MS211 - Cálculo Numérico: Segundo Projeto

Data da Entrega:12/06/2012

Resolva as seguintes **equações diferenciais** utilizando ou o MatLab ou o Octave. Entregue o programa (comandos), resultados, conclusões e as observações que você julgar importantes. Os grupos deverão ter no máximo dois integrantes.

P 1- O estudo dos modelos matemáticos para predição da dinâmica demográfica de espécies antagônicas se originou dos trabalhos independentes que, na primeira parte do século XX, foram publicados por A. J. Lotka e V. Volterra. Considere o problema de predição da população de duas espécies, sendo uma delas a predadora, cuja população no tempo t é $x_2(t)$, e a outra presa, cuja população é $x_1(t)$. Suponha que a presa sempre disponha de comida suficiente e que sua taxa de natalidade em qualquer momento seja proporcional à quantidade de presas vivas nesse tempo, ou seja, a taxa de natalidade (da presa) é $k_1x_1(t)$. A taxa de mortalidade da presa depende do número de presas e de predadores vivos nesse tempo. Para simplificar os cálculos, suponha que a taxa de mortalidade (da presa) seja $k_2x_1(t)x_2(t)$. Por outro lado, a taxa de natalidade do predador depende de sua disponibilidade de comida $x_1(t)$ e, também, do número de predadores disponíveis para o processo de reprodução. Por tal razão, suponha que a taxa de natalidade (dos predadores) seja $k_3x_1(t)x_2(t)$. Suponha que sua taxa de mortalidade seja proporcional à quantidade de predadores vivos no tempo, ou seja, que a taxa de mortalidade (dos predadores) seja $k_4x_2(t)$.

Dado que $x_1'(t)$ e $x_2'(t)$ representam, respectivamente, a alteração nas populações de presas e de predadores no tempo, o problema se expressa por meio do sistema de equações diferenciais não lineares

$$x_1'(t) = k_1x_1(t) - k_2x_1(t)x_2(t) \quad \text{e} \quad x_2'(t) = k_3x_1(t)x_2(t) - k_4x_2(t)\ .$$

Resolva este sistema pelo método de Euler Aperfeiçoado para $0 \leq t \leq 4$, supondo que a população inicial da presa seja de 1000 e a dos predadores seja de 500. Considere as constantes $k_1 = 3$, $k_2 = 0.002$, $k_3 = 0.0006$ e $k_4 = 0.5$ e faça $h = 0.001$. Delineie um gráfico das soluções desse problema, registrando ambas as populações em função do tempo, e descreva o que os resultados representam na prática (fisicamente).

obs.: você pode usar as seguintes fórmulas do método de Euler Aperfeiçoado para um sistema de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{cases} x' = f(t,x,y) \\ y' = g(t,x,y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + 0.5(L_1 + L_2) \\ y_{k+1} = y_k + 0.5(M_1 + M_2) \end{cases}$$

onde:

$L_1 = hf(t_k, x_k, y_k)$

$M_1 = hg(t_k, x_k, y_k)$

$L_2 = hf(t_k + h, x_k + L_1, y_k + M_1)$

$M_2 = hg(t_k + h, x_k + L_1, y_k + M_1)$

P 2- Considere o seguinte **problema de valor de contorno**:

$$\begin{cases} y''(x) + (y'(x))^2 + y(x) = \ln x \ , \quad 1 < x < 2 \\ y(1) = 0, \ y(2) = \ln 2 \end{cases}$$

(a) Verifique, por substituição direta, que $y(x) = \ln x$ é solução deste problema.

(b) Encontre uma aproximação para a solução, usando o método de diferenças finitas de segunda ordem com $h = 0.1$ e $h = 0.001$ (para a resolução do sistema não-linear, use o método de Newton com tolerância 10^{-5} e chute inicial $y_i^{(0)} = 1$, para todo i). Compare as aproximações encontradas com a solução exata nos pontos $x = 1.2$, $x = 1.4$, $x = 1.6$ e $x = 1.8$. O que você conclui?
