forte. Ou seja, para ampliar o conjunto que contém essas soluções diminuímos as condições sobre a regularidade das mesmas.

Definição A.1 *Seja $u_0 \in L_\infty(\mathbb{R})$. Dizemos que uma função u é uma solução fraca de (A.4) se para cada $\phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$*

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (u(x,t)\phi_t(x,t) + f(u(x,t))\phi_x(x,t))dxdt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(x,0)dx = 0. \tag{A.5}$$

É claro que com esta definição, uma solução clássica do problema de valor inicial é uma solução fraca, e que, se uma solução fraca é suave, então ela é uma solução clássica.

Condição de Descontinuidade

Em geral, soluções fracas são suaves exceto num número finito de curvas. Mas existe uma restrição sobre o tipo de descontinuidade que as soluções fracas podem ter. Esta condição é chamada de condição de choque ou <u>condição de Rankine-Hugoniot</u>.

Suponhamos que a solução u é suave, exceto sobre a curva $\mathcal{C}$ parametrizada por $\{(x,t) : x = x(t)\}$, onde $x : [0,T] \to \mathbb{R}$ é suave, com vetor normal $\vec{n} = (1+(x'(t))^2)^{-1/2}(1, -x'(t))$.

A condição de choque de u em $\mathcal{C}$ é dada por

$$-[f] + [u]\,\frac{dx}{dt} = 0,$$

onde $[f] = f(u_+) - f(u_-)$, $[u] = u_+ - u_-$, u_+ e u_- são os valores de u à esquerda e à direita de $\mathcal{C}$. Ou seja,

$$\left\{\begin{aligned} s \overset{def}{=} \frac{dx}{dt} = & \ \frac{[f]}{[u]}, \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ x(0) = & \ x_0, \end{aligned}\right. \tag{A.6}$$

que fornece a equação da curva de descontinuidade $\mathcal{C}$. Dizemos que $[u]$ é o salto de u através de $\mathcal{C}$, $[f]$ é o salto de $f(u)$, e s é a velocidade de $\mathcal{C}$.

Solução Entrópica

Introduzindo o conceito de solução fraca, torna-se possível a resolução do problema de Cauchy (A.4), mas pode ocorrer que exista mais de uma solução para a mesma condição inicial. Isto é, soluções fracas podem não ser únicas. Por exemplo, o seguinte problema de Cauchy para a equação de Burgers

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0, \text{ em } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},$$

$$u(x,0) = \left\{\begin{array}{ll} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{array}\right. \tag{A.7}$$

possui soluções fracas dada por

$$u_{\alpha,\beta}(x,t) = \left\{\begin{array}{ll} -1, & x < -t, \\ \frac{x}{t}, & -t < x < \alpha t, \\ \alpha, & \alpha t < x < \frac{\alpha+\beta}{2}\,t \\ \beta, & \frac{\alpha+\beta}{2}\,t < x < \beta t, \\ \frac{x}{t}, & \beta t < x < t \\ 1, & t < x, \end{array}\right.$$

com $-1 < \alpha \leq \beta < 1$. Devemos então construir algum critério que nos permita escolher entre todas estas soluções uma única. Um princípio bastante natural é que as soluções física e matematicamente corretas devem surgir como o limite das soluções do problema

$$\begin{cases} u_t + f_x(u) - \epsilon u_{xx} = 0 & \text{em } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{em } \mathbb{R}. \end{cases} \tag{A.8}$$

Ou seja, gostaríamos que (A.4) tivesse uma solução próxima à solução de (A.8) para ϵ suficientemente pequeno. Devemos então obter alguma informação sobre a natureza das descontinuidades que são formadas na solução u de (A.8) quando ϵ tende a zero.

Considerando uma função $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, convexa e de classe C^2, e multiplicando (A.8) por $U'(u)$, obtemos

$$U_t(u) + F_x(u) = \epsilon\, U_{xx}(u) - \epsilon\, U''(u)(u_x)^2 \tag{A.9}$$

onde $F'(u) = f'(u)\; U'(u)$. Para uma função $\phi(x,t) \geq 0$ em $C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, e a partir da expressão (A.9), obtemos

$$-\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (U(u)\;\phi_t + F(u)\;\phi_x)\;\, dxdt \leq -\epsilon \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} U(u)\;\phi_{xx}\, dxdt. \tag{A.10}$$

Passando ao limite quando ϵ tende a zero, obtemos que

$$-\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (U(u)\;\phi_t + F(u)\;\phi_x)\;\, dxdt \leq 0. \tag{A.11}$$

Neste caso, pode ser demonstrado [8] que é suficiente considerar funções U do tipo $U(u) = \mid u - c \mid,\; c \in \mathbb{R}$, e que (A.11) é equivalente à desigualdade

$$-\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \mid u - c \mid \phi_t + (f(u) - f(c))\; sgn(u-c)\;\phi_x\; dxdt \leq 0, \tag{A.12}$$

chamada *desigualdade de entropia*. Ela é satisfeita por uma única solução fraca, que agora passa a ser chamada de solução de entropia. A condição (A.12), usualmente chamada de condição de entropia de Kruzkov, impoẽ a seguinte condição sobre as descontinuidades

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-} \geq \frac{f(u^+) - f(c)}{u^+ - c}, \tag{A.13}$$

para c entre u^+ e u^-.

Observação A.1 *Observamos que se $f \in C^2$ for convexa, pode ser demonstrado que a solução satisfaz a condição de entropia se, e somente se*

$$f'(u_-) > s > f'(u'_+),$$

isto é, $u_- > u_+$.

Problema de Riemann

O problema,

$$\begin{aligned} u_t + f_x(u) &= 0 \text{ em } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= \begin{cases} u_R & x>0 \\ u_L & x<0, \end{cases} \end{aligned} \tag{A.14}$$

é conhecido como problema de Riemann. Se f for estritamente convexa, tendo em vista a condição de entropia, a solução entrópica do problema de Riemann é dada por

1. Para $u_R = u_L$.
   Neste caso $u(x,t) = u_R = u_L$ é a única solução do problema de Riemann.

2. Para $u_L > u_R$.
   A única solução entrópica para este problema é dado por

$$u(x,t) = \begin{cases} u_R & x > st \\ u_L & x < st, \end{cases}$$

   onde s é velocidade de propagação da descontinuidade

$$s = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L}.$$

   Neste caso dizemos que a solução é uma onda de choque ligando os estados u_R a u_L.

3. Para $u_L < u_R$.
   A única solução entrópica é dada por

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L & \frac{x}{t} \le f'(u_L) \\ (f')^{-1}(\frac{x}{t}) & f'(u_L) \le \frac{x}{t} \le f'(u_R) \\ u_R & \frac{x}{t} \ge f'(u_R). \end{cases}$$

No caso mais geral de uma função $f \in C^2$ que possui um número finito de pontos de inflexão temos que

1. Para $u_L = u_R$.
   A solução do problema de Riemann é dada por $u(x,t) = u_L = u_R$.

2. Para $u_L < u_R$.
Neste caso, consideramos a envoltória convexa inferior $\tilde{f}$ de f no intervalo $[u_L, u_R]$. Logo, o intervalo $[u_L, u_R]$ é dividido em subintervalos de rarefação onde $\tilde{f}$ é estritamente convexa ($\tilde{f} = f$) separado por subintervalos onde $\tilde{f}$ é linear ($f \geq \tilde{f}$). Isto é, os intervalos de rarefação correspondem a uma onda de rarefação para a solução u enquanto os outros intervalos correspondem a ondas de choque. Esta seqüência de ondas de rarefação e choques é limitada à esquerda por u_L e à direita por u_R.

3. Para $u_L > u_R$.
Neste caso, consideramos a envoltória convexa superior $\tilde{f}$ de f. O intervalo $[u_R, u_L]$ é dividido em subintervalos de rarefação onde $\tilde{f} = f$ é estritamente côncava , separada por subintervalos onde $\tilde{f}$ é linear e $f \leq \tilde{f}$. Analogamente ao caso em $u_L < u_R$, esta seqüência de ondas de rarefação e choques é limitada à esquerda por u_L e à direita por u_R. Em ambos os casos a solução do problema de Riemann é da forma
$$u(x,t) = w_R\left(\frac{x}{t}; u_L, u_R\right), \tag{A.15}$$
onde a função $\xi \mapsto w_R(\xi; u, v)$ é definida

   (a) Para $u = v$ por
   $$w_R(\xi; u, v) = u$$

   (b) Para $u > v$ por
   $$w_R(\xi; u, v) = \begin{cases} u, & \xi < s \\ v, & \xi > s, \end{cases}$$
   onde
   $$s = \frac{f(u) - f(v)}{u - v}.$$

   (c) Para $u < v$ por
   $$w_R(\xi; u, v) \;=\; \begin{cases} u & \xi \leq f'(u) \\ (f')^{-1}(\xi) & f'(u) \leq \xi \leq f'(v) \\ v & \xi \geq f'(v), \end{cases}$$

Problema de valor inicial e de fronteira

Quando lidamos com a resolução numérica do problema de valor inicial, surge a necessidade de trabalharmos num domínio finito, e com isso devemos impor condições sobre a fronteira do domínio. Em geral, não é possível dar valores arbitrários na fronteira. Por exemplo, no caso linear o estudo do problema é feito analisando as curvas características. Supondo $c > 0$, faz sentido considerar condições de fronteira em $x = 0$ para o problema

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 & \text{em } \mathbb{R}^+ \times [0,1], \\ u(x,0) = u_0(x), \\ u(0,t) = g(t). \end{cases} \tag{A.16}$$

A solução é dada por

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0(x - ct) & \text{se } x - ct > 0, \\ g(t - x/c) & \text{se } x - ct < 0. \end{cases}$$

Se $c < 0$, não existe solução para quaisquer valores fornecidos em $x = 0$. Para problemas não lineares isto é mais difícil de ser analisado, pois neste caso as características dependem da solução, e conseqüentemente dos valores na fronteira. Resultados que analisam se problemas de valor inicial e de fronteira são bem postos são tratados em [8].

A.2.2 Formulação Numérica

Quando calculamos numericamente as soluções de leis de conservação, surge um novo conjunto de problemas. A abordagem clássica para a construção de métodos numéricos de equações diferenciais é obtida pela substituição das derivadas da equação diferencial parcial por aproximações discretas apropriadas. Portanto, existe uma dificuldade em aplicar estes métodos clássicos no cálculo de soluções que podem tornar-se descontínuas. Lax e Wendroff [22] superaram esta dificuldade considerando aproximações numéricas da formulação integral (A.2), ao invés da equação diferencial parcial (A.3). Eles introduziram a noção de esquemas na forma conservativa que apresentamos a seguir.

Nesta seção consideraremos uma malha regular no plano (x,t) formada pelos pontos

$$\begin{aligned} \mu_j &= jh, \quad j = 1, \dots N \\ t_n &= n\Delta t. \end{aligned}$$

Considerando o problema de valor inicial (A.4), e integrando sobre $B = (\mu_{j-1}, \mu_j) \times (t_n, t_{n+1})$, obtemos que

$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n - \frac{\Delta t}{h}(f_j^n - f_{j-1}^n),$$

onde

$$\bar{u}_j^n = \frac{1}{h} \int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} u(x, t_n) dx,$$

são as médias celulares da solução $u(x,t_n)$ na célula $[\mu_{j-1},\ \mu_j]$, e

$$f_j^n = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(\mu_j,t))dt$$

é a média celular do fluxo no intervalo de tempo $[t_n,\ t_{n+1}]$.

Isto sugere a seguinte definição.

Definição A.2 *Dizemos que um esquema numérico é conservativo se ele estiver na forma*

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{h}(\bar{f}_j^n - \bar{f}_{j-1}^n), \tag{A.17}$$

onde

$$\bar{f}_j^n = \bar{f}_j(v^n) = \bar{f}(v_{j-p}^n, \ldots, v_{j+q}^n), \tag{A.18}$$

é chamado de <u>*fluxo numérico*</u>. *Dizemos que (A.17) é consistente com (A.3) se*

$$\bar{f}(u,\ldots,u) = f(u).$$

Definimos

$$(\mathcal{D}\ v^n)_j = v_j^n - \frac{\Delta t}{h}\ (\bar{f}_j^n - \bar{f}_{j-1}^n),$$

como o operador de evolução temporal numérico do esquema.

Ou seja, v_j^n na Definição A.2 pode ser visto como uma aproximação para a média celular $\bar{u}_j^n$, e $\bar{f}_j^n$ como uma aproximação do fluxo celular f_j^n.

Antes de seguirmos adiante, fornecemos algumas notações. Utilizaremos a norma de L^1 para funções $v(x)$

$$||v||_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |v(x)|dx,$$

e a norma de l^1 para seqüências de valores discretos U^n

$$||U^n||_1 = h\sum_{j=1}^{N} |U_j^n|.$$

A variação total de v é definida por

$$TV_{[a,b]}(v) = \sup_{a=\xi_0<\xi_1<\ldots<\xi_N=b} \sum_{j=1}^{N} |v(\xi_j) - v(\xi_{j-1})|.$$

No caso discreto, definimos a variação total de uma seqüência de valores discretos $v = (v_j)_j$ por

$$TV(v) = \sum_j |v_j - v_{j-1}|.$$

Podemos estender o operador de evolução $\mathcal{D}$ aplicando-o a uma função de x ao invés de aplicá-lo em funções discretas definidas pela malha. Ou seja,

$$\mathcal{D}\ (u(.,t))(x) = u(x,t) - \frac{\Delta t}{h}\left(f(u(x,t)) - f(u(x-\Delta x,t))\right).$$

Definição A.3 *Seja*

$$L(x,t) = \frac{1}{\Delta t}\left[u(x,t+\Delta t) - \mathcal{D}(u(.,t))(x)\right]$$

o erro de truncamento local de um esquema numérico. Dizemos que o esquema numérico é de ordem p, $p \geq 1$, se para toda solução suave u de (A.4) existe uma constante C tal que

$$||L(.,t)||_1 \leq C\Delta t^{p+1}, \qquad \Delta t \to 0.$$

Definição A.4 *Seja $U_l(x,t)$ uma seqüência de aproximações numéricas para a função $u(x,t)$. Dizemos que $U_l(x,t)$ converge para $u(x,t)$ quando $l \to +\infty$ se*

1. *Sobre qualquer conjunto limitado $\Omega = [a,b] \times [0,T]$ no plano (x,t),*

$$||U_l - u||_{1,\Omega} = \int_0^T \int_a^b |U_l(x,t) - u(x,t)|dxdt \to 0 \text{ quando } l \to +\infty.$$

2. *Para cada T existe um $R > 0$ tal que*

$$TV(U_l(.,t)) < R,\ \ \forall\ 0 \leq t \leq T,\ l = 1,2,\ldots.$$

Definição A.5 *Seja $\mathcal{U} = \{u:\ u(x,t)$ é uma solução fraca da lei de conservação $\}$. Definimos o erro global do esquema numérico como*

$$dist(U_l,\mathcal{U}) = \inf_{u\in\mathcal{U}} ||U_l - u||_{1,T}.$$

Dizemos que um esquema numérico é convergente se $dist(U_l,\mathcal{U}) \to 0$.

Uma ferramenta poderosa e importante que nos diz quando podemos ter confiança nas aproximações obtidas através de um esquema numérico, é o teorema de Lax-Wendroff.

Teorema A.1 *(Lax-Wendroff) Consideremos uma seqüência de malhas indexadas por* $l = 1, 2\ldots$ *com parâmetros* $k_l,\ h_l \to 0$ *quando* $l \to \infty$. *Seja* $U_l(x,t)$ *uma aproximação numérica calculada usando um esquema consistente e conservativo na malha* l. *Suponhamos que* U_l *converge para uma função* u *quando* $l \to \infty$. *Então* $u(x,t)$ *é uma solução fraca da lei de conservação.*

Portanto, uma vantagem de esquemas conservativos e consistentes é que, quando há convergência, eles, automaticamente, convergem para soluções cujas descontinuidades satisfazem a condição de choque.

Para garantir a convergência é necessário definir alguma forma de estabilidade.

Definição A.6 *Dizemos que um método numérico é TV-estável se* $TV(U^n)$ *é uniformemente limitado para todo* n.

Teorema A.2 *Suponhamos* U_l *gerado por um esquema numérico na forma conservativa com fluxo numérico Lipchstiz contínuo, consistente com alguma lei de conservação escalar. Se o método é* TV*-estável então ele é convergente.*

Um modo de assegurar a TV-estabilidade é requerer que a ação do operador de evolução temporal não aumente a variação total, de modo que a mesma, em qualquer tempo, seja uniformemente limitada pela variação total do dado inicial. Esta observação dá origem a uma importante classe de esquemas chamados de esquemas TVD.

Apresentamos a seguir alguns exemplos de esquemas numéricos conservativos e consistentes.

Esquema de Godunov

Este esquema é baseado em soluções locais de problemas de Riemann. Lembramos que a única solução entrópica do problema de Riemann é da forma $u(x,t) = w(x/t; u_L, u_R)$, onde w depende somente de f, e assume duas constantes de estado u_L e u_R, separadas por várias ondas, cujas velocidades são limitadas por $\max\{|f'(\xi)| : \xi \in [u_L, u_R]\}$.

Conhecida $v^n = (v_j^n)$, uma aproximação da solução de (A.4) no tempo t_n, podemos obter v^{n+1} do seguinte modo:

1. Resolvemos exatamente o problema

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x &= 0 \qquad \text{em } \mathbb{R} \times (\mathrm{t_n}, \mathrm{t_{n+1}}), \\ u(x,t_n) &= v_\triangle(x,t_n), \end{cases} \tag{A.19}$$

onde $v_\triangle(x,t_n) = v_j^n, \ \ x \in [\mu_{j-1}, \mu_j]$. Este problema tem uma única solução entrópica, que podemos explicitar para Δt suficientemente pequeno. Observemos que $v_\triangle$ é constante em cada célula (μ_{j-1}, μ_j), e apresenta uma descontinuidade no ponto μ_j. Consideremos assim os problemas de Riemann centrados nos pontos μ_j

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x & = 0 \text{ em } \mathbb{R} \times (0, \Delta\mathrm{t}), \\ u(x,t_n) & = \begin{cases} v_j^n, & x < \mu_j, \\ v_{j+1}^n, & x > \mu_j. \end{cases} \end{cases} \tag{A.20}$$

Observemos que dois problemas de Riemann não se interagem antes do tempo Δt desde que a condição

$$\frac{\Delta t}{h} \max\left\{|f'(v)| : v_j^n \leq v \leq v_{j+1}^n\right\} \leq \frac{1}{2}$$

seja satisfeita. Isto é, esta condição garante que uma onda que começa em μ_j não cruza as retas $x = \mu_{j-1/2}$ e $x = \mu_{j+1/2}$. Logo a solução explícita de (A.19) é dada por

$$u(x, t_{n+1}) = w\left(\frac{x - \mu_j}{\Delta t}; v_j^n, v_{j+1}^n\right), \ x \in (\mu_{j-1/2}, \mu_{j+1/2}).$$

2. O próximo passo consiste na definição de v_j^{n+1}. Esse valor é definido como a média celular em $[\mu_{j-1}, \mu_j]$ da solução de (A.19) acima, isto é,

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{h}\int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} u(x, t_{n+1})dx. \tag{A.21}$$

Portanto,

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{h}\left\{\int_{\frac{-h}{2}}^{0} w\left(\frac{x}{\Delta t}; v_j^n, v_{j+1}^n\right) dx + \int_0^{\frac{h}{2}} w\left(\frac{x}{\Delta t}; v_{j-1}^n, v_j^n\right) dx\right\}. \tag{A.22}$$

Podemos obter uma expressão mais simples para o esquema de Godunov, integrando a equação (A.19) sobre a célula $(\mu_{j-1}, \mu_j) \times (0, \Delta t)$. Fazendo isso, obtemos a fórmula

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{h}\left[f(w(0; v_j^n, v_{j+1}^n) - f(w(0; v_{j-1}, v_j)\right].$$

Notemos que este esquema está na forma conservativa, e o fluxo numérico é dado por

$$\bar{f}_j = \bar{f}(v_j, v_{j+1}) = f(w(0, v_j, v_{j+1})). \tag{A.23}$$

Como somente os valores de $f(u(\mu_j,t))$ são necessários, a fórmula de Godunov é satisfeita sempre que as ondas que começem em μ_j não cruzem a reta $x=\mu_{j-1}$ antes do tempo Δt, de modo que

$$u(\mu_j,t) = w(0,v_j,v_{j+1}),$$

$$u(\mu_{j-1},t) = w(0,v_{j-1},v_j).$$

Isto ocorrerá sempre que a condição

$$\frac{\Delta t}{h}\max\{|f'(v)| : v_{j-1}^n \leq v \leq v_j^n\} \leq 1 \tag{A.24}$$

for satisfeita.

Utilizando as soluções locais do problema de Riemann, obtemos a seguinte expressão para o fluxo numérico (A.23), (veja [8]),

$$\bar{f}(v_j,v_{j+1}) = \begin{cases} f(v_j), & v_j \geq v_{j+1},\ f(v_j) \geq f(v_{j+1}) \text{ ou } v_j < v_{j+1},\ f'(v_j) \geq 0, \\ f(v_{j+1}), & v_j \geq v_{j+1},\ f(v_j) \leq f(v_{j+1}) \text{ ou } v_j < v_{j+1},\ f'(v_{j+1}) \leq 0 \\ f\left[(f')^{-1}(0)\right], & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{A.25}$$

Observação A.2 *Se f for convexa a condição (A.24) reduz-se a*

$$\frac{\Delta t}{h}|f'(v_j^n)| \leq 1,$$

com fluxo numérico definido por

$$\bar{f}(v_j,v_{j+1}) = \begin{cases} \min_{w\in[v_j,v_{j+1}]} f(w), & v_j \leq v_{j+1} \\ \min_{w\in[v_{j+1},v_j]} f(w), & v_{j+1} \leq v_j. \end{cases}$$

Observação A.3 *Se $f'(w) \geq 0$, o fluxo numérico é dado por $\bar{f}(v_j,v_{j+1}) = f(v_j)$. E, se $f'(w) \leq 0$, $\bar{f}(v_j,v_{j+1}) = f(v_{j+1})$. Neste caso o esquema de Godunov recebe o nome de esquema upwind .*

Riemann Solver

Como vimos, o método de Godunov exige a resolução exata do problema de Riemann em cada fronteira de uma célula, e em cada passo de tempo. Numericamente, isso custa muito caro. Seria interessante, então deduzir um método numérico que aproximasse a solução do problema de Riemann através de técnicas menos caras. Neste sentido uma generalização para o método de Godunov consiste em substituir $u^n(x,t)$ por uma solução aproximada $\tilde{u}^n(x,t)$. Ela pode ser definida como a união de várias soluções aproximadas das soluções dos problemas de Riemann em cada fronteira da célula. Uma vez determinada $\tilde{u}^n$ em $[t_n, t_{n+1}]$, tomamos v_j^{n+1} como a média celular no tempo t_{n+1}

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{h}\int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} \tilde{u}(x, t_{n+1})dx.$$

Estas soluções aproximadas dos problemas de Riemann são comumente chamadas de Riemann solvers. Um dos Riemann solvers mais conhecidos é o de Roe [26]. Nesta técnica, determinamos $\tilde{u}(x,t)$ resolvendo a equação linear da lei de conservação, ao invés do equação não linear original. Ou seja, substituímos o problema (A.20) pelo seguinte problema linear

$$w_t + a_{LR}\ w_x = 0 \text{ em } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+,$$

$$w(x,t_n) = \begin{cases} u_L, & x < 0, \\ u_R, & x \geq 0, \end{cases}$$

onde $a_{LR} = a(u_l, u_r)$ depende de u_L e u_R, e deve satisfazer as seguintes condições

1. $f(u_L) - f(u_R) = a(u_L, u_R)(u_L - u_R)$.
2. $a(u_L, u_R) \to f'(u_L)$ quando $u_R \to u_L$.

Definindo

$$a(v_j, v_{j+1}) = \begin{cases} \dfrac{f(v_j) - f(v_{j+1})}{v_j - v_{j+1}}, & v_j \neq v_{j+1} \\ \\ f'(v_j) & v_j = v_{j+1}, \end{cases}$$

seguimos os mesmos passos do esquema de Godunov, apenas substituindo a solução local do problema de Riemann (A.20) pela do problema linear

$$\begin{cases} \tilde{w}_t + a(v_j^n, v_{j+1}^n)\tilde{w}_x = 0, \\ \\ \tilde{w}(x,0) = \begin{cases} v_j^n, & x < \mu_j, \\ v_{j+1}^n, & x \geq \mu_j, \end{cases} \end{cases}$$

que é dada por

$$\tilde{w}(x,t) = w^{Roe}(\xi; v_j^n, v_{j+1}^n) = \begin{cases} v_j^n, & \xi < a(v_j^n, v_{j+1}^n) \\ v_{j+1}^n, & \xi > a(v_j^n, v_{j+1}^n). \end{cases}$$

Substituindo esta expressão em (A.22) obtemos o esquema

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{h}\left[f(w^{Roe}(0; v_j^n, v_{j+1}^n) - f(w^{Roe}(0; v_{j-1}^n, v_j^n)\right],$$

cujo fluxo numérico associado é dado por

$$\bar{f}(v_j, v_{j+1}) = \frac{1}{2}\left[f(v_j) + f(v_{j+1}) - |a(v_j, v_{j+1})|\,(v_{j+1} - v_j)\right]. \tag{A.26}$$

Quanto à convergência, sabe-se que a solução numérica obtida pelo método de Godunov converge para a única solução entrópica do problema. Mas, em geral, a solução obtida pelo esquema de Roe pode não convergir para a solução de entropia da equação. Estes esquemas são de primeira ordem. Logo, mesmo quando a solução discreta convergir para a solução de entropia, a precisão é pobre em regiões de suavidade. Isso pode ser observado na solução numérica da equação de Burgers, em que f é definida pela equação $f(u) = u^2/2$, com condição inicial dada por

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & 0.25 \leq x \leq 0.75 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{A.27}$$

Na Figura A.2 indicamos com linha tracejada a solução exata, e com linha contínua a solução aproximada. Calculamos essa solução no tempo $t = 0.3125$, numa malha uniformemente espaçada com 128 pontos. Neste tempo, a solução exata é dada por

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x < 0.25 \text{ ou } x > 0.9062 \\ \dfrac{x - 0.25}{0.3125}, & 0.25 \leq x \leq 0.5625 \\ 1, & 0.5625 < x < 0.9062, \end{cases}$$

e é mostrada no Figura A.1. Notemos que a solução é bem resolvida próxima ao choque. No entanto, possui baixa resolução na parte suave. Para melhorar estas aproximações, a solução é construir esquemas que possuem ordem de aproximação maior.

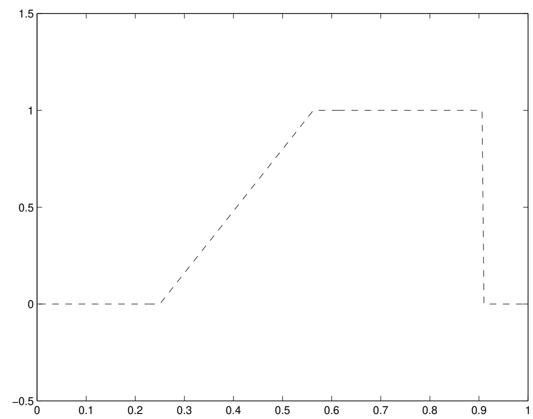


Figura A.1: solução exata

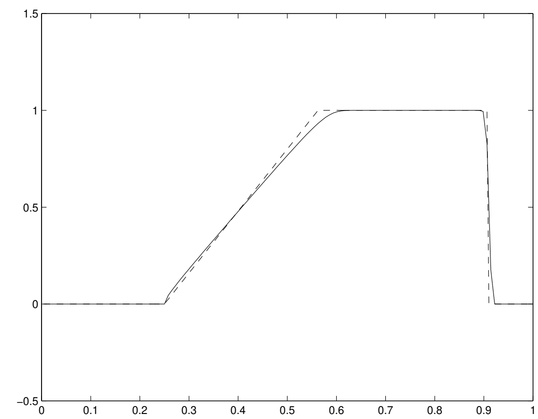


Figura A.2: Esquema Roe

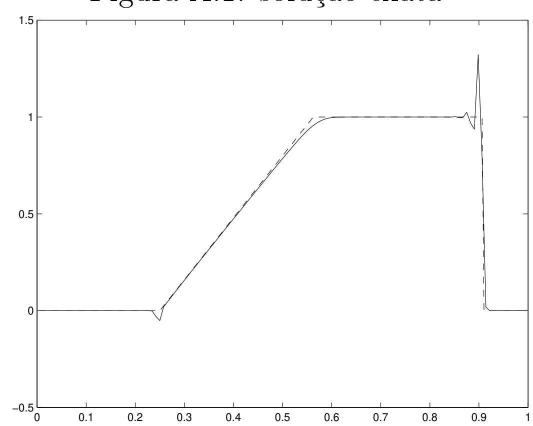


Figura A.3: Esquema Lax-Wendroff

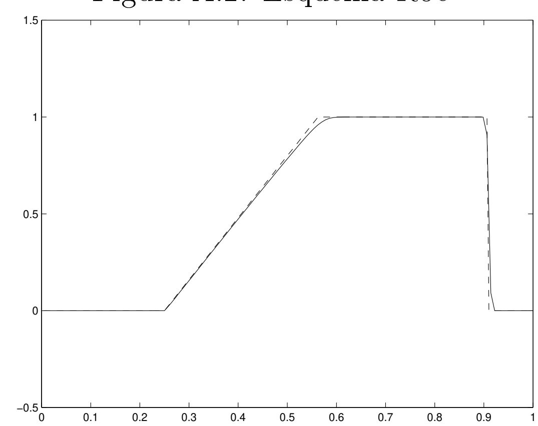


Figura A.4: Esquema ENO

Esquema de Lax Wendroff

Seja $u(x,t)$ uma solução suave de (A.4). O esquema de Lax-Wendroff é obtido pela expansão de Taylor de u em torno do ponto (x,t), onde os termos de ordem estritamente maiores do que dois são negligenciados.

$$u(x,t+\Delta t) = u(x,t) + \Delta t\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) + O(\Delta t^3). \tag{A.28}$$

Derivando a equação (A.4) com respeito a t, obtemos

$$u_{tt} = -\left(f(u)\right)_{xt} = \left[f'(u)\left(f(u)\right)_x\right]_x. \tag{A.29}$$

Usando (A.4) e (A.29) em (A.28), obtemos

$$u(x,t+\Delta t) = u(x,t) - \Delta t\frac{\partial}{\partial x}f(u) + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[a(u)\frac{\partial}{\partial x}f(u)\right] + O(\Delta t^3), \tag{A.30}$$

com $a(u) = f'(u)$. Substituindo as derivadas da expressão anterior por

$$\frac{\partial}{\partial x}f(u) = \frac{f(u(x+h,t)) - f(u(x-h,t))}{2h} + \mathcal{O}(h^2),$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left[a(u)\frac{\partial}{\partial x}f(u)\right] &= \frac{a(u(x+\theta h,t))\left[f(u(x+h,t)) - f(u(x,t))\right]}{h^2}\\ &- \frac{a(u(x-(1-\theta)h,t))\left[f(u(x,t)) - f(u(x-h,t))\right]}{h^2}\\ &+ \mathcal{O}(h),\end{aligned}$$

onde $\theta \in [0,1]$, obtemos o esquema conservativo de segunda ordem

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{h}\,\frac{f(v_{j+1}) - f(v_{j-1})}{2} + \left[\frac{\Delta t}{h}\right]^2 \frac{a_{j+1/2}\left[f(v_{j+1}) - f(v_j)\right] - a_{j-1/2}\left[f(v_j) - f(v_{j-1})\right]}{2},$$

onde $a_{j+1/2} = a\left(\dfrac{v_j + v_{j+1}}{2}\right)$, e o fluxo numérico é dado por

$$\bar{f}_j = \bar{f}(v_j, v_{j+1}) = \frac{f(v_j) + f(v_{j+1})}{2} - \frac{\Delta t}{h}\,a\left(\frac{v_j + v_{j+1}}{2}\right)\,\frac{f(v_{j+1}) - f(v_j)}{2}.$$

A dificuldade em trabalhar com esta forma do esquema de Lax-Wendroff é que precisamos calcular a matriz jacobiana. Em geral, isto é numericamente caro. Uma forma mais econômica deste esquema é fornecida pelo procedimento de dois passos proposta por Richtmyer [26], onde o fluxo numérico é dado por

$$\bar{f}_j = \bar{f}(v_j, v_{j+1}) = f\left(\frac{1}{2}(v_j^n + v_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2h}\ \left(f(v_{j+1}^n) - f(v_j^n)\right)\right).$$

Observemos que o esquema foi obtido sob a condição da solução u ser suave, o que implica que para soluções de equações que possuem singularidades o esquema pode não apresentar um bom comportamento. De fato, sabe-se que este esquema nem sempre produz aproximações que convergem para a solução de entropia.

Como esperado, o esquema de Lax-Wendroff é de segunda ordem em regiões de suavidade. Entretanto, perto de choques este esquema pode produzir oscilações. Veja Figura A.3.

Por causa deste tipo de comportamento, foram desenvolvidos métodos chamados de alta resolução. Estes métodos possuem pelo menos precisão de segunda ordem em regiões de suavidade, e não produzem oscilações perto de descontinuidades.

Esquema Essencialmente Não Oscilatório - ENO

Como visto nos esquemas apresentados, a maneira como o fluxo numérico é calculado é muito importante. Observamos que seu cálculo é baseado nas informações contidas em v^n, que são aproximações das médias celulares $\bar{u}^n$. Podemos deduzir que, quanto melhor as aproximações para essas médias, melhor será a aproximação para o fluxo numérico, e, consequentemente, melhor será a aproximação da solução. A estratégia consiste, portanto, em encontrar uma reconstrução para $\bar{u}^n$ que possua alta ordem de precisão, e que não produza oscilações em regiões perto de descontinuidades.

O esquema, que descrevemos a seguir, é obtido como uma generalização do esquema de Godunov. Neste esquema tomamos $v_\triangle(x, t_n) = R(x; v^n)$, onde $R(x; v^n)$ é a reconstrução de v^n com uma alta ordem de precisão. Observemos que no método de Godunov $R(x; v^n)$ é uma função constante por partes. Em geral, quando $R(x; v^n)$ é uma função polinomial por partes, não temos uma expressão para a solução obtida com tal condição inicial. Contudo, podemos obter uma expansão local da solução, com a ordem de precisão desejada.

Seja $R(x; \bar{u})$ a reconstrução aproximada de uma função $u(x)$ a partir de suas médias celulares $\{\bar{u}_j\}$. Suponha que $R(x; \bar{u})$ seja uma função polinomial por partes de grau $r - 1$, que satisfaz as propriedades abaixo.

1. Para uma função suave $u(x)$,

$$R(x;\bar{u}) = u(x) + O(h^r). \tag{A.31}$$

2.

$$\frac{1}{h_j}\int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} R(x;\bar{u})dx = \bar{u}_j. \tag{A.32}$$

Definimos a generalização do esquema de Godunov pelas equações

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{h_j}\int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} \mathcal{D}\ R(x;v^n)dx \tag{A.33}$$

$$v_j^0 = \frac{1}{h_j}\int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} u_0(x)dx, \tag{A.34}$$

onde $\mathcal{D}$ é o operador de evolução da equação (A.4).

Se $\mathcal{D}$ for um operador monótono, a variação total da solução numérica do esquema é dominada pela variação total do operador de reconstrução

$$TV\left(\int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} \mathcal{D}\ R(x;v^n)dx\right) \leq TV(R(x;v^n)). \tag{A.35}$$

Vamos definir os esquemas ENO de ordem r desenvolvidos em [13], [18], [17].

Definição A.7 *Uma reconstrução $R(x;\bar{u})$ é chamada de essencialmente não oscilatória (ENO) se possuir a propriedade*

$$TV(R(x;\bar{u})) \leq TV(\bar{u}) + O(h^r), \tag{A.36}$$

para funções $u(x)$ suaves por partes.

Quando usamos uma reconstrução essencialmente não oscilatória num esquema tipo Godunov, segue de (A.35) e (A.36) que o esquema resultante (A.33), (A.34) é essencialmente não oscilatório no sentido que para toda função suave por partes $u(x)$

$$TV\left(\int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} \mathcal{D}\ R(x;\bar{u})\ dx\right) \leq TV(\bar{u}) + O(h^r),$$

isto é, o esquema é quase TVD.

Descrição da Reconstrução ENO

A reconstrução ENO é baseada numa seleção adaptativa do estêncil. Isso é feito a fim de evitar a geração de oscilações perto de singularidades de uma dada função. A desvantagem deste tipo de reconstrução é o alto custo computacional proveniente da escolha do estêncil.

Definição A.8 *Interpolação ENO Seja S_i^m o estêncil de m pontos sucessivos*

$$S_i^m = \{\mu_i,\ \mu_{i+1}, \ldots, \mu_{i+m-1}\}.$$

Seja $P(x;\ S_i^m,\ u)$ o único polinômio de grau $m-1$ que interpola os m valores de u sobre o estêncil S_i^m, e seja $Q(x;\ u)$ o polinômio interpolador por partes de u

$$Q(x;\ u) = P(x;\ S_{i(j)}^m;\ u), \quad \mu_{j-1} \leq x \leq \mu_j,$$

onde $i(j)$ é o valor que minimiza

$$\left| \frac{d^m}{dx^m} P(x;\ S_i^m,\ u) \right|, \quad i = j-m+1, \ldots j-1. \tag{A.37}$$

Observemos que existem $m-1$ polinômios desta forma, correspondentes a $m-1$ escolhas diferentes de $i(j)$. Esta liberdade de escolha é utilizada na determinação de um estêncil de m pontos entre aqueles que contém o intervalo $(\mu_{j-1},\ \mu_j)$, de modo que $u(x)$ seja o mais suave possível no intervalo $(\mu_{i(j)},\ \mu_{i(j)+m-1})$. Devido a esta seleção do estêncil, essa interpolação é altamente não linear.

Ami Harten demonstrou em [17] que esta técnica de interpolação para uma função u, suave por partes, satisfaz

(i) Se u é suave

$$\frac{d^k}{dx^k} Q(x;\ u) = \frac{d^k}{dx^k} u(x) + O(h^{m-k}), \quad 0 \leq k \leq m-1;$$

(ii) $Q(x;\ u)$ é uma interpolação essencialmente não oscilatória de u no sentido que:

$$TV(Q(.;u)) \leq TV(u) + O(h^m), \tag{A.38}$$

ou seja, o número de extremos locais de Q não excede os extremos locais da função dada u, em termos da variação total $TV(.)$.

Uma técnica para a resolução do problema de reconstrução de médias celulares em termos da interpolação ENO é a reconstrução ENO via função primitiva. Seja

$$U(x) = \int_0^x u(y)\ dy,$$

a primitiva de $u(x)$. Dadas as médias celulares $\{\bar{u}_j\}$ de uma função suave por partes observamos que existe uma correspondência entre essas médias e os valores pontuais $\{U(\mu_j)\}$. Essa correspondência é dada pelas fórmulas

$$\bar{u}_j = \frac{1}{\mu_j - \mu_{j-1}} \int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} u(x)\ dx = \frac{U(\mu_j) - U(\mu_{j-1})}{\mu_j - \mu_{j-1}},$$

e

$$U(\mu_j) = \sum_{i=0}^{j} (\mu_i - \mu_{i-1})\ \bar{u}_i.$$

Tendo os valores pontuais da função primitiva, usamos a interpolação ENO para obter o polinômio interpolador por partes $Q(x;\ u)$, de U, de grau r. Definimos

$$R(x;\ \bar{u}) = \frac{d}{dx} Q(x;\ U). \tag{A.39}$$

Observamos que se $u(x)$ é suave em $(\mu_{j-1},\ \mu_j)$, então, para h suficientemente pequeno, (A.37) seleciona um estêncil $S_{i(j)}^{r+1}$ na região em que $u(x)$ é suave. Logo,

$$\begin{aligned} R(x; \bar{u}) &= \frac{d}{dx} P(x;\ S_{i(j)}^{r+1},\ U) \\ &= \frac{d}{dx} U + O(h^r) \\ &= u(x) + O(h^r), \end{aligned}$$

que é a propriedade (A.31). Em [13] foi demonstrado que o esquema ENO de segunda ordem é de fato TVD.

Cálculo do Fluxo ENO

Nossa tarefa consiste em obter uma aproximação para

$$f_j = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(\ u(\mu_j,\ t))\ dt,$$

onde $u(x,t)$ é a solução em $\mathbb{R} \times [\mathrm{t_n}, \mathrm{t_{n+1}}]$ do problema

$$u_t + f(u)_x = 0,$$

com condição inicial

$$u(x,t_n) = R(x,v^n), \quad \mu_{j-1} \leq x \leq \mu_j$$

Para atingir este objetivo seguimos os seguintes passos:

1. **Primeiro passo**.
   Consiste na discretização da integral usando algum método de integração numérica

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(t)\,dt = \sum_{k=0}^{K} \alpha_k\, g(\beta_k \Delta t) + O(\Delta t^r).$$

   Com isto, obtemos

$$\bar{f}_j \approx \sum_{k=0}^{K} \alpha_k\, f(\, u(\mu_j,\ \beta_k \Delta t)).$$

2. **Segundo passo**.
   Consiste na obtenção de uma aproximação $\tilde{v}(x,t)$ para $u(x,t)$. Como só nos interessa a parte suave de $u(x,t)$ em $(\mu_{j-1},\ \mu_j)$, que denotaremos por $u_j(x,t)$, obteremos uma aproximação de $u_j(x,t)$ fazendo sua expansão em Taylor em torno de $x = \mu_j$ e $t = t_n$

$$\tilde{v}_j(x,t) = \sum_{l=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{l} \frac{\partial^l u\ (\mu_j,\ t_n)}{\partial x^k\ \partial t^{l-k}}\ \frac{(x-\mu_j)^k}{k!}\ \frac{(t-t_n)^{l-k}}{(l-k)!} + \frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{r} \frac{\partial^r u\ (\bar{\mu},\ \bar{t})}{\partial x^k\ \partial t^{r-k}}\ \frac{(x-\mu_j)^k}{k!}\ \frac{(t-t_n)^{r-k}}{(r-k)!},$$

   onde $(\bar{\mu},\ \bar{t})$ é um ponto interno ao segmento de reta de extremidades $(\mu_j,\ t_n)$, $(x,\ t)$.

   Quando $t = t_n$, sabemos que $u(x,t_n) = R(x;v^n)$, e, consequentemente, podemos calcular os valores de

$$\frac{\partial^l\ u\ (\mu_j,t_n)}{\partial x^l}.$$

   Para calcular os valores de

$$\frac{\partial^l u(\mu_j,t_n)}{\partial x^k \partial t^{l-k}}, \quad \forall l,\ 0 \leq k \leq l,$$

   usamos a equação $u_t + f(u)_x = 0$ do seguinte modo

$$u_t \ \ = \ \ -f'(u)u_x$$

$$
\begin{aligned}
u_{xt} &= -[f''(u_x)^2 + f'u_{xx}] \\
u_{tt} &= -[f''u_t u_x + f'u_{xt}] \\
u_{xxt} &= -[f'''(u_x)^3 + 3f''u_x u_x x + f'u_{xxx}] \\
u_{xtt} &= -[f'''(u_x)^2 u_t + f''(2u_x u_{xt} + u_t u_{xx} + f'u_{xxt}] \\
u_{ttt} &= -[f'''(u_t)^2 u_x + f''(2u_t u_{xt} + u_x u_{tt} + f'u_{xtt}],
\end{aligned}
$$

e assim por diante.

3. **Terceiro passo**.
   Consiste no cálculo do fluxo $f(u(\mu_j, t))$, que é feito por

$$f(u(\mu_j, t)) \approx f^R(\tilde{v}_j(\mu_j, t), \tilde{v}_{j+1}(\mu_j, t)),$$

   onde f^R é um fluxo de Riemann ou um fluxo de Riemann aproximado (A.25)–(A.26).

   Portanto, o esquema resultante tem a forma

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{h}(\bar{f}_j - \bar{f}_{j-1}),$$

$$\bar{f}_j = \sum_{k=0}^{K} \alpha_k \; f^R(\tilde{v}_j(\mu_j, \; \beta_k \Delta t), \; \tilde{v}_{j+1}(\mu_j, \; \beta_k \Delta t)).$$

Harten demonstrou que este esquema é um esquema essencialmente não oscilatório de ordem r, exatamente como a reconstrução que foi utilizada. A seguir daremos um exemplo da utilização deste esquema. Desenvolveremos o esquema ENO de ordem dois.

Exemplo - Esquema ENO de ordem dois

Calculemos a expressão do fluxo ENO quando $r = 2$. Escolhemos $K = 0$. Logo, para $\alpha_0 = 1$ e $\beta_0 = 1/2$, coeficientes de uma quadratura numérica, obtemos que

$$f_j^{ENO} = f^R(\; \tilde{v}_j(\mu_j, \; \Delta t/2), \; \tilde{v}_{j+1}(\mu_j, \; \Delta t/2)).$$

Substituindo $v_t = -f'(v)v_x$ na expansão de Taylor para obter $\tilde{v}_j(x, t)$ segue que

$$\tilde{v}_j(\mu_j, \; \frac{\Delta t}{2}) = u_j(\; \mu_j, \; t_n) - \frac{\Delta t}{2} \; f'(u_j) \; (u_j)_x \; (\mu_j, t_n) + O(\Delta t^2)$$

Lembrando que $u_j(x,t_n) = R_j(x;v^n)$ obtemos

$$\tilde{v}_j(\mu_j,\ \frac{\Delta t}{2}) = R_j(\mu_j;\ v^n) - \frac{\Delta t}{2}\ f'(R_j)\ (R_j)_x\ (\mu_j, t_n) + O(\Delta t^2)$$

Calculemos $R_j(x;v^n)$. Seja $R_j(x;\ v^n)$ definida em $[\mu_{j-1},\ \mu_j]$ por

$$R_j(x;\ v) = P^1_{j,\,i(j)}(x;\ v^n) = a_0 + a_1 x, \quad \text{ onde } i = j-2,\ j-1$$

onde $P^1_{j,\,i(j)}$ é o polinômio obtido pela derivação do polinômio $Q(x;U)$ de grau 2 em $[\mu_{j-1},\ \mu_j]$. R_j deve satisfazer:

1. Para $i = j-1$, a_0 e a_1 devem satisfazer o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\mu_j - \mu_{j-1}} \displaystyle\int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} P^1_{j,\,i(j)}(x, v^n)\ dx & = v^n_j \\[2ex] \dfrac{1}{\mu_{j+1} - \mu_j} \displaystyle\int_{\mu_j}^{\mu_{j+1}} P^1_{j,\,i(j)}(x, v^n)\ dx & = v^n_{j+1}. \end{cases}$$

   Obtemos que

$$a_0 = \frac{\mu_j + \mu_{j+1}}{\mu_{j+1} - \mu_{j-1}}\ v^n_j + \frac{\mu_j + \mu_{j-1}}{\mu_{j-1} - \mu_{j+1}}\ v^n_{j+1} \tag{A.40}$$

$$a_1 = 2\ \frac{v^n_j - v^n_{j+1}}{\mu_{j-1} - \mu_{j+1}}, \tag{A.41}$$

   e, portanto,

$$R_j(x;\ v^n) = v^n_j + \left(\frac{\mu_{j-1} + \mu_j - 2x}{\mu_{j-1} - \mu_{j+1}}\right)(v^n_{j+1} - v^n_j).$$

   (Esta reconstrução corresponde ao estêncil $S^3_{j-1} = \{\mu_{j-1},\ \mu_j,\ \mu_{j+1}\}$.)

2. Para $i = j-2$, a_0 e a_1 devem satisfazer o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\mu_{j-1} - \mu_{j-2}} \displaystyle\int_{\mu_{j-2}}^{\mu_{j-1}} P^1_{j,\,i(j)}(x, v^n) dx & = v^n_{j-1} \\[2ex] \dfrac{1}{\mu_j - \mu_{j-1}} \displaystyle\int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} P^1_{j,\,i(j)}(x, v^n) dx & = v^n_j. \end{cases}$$

Obtemos que

$$a_0 = \frac{-\mu_j - \mu_{j-1}}{\mu_{j-2} - \mu_j}\ v_{j-1}^n + \frac{\mu_{j-1} + \mu_{j-2}}{\mu_{j-2} - \mu_j}\ v_j^n \tag{A.42}$$

$$\tag{A.43}$$

$$a_1 = 2\ \frac{v_{j-1}^n - v_j^n}{\mu_{j-2} - \mu_j}, \tag{A.44}$$

e, portanto,

$$R_j(x;\ v^n) = v_j^n + \left(\frac{\mu_{j-1} + \mu_j - 2x}{\mu_{j-2} - \mu_j}\right)\ (v_j^n - v_{j-1}^n).$$

(Esta reconstrução corresponde ao estêncil $S_{j-2}^3 = \{\mu_{j-2},\ \mu_{j-1},\ \mu_j\}$).

Escrevemos então:

$$R_j(x;\ v^n) = v_j^n + (\mu_j + \mu_{j-1} - 2x)\ S_j,$$

onde

$$\begin{aligned} S_j &= \bar{m}\left(\frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\mu_{j-1} - \mu_{j+1}},\ \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{\mu_{j-2} - \mu_j}\right) \\ \bar{m}(x,y) &= \begin{cases} x, & |x| \leq |y| \\ y, & |y| < |x| \end{cases} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} R_j(\mu_j;\ v^n) &= v_j^n + (\mu_{j-1} - \mu_j)\ S_j, \qquad \frac{\partial}{\partial x} R_j = -2\ S_j, \\ R_{j+1}(\mu_j;\ v^n) &= v_{j+1}^n + (\mu_{j+1} - \mu_j)\ S_{j+1}, \qquad \frac{\partial}{\partial x} R_{j+1} = -2\ S_{j+1}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{v}_j(\mu_j, \frac{\Delta t}{2}) &= v_j^n + (\mu_{j-1} - \mu_j)\ S_j + \Delta t\ f^{'}(v_j^n + (\mu_{j-1} - \mu_j)\ S_j)\ S_j, \\ \tilde{v}_{j+1}(\mu_j, \frac{\Delta t}{2}) &= v_{j+1}^n + (\mu_{j+1} - \mu_j)\ S_{j+1} + \Delta t\ f^{'}(v_{j+1}^n + (\mu_{j+1} - \mu_j)\ S_{j+1})\ S_{j+1}. \end{aligned}$$

Plotamos na Figura A.4 a solução numérica de (A.4)–(A.27) usando este esquema. Observemos que comparado aos outros esquemas este é o que apresenta melhor resolução perto de descontinuidades. Entretanto, como já mencionamos este método tem uma desvantagem, ou seja, seu alto custo computacional. Seria interessante, então desenvolver um método que usasse o esquema ENO somente perto de descontinuidades. Para isso precisaremos de alguma ferramenta que possibilite detectar as regiões de suavidade das regiões onde a solução apresenta alguma singularidade.

A.3 Sistemas de Leis de Conservação

Quando consideramos sistemas de leis de conservação as questões referentes à existência, unicidade e estabilidade para as soluções entrópicas são questões de intensa pesquisa e estudo. Nesta seção consideramos problemas de valor inicial para sistemas de leis de conservação unidimensionais. Inicialmente, apresentamos o caso linear a partir do qual tenta-se a generalização de algumas destas idéias para o caso não linear. Estas ferramentas teóricas que tentamos obter tem como objetivo a resolução exata do problema de Riemann.

A.3.1 Parte Teórica

Retornemos à equação

$$u_t(x,t) + (f(u(x,t)))_x = 0, \tag{A.45}$$

onde $\mathbf{f}' \in C'(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $u(x,t) \in \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}^+$ e $x \in \mathbb{R}$. Trabalharemos com sistemas da forma (A.45) que são (estritamente) hiperbólicos, ou seja, $\mathbf{f}'(u)$, a matriz jacobiana de f, possui autovalores reais (distintos) para todo $u \in \mathbb{R}^m$.

Consideremos inicialmente, o caso em que $f'(u) = A$ onde A é uma matriz constante e o sistema é estritamente hiperbólico. Logo podemos decompor

$$A = RDR^{-1} \tag{A.46}$$

onde D é a matriz diagonal formada pelos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ de A e R é a matriz dos autovetores a direita $r_1, r_2, \ldots, r_m$.

Vamos determinar a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + Au_x &= 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{cases} \tag{A.47}$$

utilizando a mudança de variável

$$v = R^{-1}u.$$

A nova variável v, é chamada de variável característica. Usando (A.46) obtemos o sistema equivalente a (A.47)

$$\begin{cases} v_t + Dv_x = 0, \\ v(x,0) = R^{-1}u_0(x). \end{cases} \tag{A.48}$$

Como D é diagonal, o sistema (A.48) é formado por m equações escalares

$$(v_p)_t + \lambda_p(v_p)_x = 0, \quad p = 1, 2, \ldots, m \tag{A.49}$$

cuja solução é dada por

$$v_p(x,t) = v_p(x - \lambda_p t, 0). \tag{A.50}$$

Conseqüentemente a solução do sistema original é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= R\ v(x,t) \\ &= \sum_{p=1}^{m} v_p(x,t)\ r_p \\ &= \sum_{p=1}^{m} v_p(x - \lambda_p t, 0)\ r_p. \end{aligned} \tag{A.51}$$

As curvas $x = x_0 + \lambda_p t$ que satisfazem $x'(t) = \lambda_p$ são chamadas de *curvas características da p-ésima família* ou simplesmente *p-características.*

Observação A.4 *A solução $u(x,t)$ depende somente dos dados iniciais nos m pontos $x - \lambda_p t$. O coeficiente $v_p(x,t)$ correspondente ao autovetor r_p na expansão (A.51) de $u(x,t)$ é constante ao longo de cada p-característica.*

Observação A.5 *Se considerarmos um ponto (x,t) em que o dado inicial é suave em cada ponto $x_0 = x - \lambda_p t$, $p = 1, 2, \ldots, m$ segue que $v_p(x - \lambda_p t, 0) = R^{-1}u(x - \lambda_p t, 0)$ também é suave em cada um destes pontos e conseqüentemente $u(x,t)$. Conseqüentemente uma singularidade no dado inicial pode propagar-se somente ao longo das características.*

Problema de Riemann

O problema de Riemann é aquele em que

$$u(x,0) = \begin{cases} u_L & x < 0 \\ u_R & x > 0. \end{cases}$$

Assumimos

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \lambda_m.$$

Podemos decompor u_L e u_R em termos dos autovetores

$$u_L = \sum_{p=1}^{m} \alpha_p r_p, \qquad u_R = \sum_{p=1}^{m} \beta_p r_p,$$

de modo que

$$v_p(x,0) = \begin{cases} \alpha_p, & x < 0, \\ \beta_p, & x > 0, \end{cases}$$

e portanto,

$$v_p(x,t) = \begin{cases} \alpha_p, & x - \lambda_p t < 0, \\ \beta_p, & x - \lambda_p t > 0. \end{cases}$$

Seja $J(x,t)$ o maior valor de p para o qual $x - \lambda_p t > 0$. Com isto temos que

$$u(x,t) = \sum_{p=1}^{J(x,t)} \beta_p \; r_p + \sum_{p=J(x,t)+1}^{m} \alpha_p \; r_p. \tag{A.52}$$

Observemos que quando $u(x,t)$ atravessa a p-ésima característica o valor de $x - \lambda_p t$ passa pelo zero e o correspondente v_p salta de α_p para β_p. Os outros coeficientes v_i $(i \neq p)$ permanecem constantes. O tamanho do salto é dado por

$$[u] = (\beta_p - \alpha_p) r_p.$$

Como $f(u) = A(u)$,

$$\begin{aligned} [f] &= A[u] && \text{(A.53)} \\ &= (\beta_p - \alpha_p) A r_p && \text{(A.54)} \\ &= \lambda_p [u], && \text{(A.55)} \end{aligned}$$

e λ_p é a velocidade de propagação deste salto.

A solução $u(x,t)$ em (A.52) pode ser escrita em termos destes saltos

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_L + \sum_{\lambda_p < x/t} (\beta_p - \alpha_p) r_p \\ &= u_R - \sum_{\lambda_p > x/t} (\beta_p - \alpha_p) r_p. \end{aligned}$$

Pode ocorrer que o salto inicial $u_R - u_L$ seja um autovetor de A, isto é, $u_R - u_L = (\beta_i - \alpha_i) r_i$, para algum i e $\alpha_p = \beta_p$ para $p \neq i$. Então esta descontinuidade simplesmente propaga-se com velocidade λ_i e as outras características propagam-se com velocidade zero. Em geral, este não é o caso, o salto $u_R - u_L$ pode não se propagar como uma única descontinuidade e não violar a condição de Rankine-Hugoniot. Neste caso, encontramos a solução do problema de Riemann, determinando um modo de escrever o salto $u_R - u_L$ como uma soma de saltos

$$u_R - u_L = (\beta_1 - \alpha_1) r_1 + \ldots + (\beta_m - \alpha_m) r_m,$$

onde cada salto propaga-se com uma velocidade λ_i que satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot.

O Plano de Estados

Para um sistema formado de duas equações é elucidativo observar o que ocorre com esta divisão em saltos no plano de estados u_1–u_2 onde $u = (u_1, u_2)$ e cada vetor $u(x,t)$ é representado por um ponto deste plano.

Em particular se u_L e u_R são pontos neste plano, uma descontinuidade com estados a esquerda u_L e a direita u_R pode propagar-se como uma única descontinuidade somente se $u_R - u_L$ for um autovetor de A, o que significa que o segmento de u_L a u_R deve ser paralelo ao autovetor r_1 ou r_2. Para um problema com u_L e u_R quaisquer a solução consiste de duas descontinuidades que viajam com velocidades λ_1 e λ_2, com uma nova constante de estado entre elas que denotamos por u_m

$$u_m = \beta_1 r_1 + \alpha_2 r_2,$$

de modo que

$$u_m - u_L = (\beta_1 - \alpha_1) r_1,$$

$$u_R - u_m = (\beta_2 - \alpha_2) r_2.$$

Logo, a localização de u_m no plano deve estar onde a 1-onda que passa por u_L intersepta a 2-onda que passa por u_R.

Estudemos o caso geral em que assuminos que $f'(u)$ possui autovalores reais

$$\lambda_1(u) \leq \ldots \leq \lambda_m(u),$$

com autovetores $r_p(u),\ p = 1, \ldots, m$. Motivados pelo estudo realizado no caso linear desejamos construir a solução geral do problema de Riemann para o sistema não linear.

Como no caso escalar as soluções de sistemas de leis de conservação também desenvolvem singularidades num tempo finito. Devemos portanto considerar soluções num sentido mais fraco.

Definição A.9 *Seja* $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \cap L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$. *Dizemos que* u *é uma solução de*

$$\begin{cases} u_t + f_x(u(x,t)) = 0, & \text{em } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{em } \mathbb{R}, \end{cases} \tag{A.56}$$

se

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} u(x,t)\ \phi_t(x,t) + f(u(x,t))\ \phi_x(x,t)\ dt\ dx + \int_{\mathbb{R}} \phi(x,0) u_0(x)\ dx = 0$$

onde $\phi(x,t) \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$.

As descontinuidades, que uma solução da forma acima podem ter, são dadas pela condição de Rankine-Hugoniot. Cada uma das m leis de conservação devem satisfazer a equação

$$s[u_p] = [f_p], \quad p = 1, \ldots, m \tag{A.57}$$

para cada curva de descontinuidade $t \mapsto (x(t), t)$, onde $s = x'(t)$ é a velocidade da curva de descontinuidade.

As *p-características* para o caso não linear são definidas da seguinte maneira. Suponhamos que u seja uma solução suave de um sistema hiperbólico cujos autovalores de $f'(u)$ são dados por

$$\lambda_1(u) \leq \lambda_2(u) \leq \ldots \leq \lambda_m(u).$$

Se $x(t) \in C'([0,\tau])$ for uma solução de $x'(t) = \lambda_p(u)$, então a curva $\{(x(t),t) :\ 0 \leq t \leq \tau\}$ é chamada de *p-característica*.

Definição A.10 *A p-ésima curva característica é chamada genuinamente não linear em $D \subset \mathbb{R}^m$ se*

$$\nabla\lambda_p(u) \cdot r_p(u) \neq 0, \quad \forall u \in D.$$

O sistema é chamado genuinamente não-linear se cada p-característica é genuinamente não-linear em D.

Por outro lado se

$$\nabla\lambda_p(u) \cdot r_p(u) = 0, \quad \forall u.$$

dizemos que a p-ésima curva característica é linearmente degenerada. Uma descontinuidade em que a p-ésima curva característica é linearmente degenerada é chamada de descontinuidade de contato.

Vamos inicialmente, construir uma solução fraca do problema de Riemann que consiste de m descontinuidades que se propagam com velocidades $s_1 < s_2 < \ldots < s_m$. Lembremos que uma descontinuidade que se propaga com velocidade s e possui valores constantes u_L e u_R em cada lado da descontinuidade deve satisfazer a condição de Rankine-Hugoniot. Supondo que o ponto $u_L \in \mathbb{R}^m$ está fixo, vamos determinar o conjunto de pontos u_R que podem ser conectados a u_L por uma descontinuidade que satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot.

A condição de Rankine-Hugoniot nos fornece que

$$f((u_R)_p(\xi)) - f(u_L) = s_p(\xi)((u_R)_p(\xi) - u_L), \quad p = 1, \ldots, m,$$

onde $(u_R)_p(\xi)$ é uma parametrização da p-ésima curva que passa por u_L e que satisfaz $(u_R)_p(0) = u_L$. Neste caso, ξ é o parâmetro.

Diferenciando esta expressão com respeito a ξ e depois substituindo por $\xi = 0$ obtemos

$$f'(u_L)(u_R)'_p(0) = s_p(0)(u_R)'_p(0),$$

ou seja, $(u_R)'_p(0)$ deve ser um múltiplo escalar do autovetor $r_p(u_L)$ de $f'(u_L)$ enquanto $s_p(0)$ deve ser o autovalor $\lambda_p(u_L)$. Portanto, a curva $(u_R)_p(\xi)$ deve ser tangente a $r_p(u_L)$ no ponto u_L.

Como já mencionamos a solução do problema de Riemann pode não ser única. Em geral, precisamos de condições adicionais. Para uma única lei de conservação, no caso em que f é estritamente convexa, essa condição é dada pela desigualdade

$$f'(u_L) > s > f'(u_R).$$

Para sistemas esta condição aplicada a um campo genuinamente não-linear diz que o salto no p-ésimo campo (de u_L a u_R, por exemplo) é admissível somente se

$$\lambda_p(u_L) > s > \lambda_p(u_R). \tag{A.58}$$

Uma descontinuidade que satifaz (A.57) e (A.58) é chamada de *p-choque*. Para sistemas com p-características que são genuinamente não-lineares ou linearmente degeneradas a condição de entropia (A.58) é modificada para

$$\lambda_p(u_L) \geq s \geq \lambda_p(u_R).$$

Definição A.11 *Uma curva em $\mathbb{R}^m$ cuja tangente a ela em um ponto u possui a direção de $r_p(u)$ é chamada de curva integral. Ou seja, se $u_p(\xi)$ é uma parametrização de uma curva integral na p-ésima família então o vetor tangente é proporcional a $r_p(u_p(\xi))$ em cada ponto*

$$u_p'(\xi) = \alpha(\xi) r_p(u_p(\xi)),$$

onde $\alpha(\xi)$ é algum fator escalar.

Uma outra classe importante de soluções são as ondas de rarefação. Quando consideramos uma rarefação de um sistema, a solução do mesmo também é constante ao longo da curva $x = \xi t$ e conseqüentemente a solução é uma função de x/t

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x \leq \xi_1 t \\ w(x/t), & \xi_1 t < x < \xi_2 t \\ u_R, & x \geq \xi_2 t. \end{cases} \tag{A.59}$$

Em geral, começando em um ponto u_L existem m curvas formadas de pontos u_R, que podem ser conectados a u_L por uma onda de rarefação. Estas curvas são subconjuntos das curvas integrais do campo vetorial $r_p(u)$.

A fim de determinarmos as ondas de rarefação, determinamos o p-invariante de Riemann, isto é, determinamos uma função v_p que é constante sobre as curvas de rarefação $w(\xi)$ do p-ésimo campo, ou seja,

$$v_p(w(\xi)) = constante.$$

Derivando em ξ obtemos

$$\nabla v_p \cdot w'(\xi) = 0.$$

O que implica

$$\nabla v_p \cdot r_p = 0.$$

Portanto, podemos determinar as ondas de rarefação determinando v_p que satisfaz essa condição.

Composição de Ondas

Explicamos a seguir como as ondas elementares - ondas de choque e rarefação - podem ser compostas.

Suponhamos que os estados u^1 e u^2 podem ser conectados por uma onda elementar. Analogamente, para os estados u^2 e u^3. Denotamos estas ondas por $u^1 \to u^2$ e $u^2 \to u^3$. Logo, o problema de Riemann com estados a esquerda u^1 e a direta u^3 pode ser solucionado pela composição das duas ondas descritas acima desde que a velocidade final da onda $u^1 \to u^2$ seja menor ou igual a velocidade inicial da onda $u^2 \to u^3$. Neste caso, dizemos que as ondas são compatíveis.

A solução geral do problema de Riemann com estados iniciais u^L, u^R é formada de ondas compatíveis $u^1 \to u^2$, $u^2 \to u^3, \ldots, u^{N-1} \to u^N$, com $u^1 = u^L$, $u^N = u^R$. Isto é, devemos determinar estados intermediários u^2, $u^3, \ldots, u^{N-1}$ para os quais os estados u^i, u^{i+1} são os estados iniciais para uma onda elementar e para os quais as ondas $u^{i-1} \to u^i$ e $u^i \to u^{i+1}$ são compatíveis.

Observação: Adicionando ao sistema não linear (A.56) condições de fronteira, em [8] encontramos um breve estudo sobre tais sistemas.

A.3.2 Formulação Numérica

Para os esquemas de Godunov, Riemann Solver, Lax Wendroff e ENO para sistemas, as expressões dos fluxos são basicamente, as mesmas daquelas obtidas para o caso escalar. A diferença está no acréscimo de mais componentes escalares. Apenas chamamos a atenção para:

1. Na definição do Riemann Solver de Roe, a matriz $A(u_L, u_R)$ além de satisfazer as condições

   (a) $f(u_L) - f(u_R) = A(u_L, u_R)(u_L - u_R)$,

   (b) $A(u_L, u_R) \to f'(u_L)$ na norma do operador quando $u_R \to u_L$

   deve satisfazer

(c) $A(u_L, u_R)$ deve ser diagonalizável com autovalores reais.

2. A reconstrução utilizada no esquema ENO para sistemas é baseada na utilização das variáveis características escalares. Isto é, no caso linear definimos a reconstrução $\mathbf{R}(x; \bar{\mathbf{u}})$ usando a reconstrução escalar $R(x; \bar{v}_p)$ do seguinte modo

$$\mathbf{R}(x; \bar{\mathbf{u}}) = \sum_{p=1}^{m} R(x; \bar{v}_p) r_p, \tag{A.60}$$

com $\bar{v}_p = l_p\ \bar{u}$,onde l_p é o autovetor a esquerda de Λ_p.

Para o caso não linear, reconstruímos $\mathbf{u}$ por

$$\mathbf{R}(x; \bar{\mathbf{u}}) = \sum_{p=1}^{m} R(x; \bar{v}_p(\bar{u}_j)) r_p(\bar{u}_j), \tag{A.61}$$

onde $x \in [\mu_{j-1}, \mu_j]$ e $\bar{v}_p(\bar{u}_j) = \{\bar{v}_p^i(\bar{u}_j)\}_{i=j-r+1,\ldots,j+r-1}$ é definido por

$$\bar{v}_p^i(\bar{u}_j) = l_p(\bar{u}_j)\bar{u}_i, \quad j - r + 1 \leq i \leq j + r - 1, \tag{A.62}$$

onde r é a ordem desejada para a reconstrução.

Como exemplo, vamos calcular o fluxo ENO de ordem dois para um sistema 2×2. Do caso escalar sabemos que a partir das aproximações v_j das médias celulares de $\bar{u}_j$ no intervalo $[\mu_{j-1}, \mu_j]$ podemos reconstruir $u(x,t)$ usando a reconstrução

$$R_j(x) = v_j + \left(\frac{x - \mu_{j-1/2}}{h}\right) S_j$$

onde

$$S_j = \bar{m}(v_j - v_{j-1}, v_{j+1} - v_j).$$

Usamos está aproximação de u para calcular o fluxo ENO

$$f_j^{ENO} = f^R(\ \tilde{v}_j(\mu_j,\ \Delta t/2),\ \tilde{v}_{j+1}(\mu_j,\ \Delta t/2)).$$

onde

$$\tilde{v}_j(\mu,\ \Delta t/2) = u_j(\ \mu_j,\ t_n) - \frac{\Delta t}{2}\ f'(u_j)\ (u_j)_x\ (\mu_j, t_n) + O(\Delta t^2).$$

Como $u_j(x,t_n) = R_j(x; v^n)$ na célula $[\mu_{j-1}, \mu_j]$ obtemos que

$$R_j(\mu_j) = v_j + \frac{1}{2} S_j = v_{\mu,L}, \qquad \frac{\partial}{\partial x} R_j(\mu_j) = \frac{S_j}{h}$$

e

$$R_{j+1}(\mu_j) = v_{j+1} - \frac{1}{2} S_{j+1} = v_{\mu,R}, \qquad \frac{\partial}{\partial x} R_{j+1}(\mu_j) = \frac{S_{j+1}}{h}.$$

Logo

$$\tilde{v}_j(\mu_j,\ \Delta t/2) = v_{j,L} - \frac{\Delta t}{2h} f'(v_{j,L}) S_j,$$

$$\tilde{v}_{j+1}(\mu_j,\ \Delta t/2) = v_{j,R} - \frac{\Delta t}{2h} \lambda f'(v_{j,R}) S_{j+1}.$$

Para o nosso sistema consideramos $\mathbf{v}_j = (s_j, b_j)^t$ e $\mathbf{R}_j$, a reconstrução de $(s,b)^t$ na célula $[\mu_{j-1}, \mu_j]$

$$\mathbf{R}_j(x) = R(x; w_1(\mathbf{v}_j))\ \mathbf{r}_1 + R(x; w_2(\mathbf{v}_j))\ \mathbf{r}_2$$

onde $w_1(\mathbf{v}_j) = \{w_{1,i}(\mathbf{v}_j)\}$ é definido por

$$w_{1,i}(\mathbf{v}_j) = l_1(\mathbf{v}_j) \cdot \mathbf{v}_i$$

e $w_2(\mathbf{v}_j) = \{w_{2,i}(\mathbf{v}_j)\}$ é definido por

$$w_{2,i}(\mathbf{v}_j) = l_2(\mathbf{v}_j) \cdot \mathbf{v}_i$$

temos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_i(x) &= R_i(x; w_1(\mathbf{v}_j))\ \mathbf{r}_{1,i} + R_i(x; w_2(\mathbf{v}_j))\ \mathbf{r}_{2,i} \\
&= \left[w_{1,i} + \left(\frac{x - \mu_{i-1/2}}{h} \right) S_{1,i} \right] \mathbf{r}_{1,i} \ + \ \left[w_{2,i} + \left(\frac{x - \mu_{i-1/2}}{h} \right) S_{2,i} \right] r_{2,i} \\
&= w_{1,i}\ \mathbf{r}_{1,i} + w_{2,i}\ \mathbf{r}_{2,i} + \left(\frac{x - \mu_{i-1/2}}{h} \right) (S_{1,i}\ \mathbf{r}_{1,i} + S_{2,i}\ \mathbf{r}_{2,i})
\end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{R}_i = \frac{1}{h} (S_{1,i}\ \mathbf{r}_{1,i} + S_{2,i}\ \mathbf{r}_{2,i}).$$

Para $i = j,\ j+1$ e $x = \mu_j$ obtemos

$$\mathbf{R}_j(\mu_j) = w_{1,j}\ \mathbf{r}_{1,j} + w_{2,j}\ \mathbf{r}_{2,j} + \frac{1}{2} (S_{1,j}\ \mathbf{r}_{1,j} + S_{2,j}\ \mathbf{r}_{2,j})$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{R}_j(\mu_j) \;=\; \frac{1}{h}(S_{1,j}\ \mathbf{r}_{1,j} + S_{2,j}\ \mathbf{r}_{2,j}).$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{j+1}(\mu_j) &= w_{1,j+1}\ \mathbf{r}_{1,j+1} + w_{2,j+1}\ \mathbf{r}_{2,j+1} - \frac{1}{2}(S_{1,j+1}\ \mathbf{r}_{1,j+1} + S_{2,j+1}\ \mathbf{r}_{2,j+1}) \\
\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{R}_{j+1}(\mu_j) &= \frac{1}{h}(S_{1,j+1}\ \mathbf{r}_{1,j+1} + S_{2,j+1}\ \mathbf{r}_{2,j+1}).
\end{aligned}$$

O operador de evolução temporal avaliado em $\mathbf{R}_j(\mu_j)$ e em $\mathbf{R}_{j+1}(\mu_j)$ tem então, a forma

$$\tilde{\mathbf{v}}_j(\mu_j, \Delta t/2) \;=\; \mathbf{R}_j(\mu_j) - \frac{\lambda}{2}\ \mathbf{f}'\ (\mathbf{R}_j(\mu_j))\ (S_{1,j}\ r_{1,j} + S_{2,j}\ r_{2,j})$$

e

$$\tilde{\mathbf{v}}_{j+1}(\mu_j, \Delta t/2) \;=\; \mathbf{R}_{j+1}(\mu_j) - \frac{\lambda}{2}\ \mathbf{f}'\ (\mathbf{R}_{j+1}(\mu_j))\ (S_{1,j+1}\ r_{1,j+1} + S_{2,j+1}\ r_{2,j+1}).$$

Portanto,

$$f_j^{ENO} = f^R(\tilde{\mathbf{v}}_j(\mu_j, \Delta t/2),\ \tilde{\mathbf{v}}_{j+1}(\mu_j, \Delta t/2)),$$

onde f^R é um fluxo de Riemann.

Apêndice B

Esquemas de Multi-resolução numa Malha Regular

Neste apêndice descrevemos os esquemas de multi-resolução de Harten: MRENO e MR-SENO, desenvolvidos em [15] e [16].

B.1 Definição do Esquema de Multi-resolução

Seja $\{X^l\}_{l=k_0}^{k_0+L}$ uma seqüência de malhas regulares encaixadas. Escrevendo a equação

$$v_\mu^{n+1} = v_\mu^n - \lambda\ (\bar{f}_\mu - \bar{f}_{\mu^-}) \equiv [\mathcal{D}\ v^n]_\mu, \tag{B.1}$$

na forma vetorial e aplicando o operador de multi-resolução T^{k_0+L}, obtemos o *esquema de multi-resolução*

$$\begin{aligned} v_{MR}^{n+1} &= v_{MR}^n - \lambda_\mu T^{k_0+L} \begin{pmatrix} \bar{f}_{\mu_1} - \bar{f}_{\mu_0} \\ \vdots \\ \bar{f}_{\mu_{N_L}} - \bar{f}_{\mu_{N_L-1}} \end{pmatrix} \\ &= T^{k_0+L}\mathcal{D}((T^{k_0+L})^{-1} v_{MR}^n) \\ &\equiv \mathcal{D}_{MR}\ v_{MR}^n, \end{aligned} \tag{B.2}$$

onde v_{MR}^m, com $m = n,\ n+1$, é da forma

$$\begin{aligned} v_{MR}^m &= T^{k_0+L} v^m \\ &= (v^{m,k_0}, \bar{d}^{k_0}, \bar{d}^{k_0+1}, \ldots, \bar{d}^{k_0+L-1})^t, \end{aligned}$$

e $\mathcal{D}_{MR}$ é o operador de evolução de multi-resolução. Assim, calcular a solução numérica do esquema (B.1) é equivalente a calcular a solução numérica de sua representação em multi-resolução (B.2).

B.2 Esquemas de Multi-resolução de Harten

Em geral, usando um esquema de alta resolução para o cálculo do fluxo numérico, o custo computacional é muito caro. A fim de diminuir esse custo Ami Harten desenvolveu uma estratégia baseada na redução do número de fluxos numéricos calculados. Nesta estratégia, ele utiliza um fluxo cujo custo computacional é barato em regiões de suavidade. Essas regiões são detectadas a partir da representação em multiescala da solução v_{MR}^n. Descrevemos nesta seção como isto é feito.

Em [16] Harten introduziu o operador de compressão de dados como aquele que atua nos coeficientes wavelet d_μ^l e fornece como resultado os coeficientes

$$\breve{d}_\mu^l = \begin{cases} d_\mu^l, & \text{se } |d_\mu^l| > \epsilon, \\ 0, & \text{se } |d_\mu^l| \leq \epsilon, \end{cases}$$

onde o parâmetro de truncamento ϵ_l é definido por

$$\epsilon_l = \frac{\epsilon}{2^{L-l}}, \quad l = 0, \ldots, L-1.$$

O próximo resultado nos diz que a resolução do esquema de multi-resolução (B.2) é equivalente a resolução das equações (B.3)–(B.5), fornecidas pelo seguinte lema.

Lema B.1 *O esquema de multi-resolução (B.2) é equivalente ao esquema*

$$\begin{aligned} v_\mu^{n+1,0} &= v_\mu^{n,0} - \lambda_0 \, (\bar{f}_\mu^0 - \bar{f}_{\mu^-}^0), \qquad \mu \in \bar{X}^0 && \text{(B.3)} \\ \bar{d}_\mu^l(v^{n+1}) &= \bar{d}_\mu^l(v^n) - \lambda_{l+1} \, d_\mu^l(\bar{f}), \qquad \mu \in X^{l+1} \setminus X^l, \;\; l = k_0, \ldots, k_0 + L - 1 && \text{(B.4)} \end{aligned}$$

onde

$$d_\mu^l(\bar{f}) = \bar{f}_\mu^{l+1} - \mathcal{I}(\mu, \bar{f}^l), \qquad \mu \in X^{l+1} \setminus X^l, \; l = k_0, \ldots, k_0 + L - 1. \tag{B.5}$$

Notemos que os fluxos numéricos nestas equações são sempre calculados a partir dos seus valores pontuais na malha mais fina.

Com o objetivo de reduzir o número de fluxos numéricos calculados, e tendo em vista as considerações acima, Harten propôs interpolarmos o fluxo sempre que $\bar{d}^l_\mu(v^n) = 0$ e $\bar{d}^l_\mu(v^{n+1}) = 0$.

Seja $\mathcal{D}^n_\epsilon$, o conjunto de pontos da forma (μ, l) em que os coeficientes wavelet $d^l_\mu(v^n)$ não são truncados. Do ponto de vista computacional, observamos que no início do n-ésimo passo temporal conhecemos apenas $\mathcal{D}^n_\epsilon$. Entretanto, como v^{n+1}_{MR} é truncado no início do próximo passo temporal, somente os $\bar{d}^l_\mu(v^{n+1})$ que estão acima de um certo parâmetro de tolerância devem ser calculados, ou seja, somente aqueles cujos índices (μ, l) pertençam a $\mathcal{D}^{n+1}_\epsilon$. Devemos, então, determinar um procedimento para obter uma estimativa $\tilde{\mathcal{D}}^{n+1}_\epsilon$, para $\mathcal{D}^{n+1}_\epsilon$ a partir do conhecimentos de $\mathcal{D}^n_\epsilon$ que satisfaça

$$\tilde{\mathcal{D}}^{n+1}_\epsilon \supset \mathcal{D}^n_\epsilon \cup \mathcal{D}^{n+1}_\epsilon.$$

Para os coeficientes $\bar{d}^{n,l}_\mu = \bar{d}^l_\mu(v^n)$ que não são truncados, a informação pode ser propagada sobre as células vizinhas a célula $[\mu^-, \mu]$. Isto pode resultar em coeficientes significativos na vizinhança de $\bar{d}^l_\mu$, isto é,

$$|\bar{d}^{n,l}_{\mu^-}| > \epsilon_l, \quad |\bar{d}^{n,l}_\mu| > \epsilon_l, \quad |\bar{d}^{n,l}_{\mu^+}| > \epsilon_l,$$

onde μ^- e μ^+ são os vizinhos à esquerda e à direita, mais próximos de μ em $X^{l+1} \setminus X^l$. Uma outra informação importante que devemos levar em conta em relação aos sistemas com os quais estamos trabalhando é que, descontinuidades podem se formar com o avanço temporal. Pode, então, ocorrer que num tempo n todos os coeficientes de um nível sejam truncados, e que com o aumento dos gradientes os coeficientes tornem-se maiores que o parâmetro de truncamento fixado. Neste caso pode haver a possibilidade que o nível mais grosso influencie o mais fino, isto é, se $|\bar{d}^{n,l}_\mu| > \epsilon_l$ então exigimos que

$$(\mu^-, l+1),\ (\mu^+, l+1) \in \tilde{\mathcal{D}}^{n+1}_\epsilon,\ l < L-1.$$

Neste caso, μ^- e μ^+ são os vizinhos à esquerda e à direita, mais próximos de μ em $X^{l+2} \setminus X^{l+1}$.

Tendo em vista estas considerações o algoritmo proposto por Ami Harten para estimar $\mathcal{D}^{n+1}_\epsilon$ é o seguinte.

Algoritmo para obtenção de $\tilde{\mathcal{D}}^{n+1}_\epsilon$

Dada a representação em multi-resolução, v^n_{MR}, vamos construir $\tilde{\mathcal{D}}^{n+1}_\epsilon$ seguindo os passos

1.

$$\left|\begin{array}{l} \text{Para} \quad l = 0, \ldots, L \text{ façamos} \\ \quad \left|\begin{array}{l} \text{Para} \quad \mu \in X^l \text{ façamos} \\ \qquad i(\mu, l) = 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

2.

$$\left|\begin{array}{l} \text{Para} \quad l = L-1, \ldots, 0 \text{ façamos} \\ \quad \left|\begin{array}{l} \text{Para} \quad \mu \in X^{l+1} \setminus X^l \text{ façamos} \\ \quad \left|\begin{array}{l} \text{Se} \quad |d_\mu^{n,l}| \leq \epsilon_l \text{ então} \\ \qquad d_\mu^{n,l} = 0 \\ \text{cc} \\ \qquad i(\mu^-, l) = 1 \\ \qquad i(\mu, l) = 1 \\ \qquad i(\mu^+, l) = 1 \\ \qquad \text{Se } |d_\mu^{n,l}| \geq \epsilon_l \text{ e } l < L-1 \text{ então faça} \\ \qquad\qquad i(\mu^-, l+1) = 1 \\ \qquad\qquad i(\mu^+, l+1) = 1 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{B.6}$$

3. Definimos $\tilde{\mathcal{D}}_\epsilon^{n+1}$ por

$$\tilde{\mathcal{D}}_\epsilon^{n+1} = \{(\mu, l) : \ i(\mu, l) = 1, \ \mu \in X^{l+1} \setminus X^l\}.$$

Algoritmo de Multi-resolução - MRENO

Descrevemos a seguir duas versões para o algoritmo que calcula a solução do esquema de multi-resolução com compressão de dados desenvolvido por A. Harten.

Versão 1

Dada a representação em multiescala v_{MR}^n de v^n no passo de tempo n calculamos sua evolução temporal em multiescala v_{MR}^{n+1} no tempo $n+1$ seguindo os passos:

1. Compressão de v_{MR}^n e obtenção de uma estimativa de $\tilde{\mathcal{D}}_\epsilon^{n+1}$.

2. Cálculo das médias celulares na malha mais fina

$$v^{n,L} = (T^{k_0+L})^{-1} \check{v}_{MR}^n.$$

3. Cálculos na malha mais grossa. Inicialmente, calculamos

$$\mu \in \Gamma^0, \bar{f}^0_\mu = \bar{f}(v^n).$$

A seguir atualizamos as médias celulares,

$$v^{n+1,0}_\mu = v^{n,0}_\mu - \lambda_0(\bar{f}^0_\mu - \bar{f}^0_{\mu^-}),\ \mu \in X^0.$$

4. Cálculo de $\{\bar{d}^l_\mu(v^{n+1})\}_{(\mu,l)\in\tilde{\mathcal{D}}^{n+1}_\epsilon}$.

$$
\begin{array}{l}
\text{Para} \quad l = 0, \dots L-1 \text{ façamos} \\
\quad \text{Para} \quad \mu \in X^{l+1} \setminus X^l \text{ façamos} \\
\quad\quad \bar{f}^{l+1}_{\mu^+} = \bar{f}^l_{\mu^+} \\
\quad\quad \tilde{f}^{l+1}_\mu = I(\mu, \bar{f}^l) \\
\quad\quad \text{Se} \quad (\mu, l) \in \tilde{\mathcal{D}}^{n+1}_\epsilon \text{ então} \\
\quad\quad\quad \bar{f}^{l+1}_\mu = \bar{f}(v^{n,L}) \\
\quad\quad\quad \bar{d}^l_\mu(v^{n+1}) = \bar{d}^l_\mu(v^n) - \lambda_{l+1}(\bar{f}^{l+1}_\mu - \tilde{f}^{l+1}_{\mu^-}) \\
\quad\quad \text{cc} \\
\quad\quad\quad \bar{f}^{l+1}_\mu = \tilde{f}^{l+1}_\mu \\
\quad\quad\quad d^l_\mu(v^{n+1}) = 0.
\end{array}
$$

Observamos que μ^+ é o vizinho mais próximo à direita de μ em X^{l+1}.

O esquema de multi-resolução apresentado acima pode ser visto como uma versão modificada do esquema original em que os fluxos numéricos são calculados de um modo hierárquico do nível mais grosso para o mais fino. Essa modificação consiste na substituição do cálculo exato do fluxo por uma interpolação. Descrevemos abaixo a versão do esquema original que chamamos de versão 2.

Versão 2

Dadas as médias celulares v^n calculamos v^{n+1} pelo seguinte algoritmo:

1. Estimativa de $\tilde{\mathcal{D}}^{n+1}_\epsilon$.
   Calculamos a representação em multi-resolução de v^n,

$$v^n_{MR} = T^{k_0+L} v^n.$$

A seguir aplicamos o algoritmo para a obtenção dos pontos significativos no tempo $n+1$. Definimos

$$\tilde{\mathcal{D}}_\epsilon^{n+1} = \{(\mu, l) : \; i(\mu, l) = 1, \; \mu \in X^{l+1} \setminus X^l\}.$$

2. Cálculo aproximado de $\bar{f}^L$.
   Calculamos

$$\bar{f}_\mu = \bar{f}(v^n), \quad \mu \in X^0.$$

$$\left| \begin{array}{ll} \text{Para} & l = 0, \dots L-1 \text{ façamos} \\ & \left| \begin{array}{ll} \text{Para} & \mu \in X^{l+1} \setminus X^l \text{ façamos} \\ & \bar{f}_{\mu^+}^{l+1} = \bar{f}_{\mu^+}^l \\ & \left| \begin{array}{ll} \text{Se} & i(\mu, l) = 1 \text{ então} \\ & \bar{f}_\mu^{l+1} = \bar{f}(v^n) \\ \text{cc} & \\ & \bar{f}_\mu^{l+1} = I(\mu, \bar{f}^l) \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{B.7}$$

3. Atualização de v^{n+1},

$$v_\mu^{n+1} = v_\mu^n - \lambda(\bar{f}_\mu - \bar{f}_{\mu^-}), \; \mu \in X^L.$$

Esta versão é mais interessante e mais simples do que a primeira pois possibilita sua generalização a outras situações apenas pela generalização de $\mathcal{D}_\epsilon^{n+1}$.

Esquema adaptativo numa malha regular – SENO

Vimos no Apêndice A que no cálculo numérico de soluções descontínuas de leis de conservação usando métodos clássicos os resultados nem sempre são satisfatórios. Vimos que o método ENO é o que, atualmente, apresenta uma melhor performance, mas que sua utilização pode tornar-se desvantajosa devido ao seu alto custo computacional proveniente da escolha do estêncil. Uma alternativa para esse impasse é a utilização do esquema descrito acima onde os fluxos são obtidos por interpolação ou pela utilização do fluxo ENO. Esse custo a que nos referimos, ainda pode ser diminuido usando uma nova classe de esquemas adaptativos definidos sobre uma malha regular que apresentamos a seguir. Nestes esquema adotamos o esquema de Lax-Wendroff como uma aproximação básica, mas alternamos para o esquema ENO de ordem 2 em regiões de descontinuidade, isto será feito como veremos, com a ajuda de um sensor. Sob o ponto de vista do esquema ENO este novo esquema adaptativo pode ser considerado um esquema ENO simplificado, por isso ele é chamado de esquema SENO.

Consideremos $\{\mu_j\}_{j=0}^{N}$ uma malha regular em $[0,1]$ onde N é um número par, $N = 2N_1$, com N_1 um número inteiro. Seja $h = 1/N$ o comprimento de cada célula da malha. Denotamos por $\bar{u}_j$ as médias celulares de $u(x)$ na malha dada. Definimos:

1. As médias celulares na malha de N_1 pontos por

$$\bar{u}_j^1 = \frac{\bar{u}_{2j-1} + \bar{u}_{2j}}{2}, \quad 1 \leq j \leq N_1,$$

2. O sensor η por

$$\eta([\mu_{2j-2}, \mu_{2j}], \bar{u}) = |\bar{u}_{2j-1} - \tilde{u}_{2j-1}| = |d_j^{L-1}(\bar{u})|, \tag{B.8}$$

3. O vetor $i_L(j)$, $1 \leq j \leq N$, que indica quando η é maior do que um certo parâmetro de tolerância ϵ_{osc}. A definição de $i_L(j)$ é feita pelo algoritmo abaixo

   (a) $i_L(j) = 0, \ \ 1 \leq j \leq N,$

   (b)

$$\left|\begin{array}{ll} \text{Para} & j = 1, \ldots, N_1 \text{ façamos} \\ & \left|\begin{array}{ll} \text{Se} & \eta([\mu_{2j-2}, \mu_{2j}], \bar{u}) > \epsilon_{osc} \text{ então} \\ & i_L(2j-2) = 1 \\ & i_L(2j-1) = 1 \\ & i_L(2j) = 1. \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{B.9}$$

Usando $i_L(j)$ definimos o fluxo numérico do esquema adaptativo como

$$\bar{f}_j(\bar{u}) = \begin{cases} f_j^{LW}(\bar{u}), & i_L(j) = 0, \\ f_j^{ENO}(\bar{u}), & i_L(j) = 1. \end{cases} \tag{B.10}$$

A análise de regularidade mostra que se $u(x)$ tem uma descontinuidade de choque que está localizada em $(\mu_{2j_0-2}, \mu_{2j_0})$ então

$$\eta([\mu_{2j-2}, \mu_{2j}], \bar{u}) = O([u]), \text{ para } |j - j_0| \leq \frac{M-2}{2}, \tag{B.11}$$

onde M é a ordem de aproximação para $\tilde{u}_{2j-1}$, que é calculado segundo as fórmulas (2.34), (2.36) e (2.38). Portanto, se ϵ_{osc} é tal que

$$\epsilon_{osc} \ll [u]$$

segue de (B.10) e (B.11) que

$$\bar{f}_j = f_j^{ENO}, \text{ para } 2j_0 - 2 - (M-2) \leq j \leq 2j_0 + M - 2,$$

isto é, o esquema adaptativo (B.9) e (B.10) usa o fluxo não oscilatório $\bar{f}_j^{ENO}$ num intervalo que se estende a partir de $M-2$ pontos a frente do choque e a $M-2$ pontos atrás do choque. Assim usamos o fluxo de Lax-Wendroff f_j^{LW} nos pontos a uma distância de $M-1$ pontos do choque. Segue então que se o suporte do fluxo numérico $\bar{f}_j^{LW}$ satisfaz $K \leq M-1$, onde K é o tamanho do suporte do fluxo numérico, o esquema adaptativo não gerará oscilações em descontinuidades.

Estas considerações sugerem a possibilidade de construir esquemas de multi-resolução que usem a análise de regularidade da representação em multi-resolução da solução numérica no início de cada passo temporal para selecionar o fluxo numérico exato apropriado em cada localidade.

Esquema de multi-resolução associado ao esquema SENO - MRSENO

Utilizando o esquema construído acima vamos descrever esquemas de multi-resolução adaptativos que utilizam o esquema de Lax-Wendroff como esquema de aproximação básico, e que é alternado com o esquema ENO onde $|d_j^{k_0+L-1}(v^n)| > \epsilon_{osc}$.

Descrevamos, então o algoritmo MRSENO. Os passos 2 e 3 de (B.7) permanecem os mesmos e o passo 1 é substituído pelo seguinte algoritmo.

1. Decomposição:

$$v_{MR}^n = T^{K_0+L} v^n$$

2. Façamos

$$i_L(\mu) = 0, \quad \mu \in X^L,$$

$$i(\mu, l) = 0, \quad \mu \in \bar{X}^l, \quad 0 \leq l \leq L-1,$$

3. Seja $\mu \in X^L \setminus X^{L-1}$.

$$
\left\lfloor
\begin{array}{l}
\text{Se} \quad |d_\mu^{n,k_0+L-1}| > \epsilon_{osc} \text{ então} \\
\qquad i_L(\mu^-) = 1 \\
\qquad i_L(\mu) = 1 \\
\qquad i_L(\mu^+) = 1, \quad \mu^-,\ \mu^+ \text{ são os vizinhos mais próximos de } \mu \text{ em } X^{k_0+L} \\
\text{cc} \\
\qquad \left\lfloor
\begin{array}{l}
\text{Se} \quad |d_\mu^{n,l_0+L-1}| \leq \epsilon_{L-1} \text{ então} \\
\qquad d_\mu^{n,k_0+L-1} = 0 \\
\text{cc} \\
\qquad i(\mu^-, L-1) = 1 \\
\qquad i(\mu, L-1) = 1 \\
\qquad i(\mu^+, L-1) = 1, \quad \mu^-,\ \mu^+ \text{ são os vizinhos mais próximos de } \mu \text{ em} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad X^{k_0+L} \setminus X^{k_0+L-1}.
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
\tag{B.12}
$$

4.

$$
\left\lfloor
\begin{array}{l}
\text{Para} \quad l = L-2, \ldots, 0 \text{ façamos} \\
\qquad \left\lfloor
\begin{array}{l}
\text{Para} \quad \mu \in X^{l+1} \setminus X^l \text{ façamos} \\
\qquad \left\lfloor
\begin{array}{l}
\text{Se} \quad |d_\mu^{n,k_0+l}| \leq \epsilon_l \text{ então} \\
\qquad d_\mu^{n,l} = 0 \\
\text{cc} \\
\qquad i(\mu^-, l) = 1 \\
\qquad i(\mu, l) = 1 \\
\qquad i(\mu^+, l) = 1, \quad \mu^-,\ \mu^+ \text{ são os vizinhos mais próximos de } \mu \text{ em} \\
\qquad\qquad\qquad X^{l+1} \setminus X^l \\
\text{Se} \quad |d_\mu^{n,k_0+l}| = \epsilon_l \text{ então} \\
\qquad\quad i(\mu^-, l+1) = 1 \\
\qquad\quad i(\mu^+, l+1) = 1, \quad \mu^-,\ \mu^+ \text{ são os vizinhos mais próximos} \\
\qquad\qquad\qquad \text{de } \mu \text{ em } X^{l+2} \setminus X^{l+1}.
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
\tag{B.13}
$$

5. Reconstrução:

$$v^n = (T^{k_0+L})^{-1} \check{v}_{MR}^n.$$

Apêndice C

Algoritmo do esquema $ADAPTATIVO$

Neste apêndice descrevemos os principais passos do algoritmo ADAPTATIVO.

Passo 1: Truncamento e extensão.

Neste passo, a partir dos pontos da malha $\Gamma^{n-1/2}$ vamos obter os pontos da malha $\Gamma^{n+1/2}$.

– Para $\mu \in X^{k_0+L}$ façamos $i(\mu) = 0$.

– Para $\mu \in \Gamma^{n-1/2}$ façamos $flag(\mu, l) = 0$, onde l é o nível tal que $\mu \in \Lambda^{l-1}$.

– Para $l = L_n, \ldots, 0$ façamos

  Para $\mu \in \Lambda^{l-1}$ façamos

    Se $l < L_n < L - 1$ e $|d_\mu^{n,l}| \geq \epsilon_l$ então

      $flag(\mu^-, l+1) = 1$

      $flag(\mu^+, l+1) = 1$

      $d_{\mu^-}^{n,l} = 0$

      $d_{\mu^+}^{n,l} = 0$, μ^-, μ^+ são os vizinhos de μ em Λ^l

      Se $|d_\mu^{n,l}| > \epsilon_l$ então

        $flag(\mu^-, l) = 1$

        $flag(\mu, l) = 1$

        $flag(\mu^+, l) = 1$

        $d_{\mu^-}^{n,l-1} = 0$

        $d_{\mu^+}^{n,l-1} = 0$, μ^-, μ^+ são os vizinhos de μ em Λ^{l-1}

    Se $l = L_n = L - 1$ e $|d_\mu^{n,l}| \geq \epsilon$ então

      $i(\mu^-) = 1$

      $i(\mu) = 1$

$i(\mu^+) = 1,\ \mu^-,\ \mu^+$ são os vizinhos de μ em X^{k_0+L}
Se $|d_\mu^{n,l}| > \epsilon_l$ então
$flag(\mu^-, l+1) = 1$
$flag(\mu, l+1) = 1$
$flag(\mu^+, l+1) = 1$
$d_{\mu^-}^{n,l} = 0$
$d_{\mu^+}^{n,l} = 0,\ \mu^-,\ \mu^+$ são os vizinhos de μ em Λ^l

– Definimos $\tilde{\mathcal{D}}_\epsilon^{n+1/2}$ por

$$\tilde{\mathcal{D}}_\epsilon^{n+1/2} = \{(\mu, l) :\ flag(\mu, l) = 1,\ \mu \in \Lambda^{l-1}\},\quad 0 \leq l \leq L-1$$

Portanto, $\Gamma^{n+1/2} = X^{k_0} \cup \tilde{\mathcal{D}}_\epsilon^{n+1/2}$.

– Para $\mu \in \tilde{\mathcal{D}}_\epsilon^{n+1/2}$ façamos
Se $flag(\mu, l) = 1$ então verificamos se os M pontos de X^{k_0+l-1} mais próximos de μ estão em $\tilde{\mathcal{D}}_\epsilon^{n+1/2}$. Se algum destes pontos não estiver, nós acrescentamo-os a malha fazendo $flag(\nu, l_\nu) = 1$ e $d_\nu^{n,l_\nu} = 0$, onde l_ν é o nível tal que $\nu \in \Lambda^{l_\nu - 1}$.

Passo 2: Aplicando às médias celulares da malha mais grossa e aos coeficientes wavelet obtidos no passo anterior o algoritmo de síntese obtemos as médias celulares $\tilde{v}_\mu^n,\ \mu \in \Gamma^{n+1/2}$.

Passo 3: Antes de calcular o fluxo para cada ponto $\mu \in \Gamma^{n+1/2}$ calculamos ou aproximamos, usando a reconstrução de médias celulares $\mathcal{R}(x; f^l)$, a média celular associada a μ^+ que é o vizinho mais próximo de $\mu \in X^{l_\mu}$ onde l_μ é tal que $\mu \in \Lambda^{l_\mu - 1}$.

Passo4: Cálculo do fluxo.
Para $\mu \in \Gamma^{n+1/2}$ façamos
Se $i(\mu) = 1$ então
$\bar{f}_\mu = f^{ENO}$
caso contrário
definimos k_μ tal que $2^{k_\mu} = \mu - \mu^-$ e usamos as as médias celulares de X^{k_μ} para calcular $\bar{f}_\mu = f^{LW}$.

Passo 5: Evolução temporal.

$$v_\mu^{n+1} = v_\mu^n - \lambda_\mu(\bar{f}_\mu - \bar{f}_{\mu^-}).$$

Bibliografia

[1] A. Cohen. Wavelets methods in numerical analysis. In: Handbook of Numerical Analysis, vol VII, P. G. Ciarlet e J. L. Lions (eds). Elsevier, Amsterdam.

[2] A. Cohen, W. Dahmen, and R. DeVore. Multiscale decompositions on bounded domains. Preprint LAN/UPMC 1995. Aceito em Trans. Amer. Math. Soc., 2000.

[3] A. Cohen, I. Daubechies, and P. Vial. Wavelets and fast wavelet transforms on the interval. *ACHA*, 1:54–81, 1994.

[4] I. Daubechies. Ortonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure. App. Math.*, 41:909–996, 1988.

[5] I. Daubechies, I. Guskov, and W. Sweldens. Regularity of Irregular Subdivision. Preprint Department of Mathematics, Princeton University, 1997. Aceito em Constructive Approximation.

[6] G. Deslauries and S. Dubuc. Interpolation dyadique. In *Fractales, Dimensions non-entiẽres et Applications*, G. Cherbit (ed), Masson , Paris, 1987.

[7] G. Deslauries and S. Dubuc. Symmetric iterative interpolation processes. *Constr. Approx.*, 5:49–68, 1989.

[8] K. Dietmar. *Numerical Schemes for Conservation Laws.* Wiley Teubner, 1997.

[9] D.L. Donoho. Interpolating wavelet transforms. Department of Statistics. Stanford University. October, 1992.

[10] D.L. Donoho. Smooth wavelet decomposition with blocky coefficient kernels. In *Recent Advances in Wavelet Analysis.* L. L. Schumaker and G. Webb (eds.).Academic Press, Inc., 1993.

[11] S. Dubuc. Interpolation through an iterative scheme. *J. Math. Anal. Appl.*, 114:185–204, 1986.

[12] G. Hammerlin and K.H. Hoffmann. *Numerical Mathematics.* Springer Verlag, 1991.

[13] A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J.Comp. Phys.*, 49:357–393, 1983.

[14] A. Harten. Discrete multiresolutions analysis and generalized wavelets. *Appl. Num. Math.*, 12:153–192, 1993.

[15] A. Harten. Adaptative multiresolution schemes for shock computations. *J. Comp. Phys.*, 115:319–338, 1994.

[16] A. Harten. Multiresolution algorithms for the numerical solution of hyperbolic conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.*, 48:1305–1342, 1995.

[17] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, and S. Chakravarthy. Uniformly high accurate non-oscillatory schemes III. *J.Comp. Phys.*, 71, 1987.

[18] A Harten and S. Osher. Uniformly high accurate non-oscillatory schemes I. *SIAM J. Numerical Analysis*, 24(2), Abril 1987.

[19] M. Holmströn. *Wavelet based methods for time dependent PDEs.* PhD thesis, University of Uppsala, 1997.

[20] E. Isaacson. Global solution of a riemann problem for a non-strictly hyperbolic system of conservation laws arising in enhanced oil recovery. Technical report, Rockefeller University. New York, NY.

[21] T. Johansen and R. Winther. The solution of the Riemann problem for a hyperbolic system of conservation laws modeling polymer flooding. *SIAM J.Math. Anal.*, 19(3), May 1988.

[22] P.D. Lax and B. Wendroff. Systems of conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.*, 13:217–237, 1960.

[23] R.J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws.* Birkhäuser Verlag, 1990.

[24] F. Plantevin. Wavelets on irregular meshes. In *Advances in Computational Mathematics*, 1995.

[25] P.J. Ponenti. *Algorithmes en ondelettes pour la résolution d'équations aux dérivées partielles.* PhD thesis, Université d'Aix-Marseille I, 1994.

[26] P.A. Raviart and E. Godlewski. Hyperbolic systems of conservation laws. In *SMAI Publications 3/4*, Paris, 1991.

[27] A. Tveito and R. Winther. Existence, uniqueness and continuous dependence for a system of hiperbolic conservation laws modelling polymer flooding. *SIAM J. Math. Anal.*, 22(4):905–933, July 1991.