

Wavelets e seu Impacto em Compressão de Sinais e Imagens

Sônia Maria Gomes

IMECC-UNICAMP

Sumário

Introdução

- Codificação por transformadas: princípios básicos, breve históricos sobre FT e WT

Análise Wavelet

- Wavelets Ortogonais de Daubechies, DWT (banco de filtros), compressão de dados

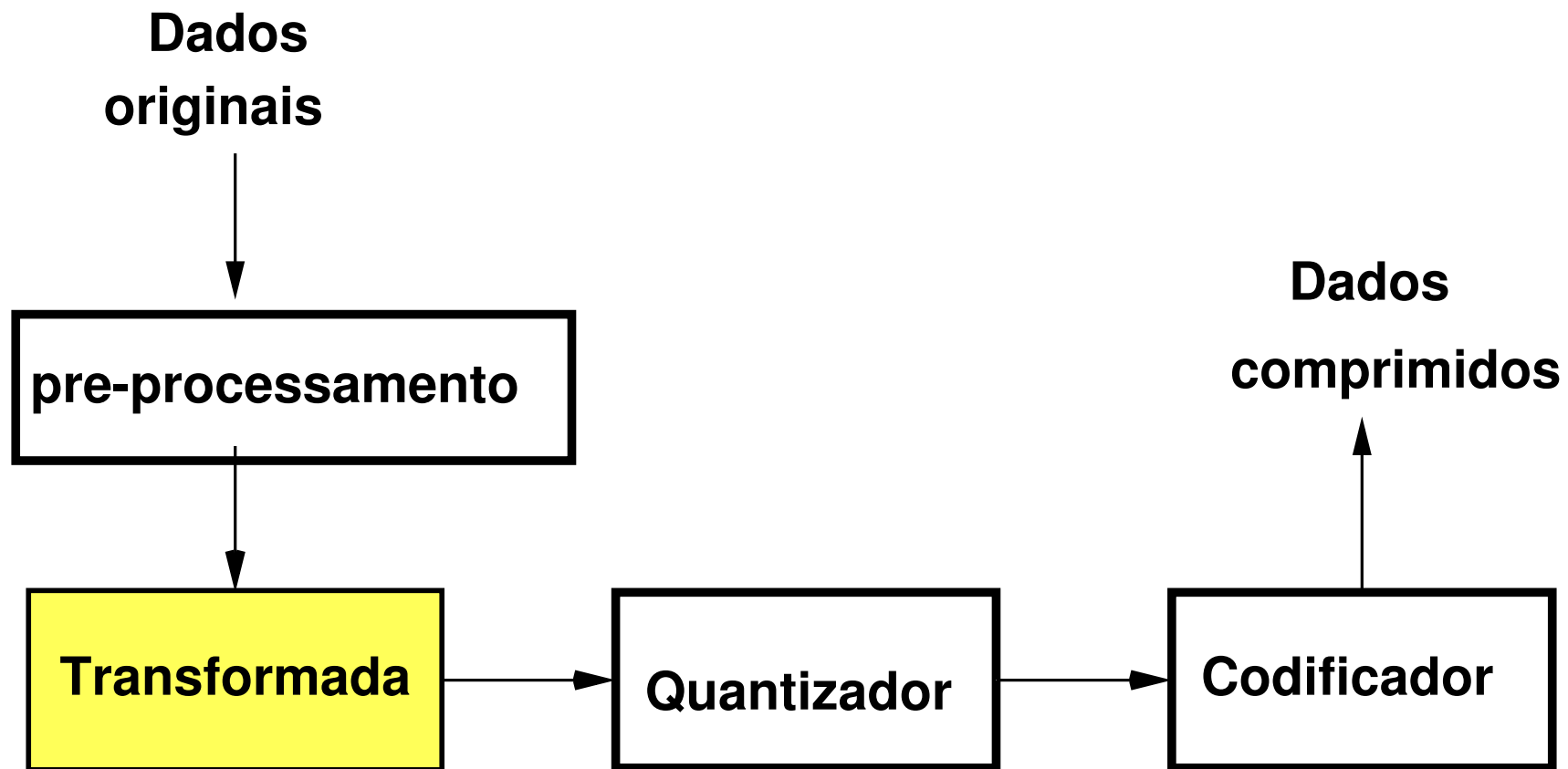
Introdução

Codificação de Sinais

- **Princípio básico** É como reduzir um litro de leite a algumas gramas de leite em pó. O sabor da bebida restaurada é parecido com o sabor de leite, mas algumas sutilezas são perdidas.
- **Objetivo** Dada uma taxa de compressão, comprimir o sinal com o mínimo de distorção.
- **Principais aplicações** Armazenamento e transmissão de dados.

Codificação por Transformadas

Etapas Básicas

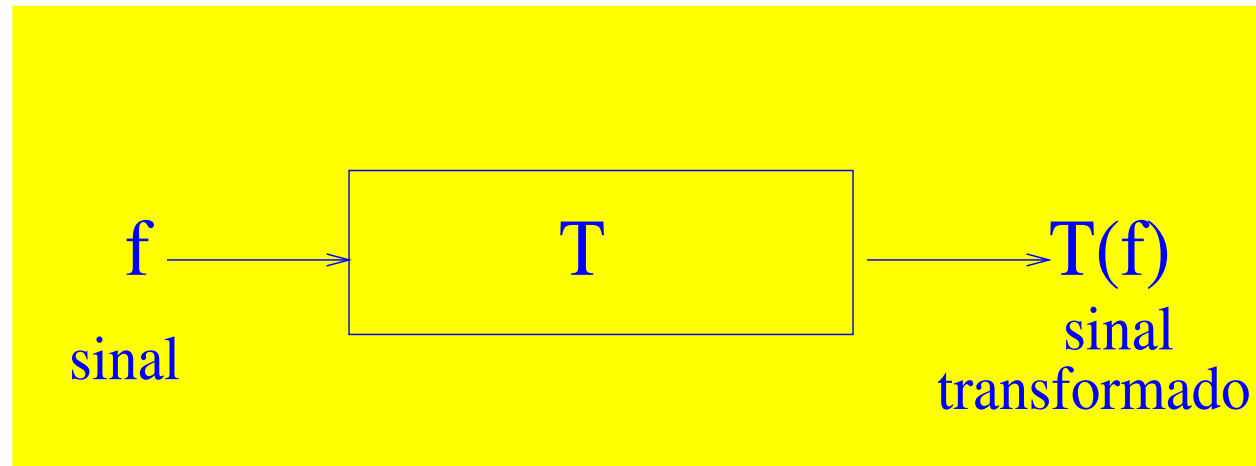


Codificação por Transformadas

Etapas Básicas

- **Transformação** O objetivo é eliminar a redundâncias (correlações) existentes no sinal.
- **Quantização e Alocação de Bits** Substitui-se cada coeficiente obtido na transformação por uma variável quantizada, que toma valores num conjunto finito de números reais. Os coeficientes quantizados são codificados com um número finito de bits, da maneira mais eficiente possível, de forma a minimizar a taxa de distorção.
- **Codificação** Ordenam-se os dados de maneira adequada para o armazenamento ou a transmissão.

Transformadas



Casos de interesse:

- Transformada de **Fourier**
- Transformada **wavelet**

Análise de Fourier

Aspecto Discreto

$$f_k \Longleftrightarrow \hat{f}_k \quad \hat{f} = \frac{1}{N} \bar{F}_N f$$

Aspecto Funcional

$$f(x) \approx \sum_k \hat{f}_k e^{ikx}$$

Análise Wavelet

Aspecto Discreto

$$f^{j+1} \Longleftrightarrow \{f^0, d^0, \dots, d^j\}$$

Aspecto Funcional

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \sum_k f_k^j \phi(2^j x - k) \\ &= \sum_k f_k^0 \phi(x - k) + \sum_{l=0}^j d_k^l \psi(2^l - k) \end{aligned}$$

Semelhanças:

- Sinais são analisados por expansões em termos de funções básicas.
- Algoritmos rápidos

Diferenças:

- Fourier: localização no domínio das frequências.
- Wavelet: dupla localização (domínio das frequências e domínio temporal).

Características	Fourier	Wavelets
base	e^{ikt}	$\psi(2^j t - k)$
ortogonalidade	sim	sim
completude	sim	sim
autofunções importantes	sim	não
algoritmos rápidos	sim	sim
localização	ξ	$t \times \xi$

Histórico

Análise de Fourier

1810 Joseph Fourier



1965 Cooley e Tuckey (FFT)

Análise Wavelet

1984 Morlet e Grossmann



Meyer, Mallat, Daubechies, etc..

⋮

JPEG e Codificação com DCT

- Imagens de N^2 pixels são divididas em $N^2/64$ blocos de 8×8 pixels. Cada bloco é transformado com FDCT-2D (fast discrete cosine transform)
- Usualmente, JPEG é usado com taxas médias $\bar{R} \in [0.5 - 1]$ bits/pixel; De $0.75 - 1$ bits/pixel, a qualidade é excelente;
- Com taxas de $0.25 - 0.5$ bits/pixel, a qualidade é moderada. Abaixo deste nível, efeitos visuais quadriculados aparecem e torna-se impraticável.

JPEG (DCT)



JPEG2000(DWT)



$6.1KB$ (Taxa de compressão = 115 : 1)

JPEG (Joint Photographic Experts Group)

Wavelets

Série de Wavelets

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^j \psi_k^j(t),$$

Funções básicas: **wavelets**

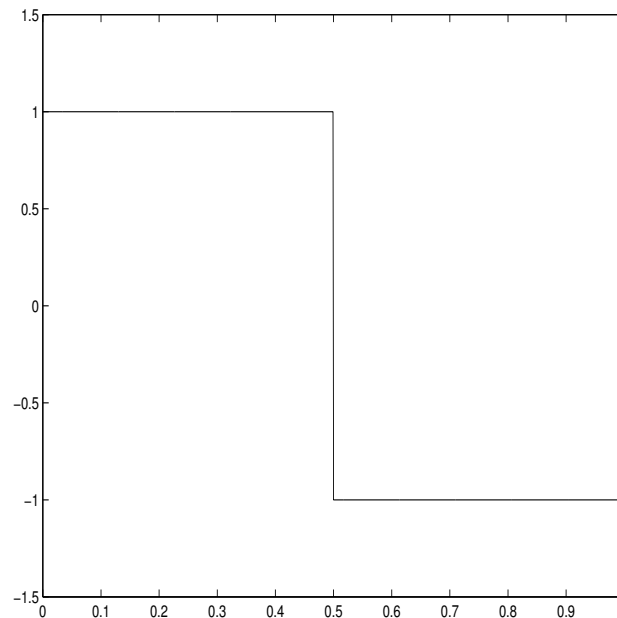
$$\psi_k^j(t) = \psi(2^j t - k)$$

Existem várias famílias, dependendo da escolha da wavelet mãe $\psi(t)$.

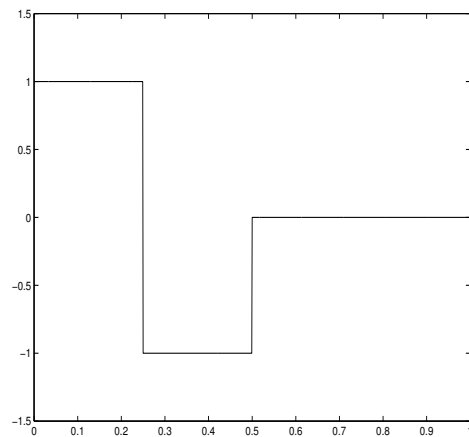
$d_k^j \longrightarrow$ **coeficientes wavelets.**

Exemplo: Wavelet de Haar

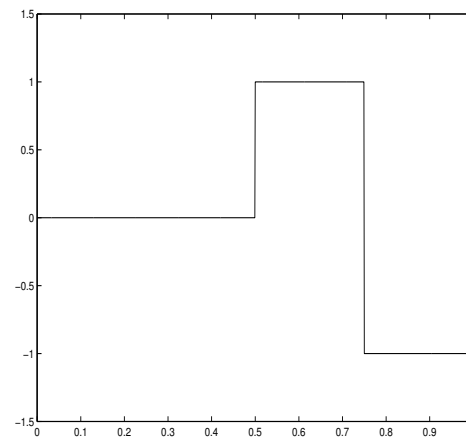
$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2 \\ -1, & 1/2 \leq t < 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



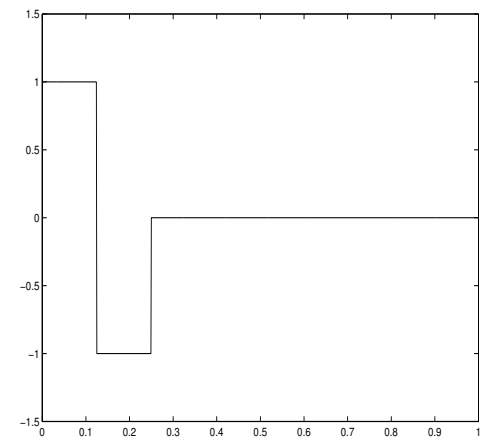
$$\psi(2t)$$



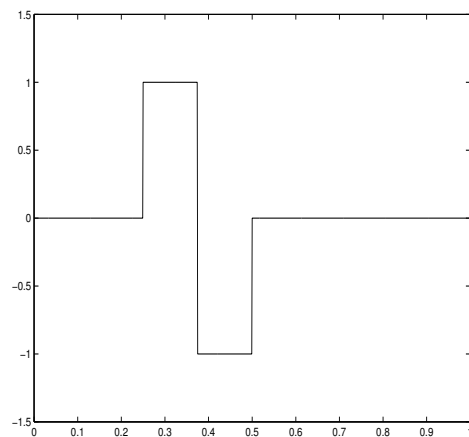
$$\psi(2t - 1)$$



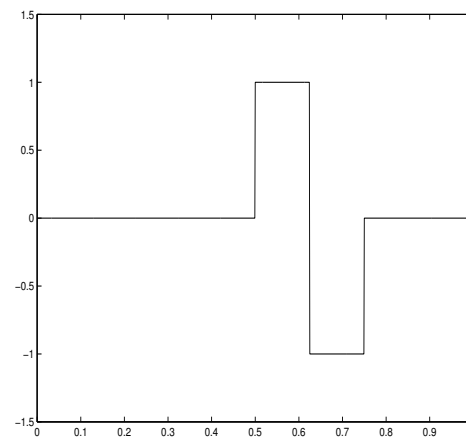
$$\psi(4t)$$



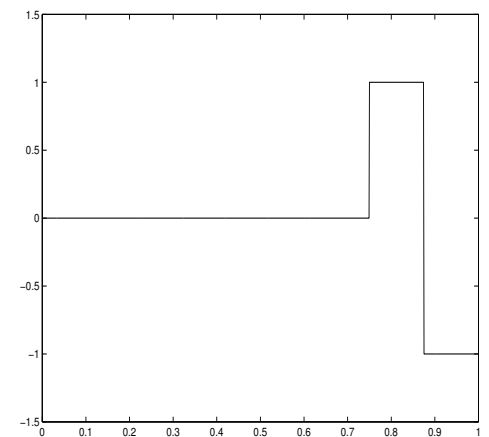
$$\psi(4t - 1)$$



$$\psi(4t - 2)$$



$$\psi(4t - 3)$$



- Sistema ortogonal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(2^j t - k) \psi(2^l t - n) dt = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq l \text{ ou } k \neq n \\ 2^{-j} & \text{se } j = l \text{ e } k = n, \end{cases}$$

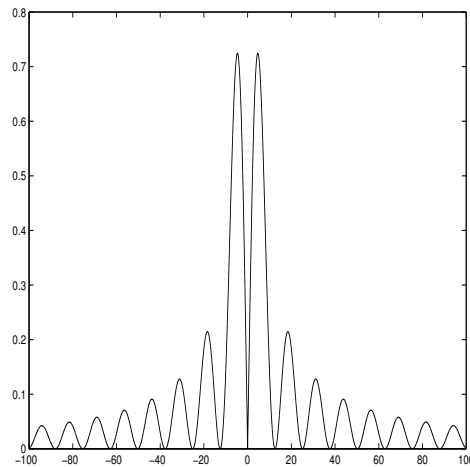
- Coeficientes wavelet

$$d_k^j = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi(2^j t - k) dt.$$

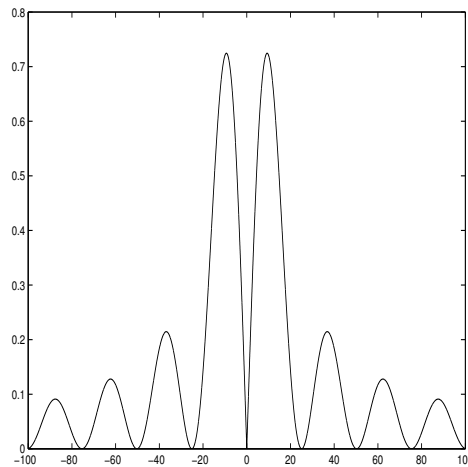
Transformada de Fourier das Wavelets de Haar

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{1}{i\xi} [1 - e^{-i\frac{\xi}{2}}]^2.$$

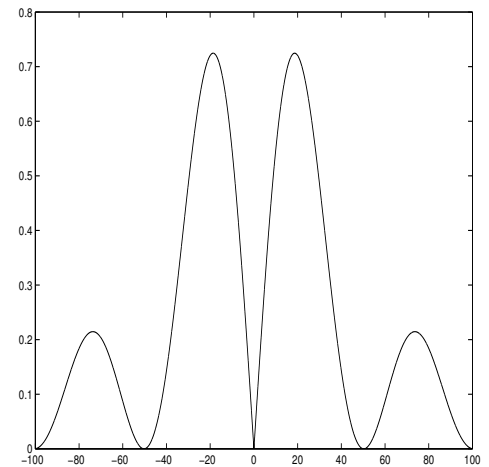
$$|\hat{\psi}(\xi)|$$



$$|\hat{\psi}(2^{-1}\xi)|$$



$$|\hat{\psi}(2^{-2}\xi)|$$



Transformada wavelet

$$f \rightarrow f^w = (d_k^j)$$

- Identidade de Parserval

$$\int [f(t)]^2 dt = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-j} |d_k^j|^2.$$

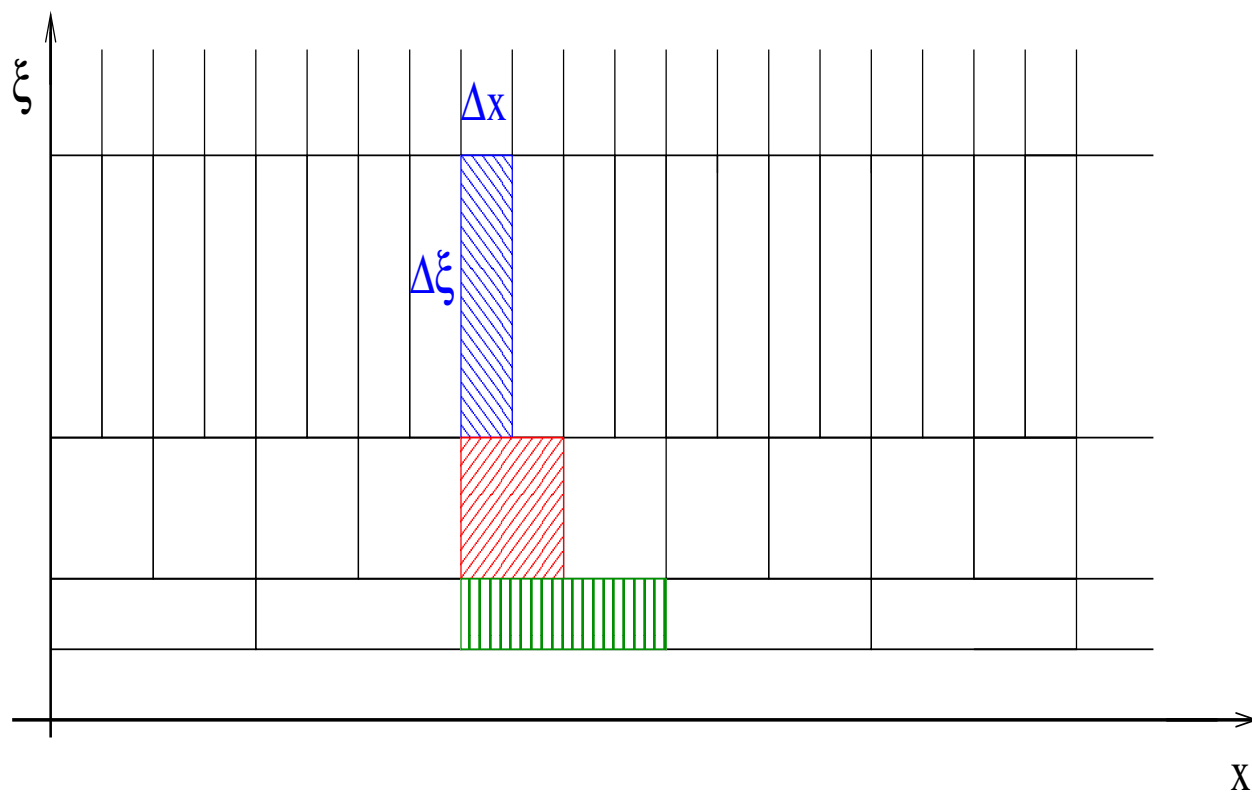
Wavelets: Características

- *Localização temporal*
- *Localização frequencial*

d_k^j medida do conteúdo frequencial de f associado às frequências ξ que ocorrem no suporte de $\psi_k^j(t)$.

Resoluções inversamente proporcionais

$$\Delta^j t \times \Delta^j \xi = \text{constante}$$



Plano $t \times \xi$

DWT e IDWT

$$\{\bar{\mathbf{f}}^{j+1}\} \begin{matrix} DWT \\ \rightleftarrows \\ IDWT \end{matrix} \{\bar{\mathbf{f}}^{j_0}, \mathbf{d}^{j_0}, \dots, \mathbf{d}^j\}$$

\bar{f}^ℓ — Valores discretos do sinal na **escala** $2^{-\ell}$

$$\bar{f}_n^\ell = 2^\ell \int_{n2^{-\ell}}^{(n+1)2^{-\ell}} f(t) dt$$

(médias nos intervalos $[n2^{-\ell}, (n+1)2^{-\ell}]$).

d^ℓ — **Detalhes** entre os níveis ℓ e $\ell + 1$

Algoritmos

Análise ou decomposição: $\bar{f}^{j+1} \rightarrow (\bar{f}^j, d^j)$

$$\bar{f}_k^j = \frac{1}{2} \left[\bar{f}_{2k}^{j+1} + \bar{f}_{2k+1}^{j+1} \right]$$

$$d_k^j = \frac{1}{2} \left[\bar{f}_{2k}^{j+1} - \bar{f}_{2k+1}^{j+1} \right].$$

Síntese ou reconstrução: $(\bar{f}^j, d^j) \rightarrow \bar{f}^{j+1}$

$$\bar{f}_{2k}^{j+1} = [\bar{f}_k^j + d_k^j]$$

$$\bar{f}_{2k+1}^{j+1} = [\bar{f}_k^j - d_k^j].$$

Forma de convolução

Análise

$$d_k^j = [\bar{\mathbf{f}}^{j+1} * \mathbf{g}^*]_{2k} \quad \bar{f}_k^j = [\bar{\mathbf{f}}^{j+1} * \mathbf{h}^*]_{2k},$$

Síntese

$$\bar{f}_k^{j+1} = 2 \left\{ \sum_n \bar{f}_n^j h_{k-2n} + \sum_n \bar{f}_n^j g_{k-2n} \right\},$$

Filtros

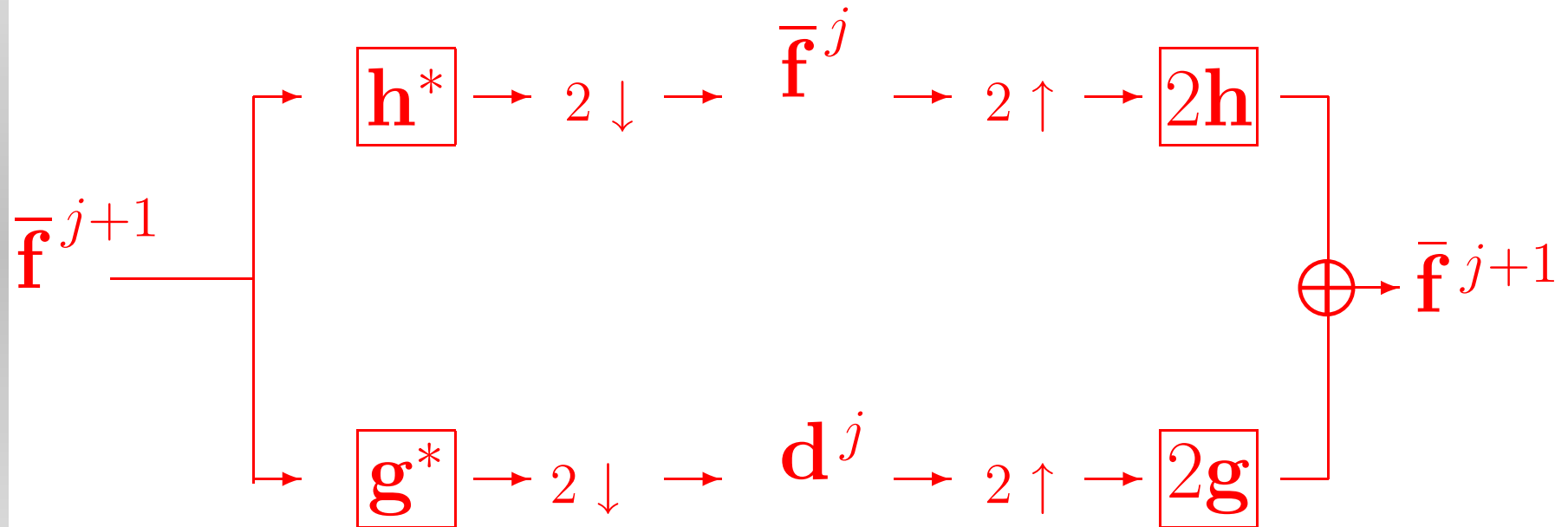
Os filtros de análise e de síntese são conjugados

$$H^*(\xi) = \overline{H(\xi)} \quad \text{e} \quad G^*(\xi) = \overline{G(\xi)}.$$

$$h_k = h_{-k}^*, \quad g_k = g_{-k}^*.$$

$$g^*(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 0 \\ -\frac{1}{2} & k = -1 \\ 0 & \text{demais casos.} \end{cases} \quad h^*(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 0 \\ \frac{1}{2} & k = -1 \\ 0 & \text{demais casos.} \end{cases}$$

Banco de Filtros



$2 \downarrow$ *downsampling*

$2 \uparrow$ *upsampling*

Wavelets Ortogonais de Daubechies

Principais ingredientes:

(a) Filtro passa baixa $H(\xi)$

Condição de ortogonalidade

$$|H(\xi)|^2 + |H(\xi + \pi)|^2 = 1 \quad \forall \xi$$

(b) Filtro passa alta $G(\xi)$

$$G(\xi) = e^{-i\xi} \overline{H(\xi + \pi)}.$$

Em termos de seus coeficientes: $g_n = (-1)^n h_{1-n}$

Filtros ortogonais de Daubechies

$$|H_K(\xi)|^2 = P_{2K}(\xi)$$

Filtros de interpolação: $P_M(\xi)$, $M = 2K$

$$P_M(\xi) = \left(\cos \frac{\xi}{2}\right)^M \sum_{m=0}^{K-1} \binom{K-1+m}{m} (\sin \xi/2)^{2m}$$

(associados a interpolação polinomial de Lagrange de grau $M-1$)

Coeficientes dos Filtros

$K = 2$		$K = 3$	$K = 4$
k	$h(k)$	$h(k)$	$h(k)$
0	0.341506350946110	0.235233603892082	0.162901714025649
1	0.591506350946109	0.570558457915722	0.505472857545914
2	0.158493649053890	0.325182500263116	0.446100069123380
3	-0.0915063509461096	-0.0954672077841637	-0.0197875131178224
4		-0.0604161041551981	-0.132253583684520
5		0.0249073356548795	0.0218081502370886
6			0.0232518005354909
7			-0.00749349466518071

DWT e IDWT

$$\{\bar{\mathbf{f}}^{j+1}\} \begin{matrix} DWT \\ \rightleftharpoons \\ IDWT \end{matrix} \{\bar{\mathbf{f}}^{j_0}, \mathbf{d}^{j_0}, \dots, \mathbf{d}^j\}$$

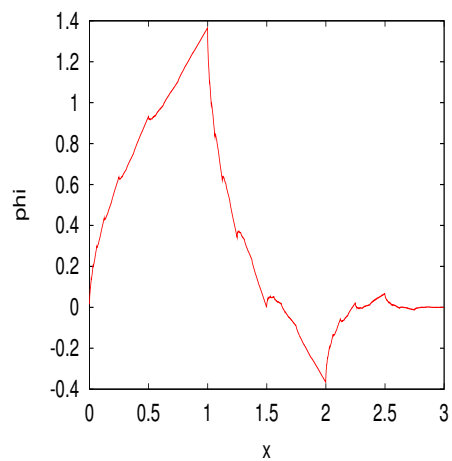
$$\bar{f}_n^\ell = 2^\ell \int_{\mathbf{R}} f(t) \phi(2^\ell t - n) dt$$

$\phi(t) \rightarrow$ função de escalonamento

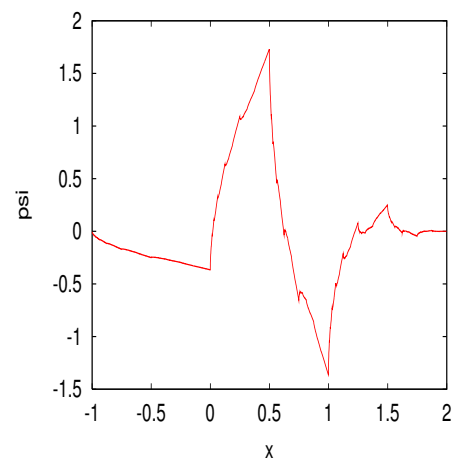
$$d_n^\ell = 2^\ell \int_{\mathbf{R}} f(t) \psi(2^\ell t - n) dt$$

$\psi(t) \rightarrow$ função wavelet mãe

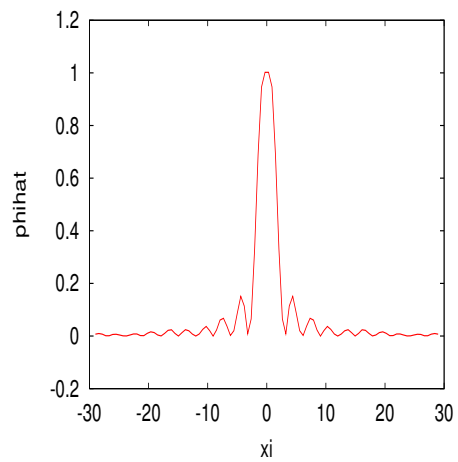
$$\phi_2(t)$$



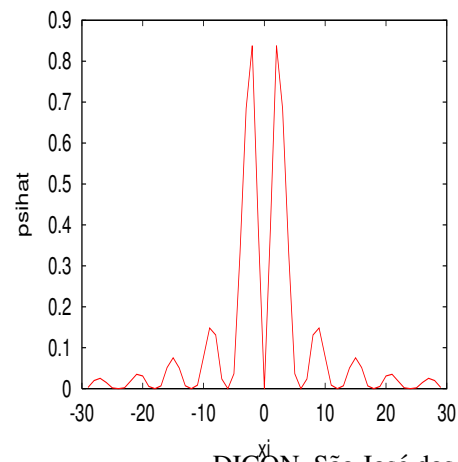
$$\psi_2(t)$$



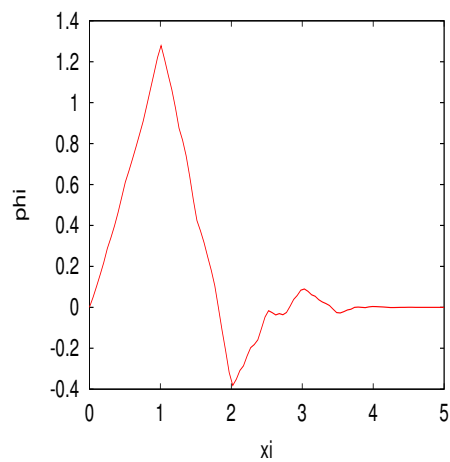
$$|\hat{\phi}_2(\xi)|$$



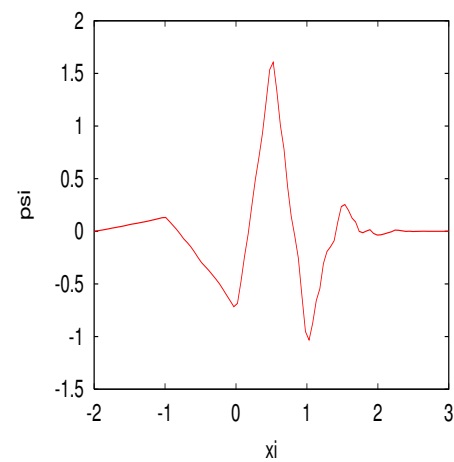
$$|\hat{\psi}_2(\xi)|$$



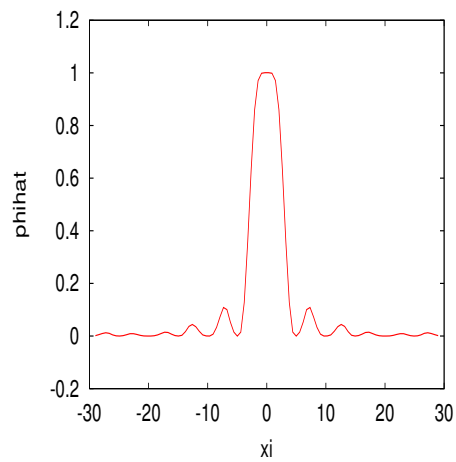
$$\phi_3(t)$$



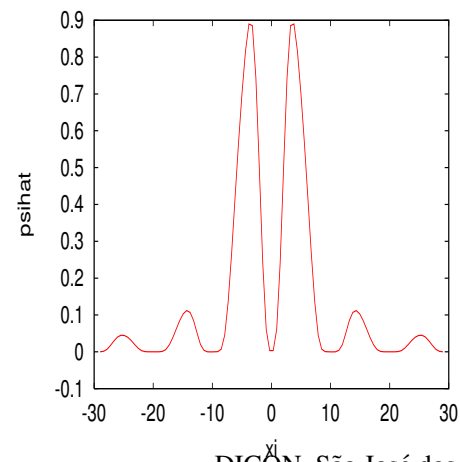
$$\psi_3(t)$$



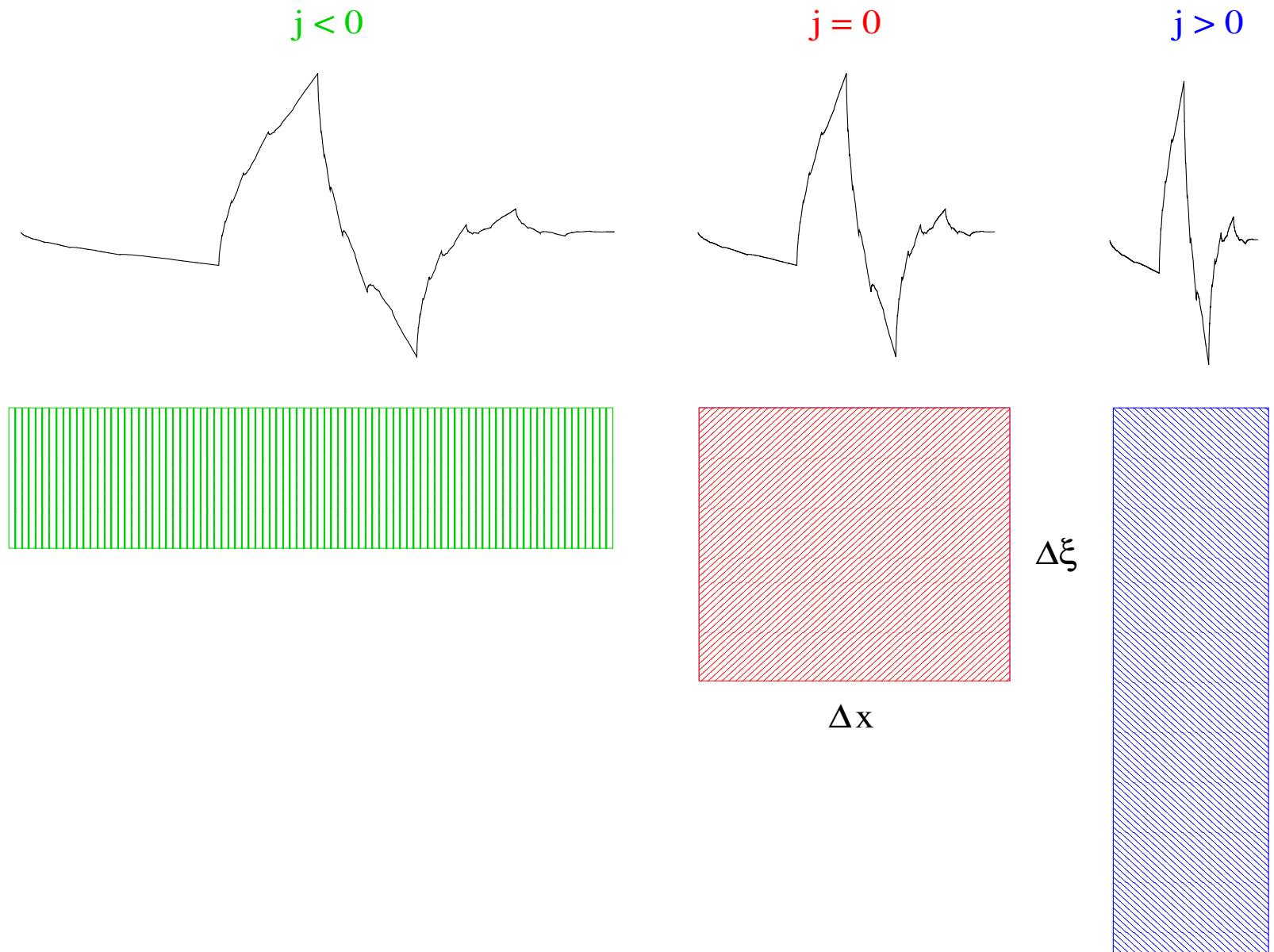
$$|\hat{\phi}_3(\xi)|$$



$$|\hat{\psi}_3(\xi)|$$



Localização Tempo–frequência



Propriedades

Relações de escala

$$\phi(t) = 2 \sum_k h_k \phi(2t - k),$$

$$\psi(t) = 2 \sum_k g_k \phi(2t - k)$$

Relações de ortogonalidade

$$\int_{\mathbf{R}} \phi(t - n) \phi(t - m) = \delta_{n-m},$$

$$\int_{\mathbf{R}} \psi(t - n) \psi(t - m) = \delta_{n-m},$$

$$\int_{\mathbf{R}} \phi(t - n) \psi(t - m) = 0,$$

Suavidade e Suporte: A suavidade e o suporte das wavelets de Daubechies aumentam com o parâmetro K .

Cancelamento de Polinômios: As wavelets de Daubechies possuem K momentos nulos, i.e, cancelam os polinômios de grau $\leq K - 1$.

(K é ordem com que o filtro passa baixa $H(\xi)$ se anula em π , que é igual a ordem com que $G(\xi) = e^{-i\xi} \overline{H(\xi + \pi)}$ se anula em zero.

O número de momentos nulos é também igual à ordem com que a transformada de Fourier $\hat{\psi}(\xi)$ se anula na origem.)

Caracterização de Regularidade local:

$\mathcal{O}(|d_k^j|)$ está associada ao grau de suavidade de f no suporte de ψ_k^j , e ao número de momentos nulos de ψ .

(Seja $p + 1$ o número de momentos nulos de ψ . Se f for uma função com derivada $f^{(s)}$ contínua no suporte de ψ_k^j , $0 \leq s \leq p + 1$, então o coeficiente wavelet $d_k^j = \langle f, \psi_k^j \rangle$ satisfaz a estimativa

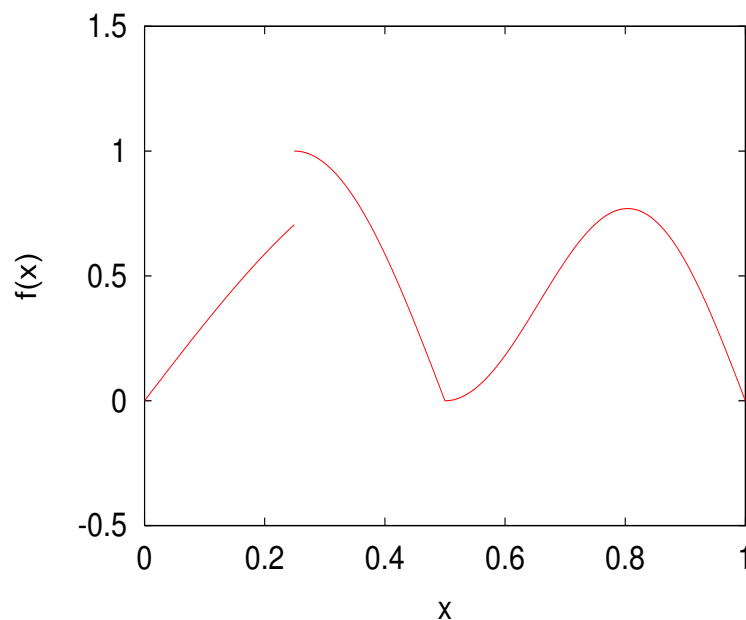
$$|d_k^j| \leq C 2^{-j(s+1/2)} \|f^{(s)}\|_\infty$$

C – constante que depende de ψ e $\|f^{(s)}\|_\infty$ é a norma do máximo de $f^{(s)}$ no suporte de ψ_k^j .)

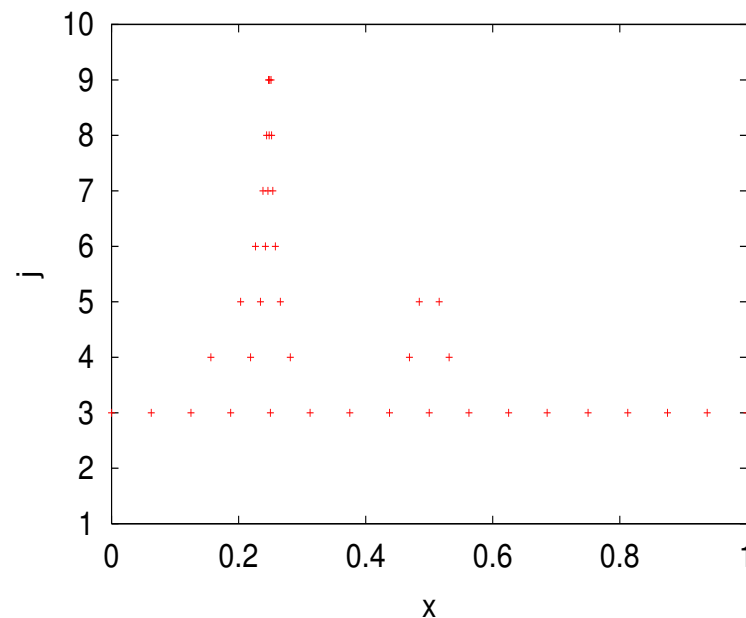
Exemplo

- d_k^j são pequenos em regiões de suavidade
- d_k^j são grandes em regiões com singularidade

Função



Posição dos $|d_k^j| > 10^{-2}$



Localização dos coeficientes wavelets significativos.

Wavelets Biortogonais

Filtros passa baixa $H(\xi)$ e $H^*(\xi)$

Condição de Biortogonalidade

$$H(\xi)\overline{H^*(\xi)} + H(\xi + \pi)\overline{H^*(\xi + \pi)} = 1 \quad \forall \xi$$

- As funções de escalonamento $\phi^*(x - k)$ são ortogonais às wavelets $\psi(x - k)$; As funções de escalonamento $\phi(x - k)$ são ortogonais às wavelets $\psi^*(x - k)$;
- É possível ter simetria ;
- Nos contornos, pode-se usar extensão simétrica;

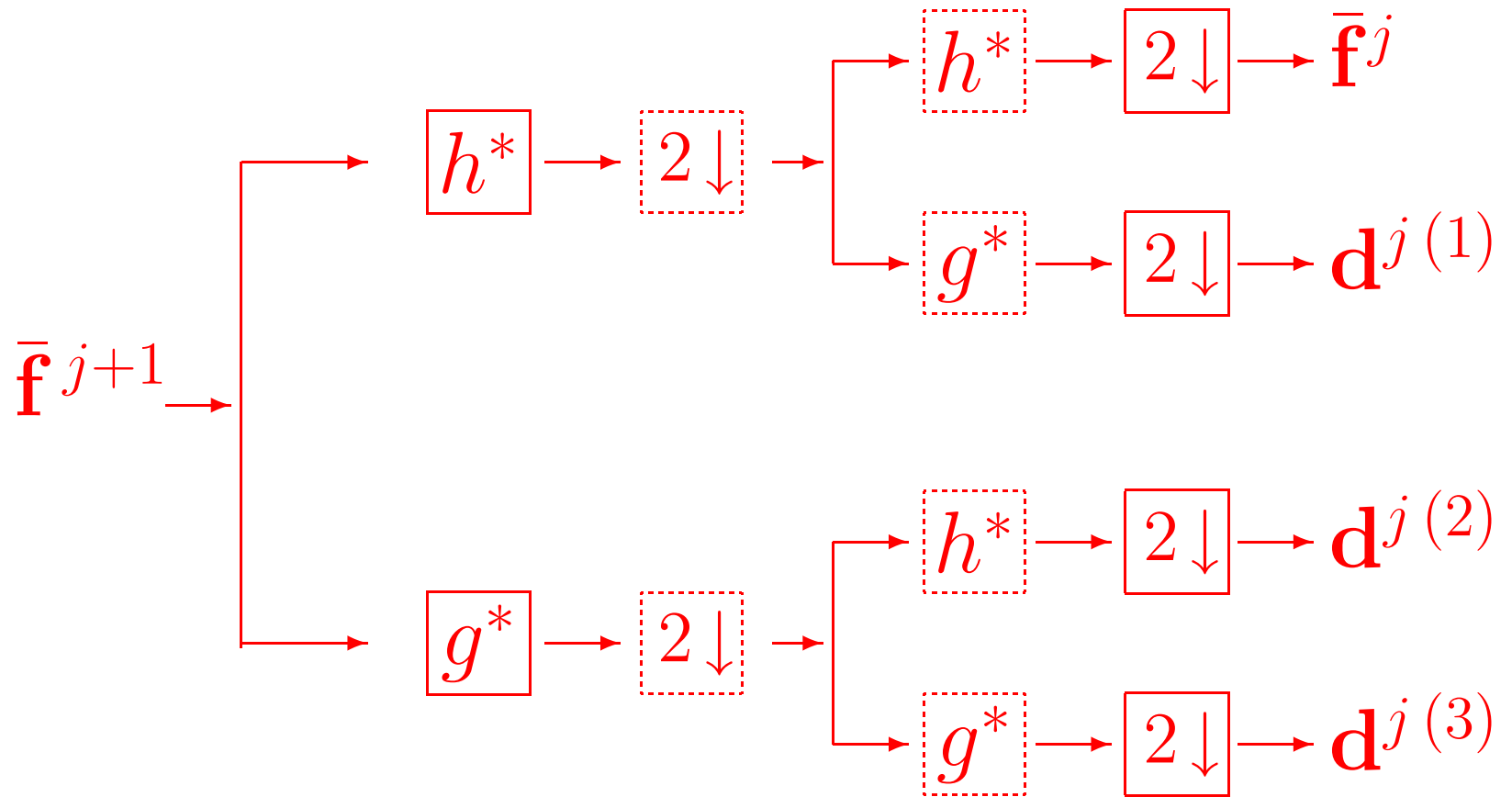
Processamento de Imagens

- Imagem \rightarrow matriz 2D

$$\bar{\mathbf{f}}^{j+1} = (f_{k,\ell}^{j+1})$$

- Os algoritmos de análise e síntese da WT 2D possuem uma estrutura de bancos de filtros similar ao caso 1D.
- As convoluções, *downsampling* e *upsampling* são efetuadas nas linhas e colunas dessa matriz.
- Em 2D existem 3 tipos de coeficientes wavelets.

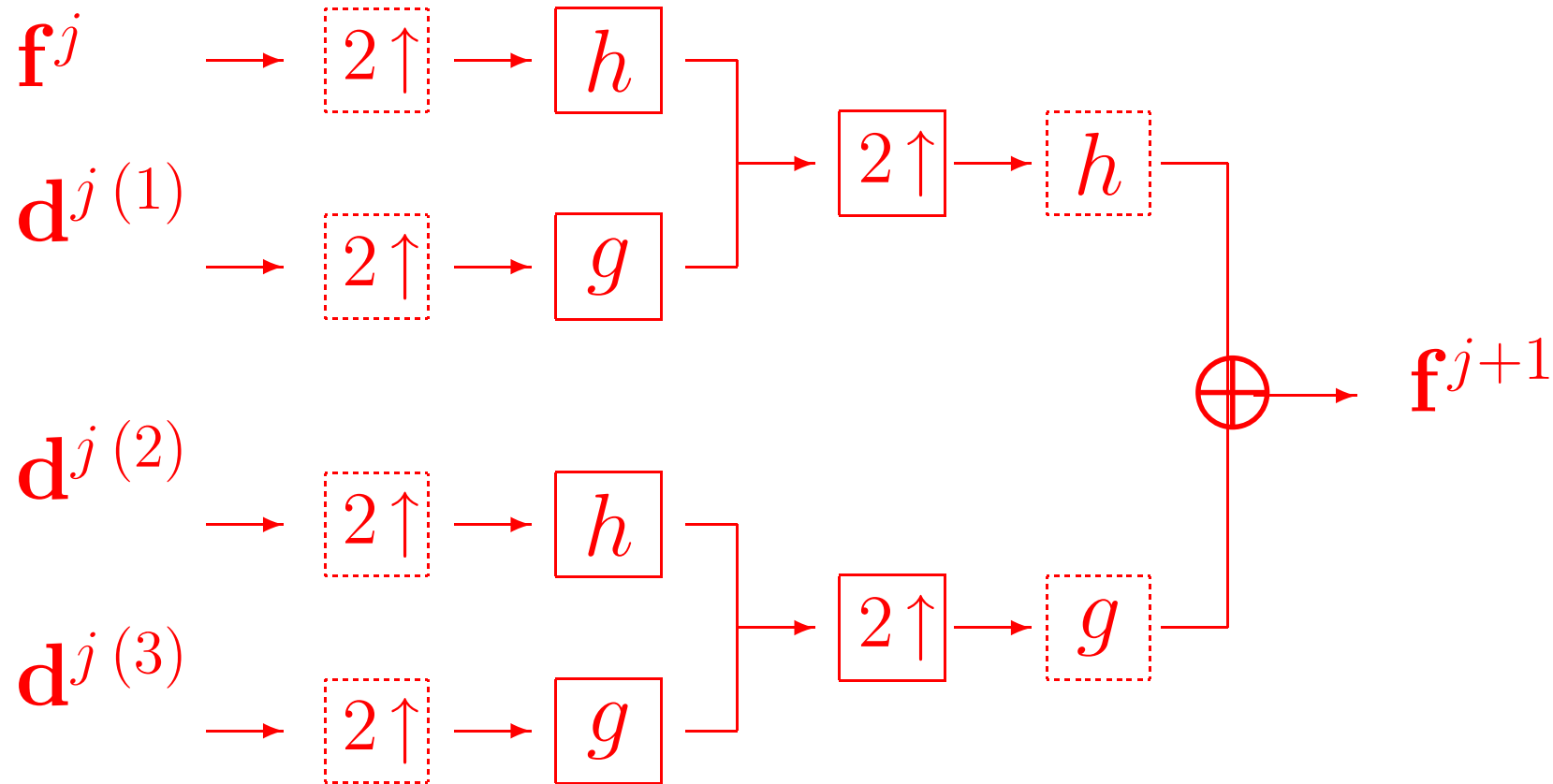
DWT 2D



$2 \downarrow$ downsampling de colunas

$2 \downarrow$ downsampling de linhas

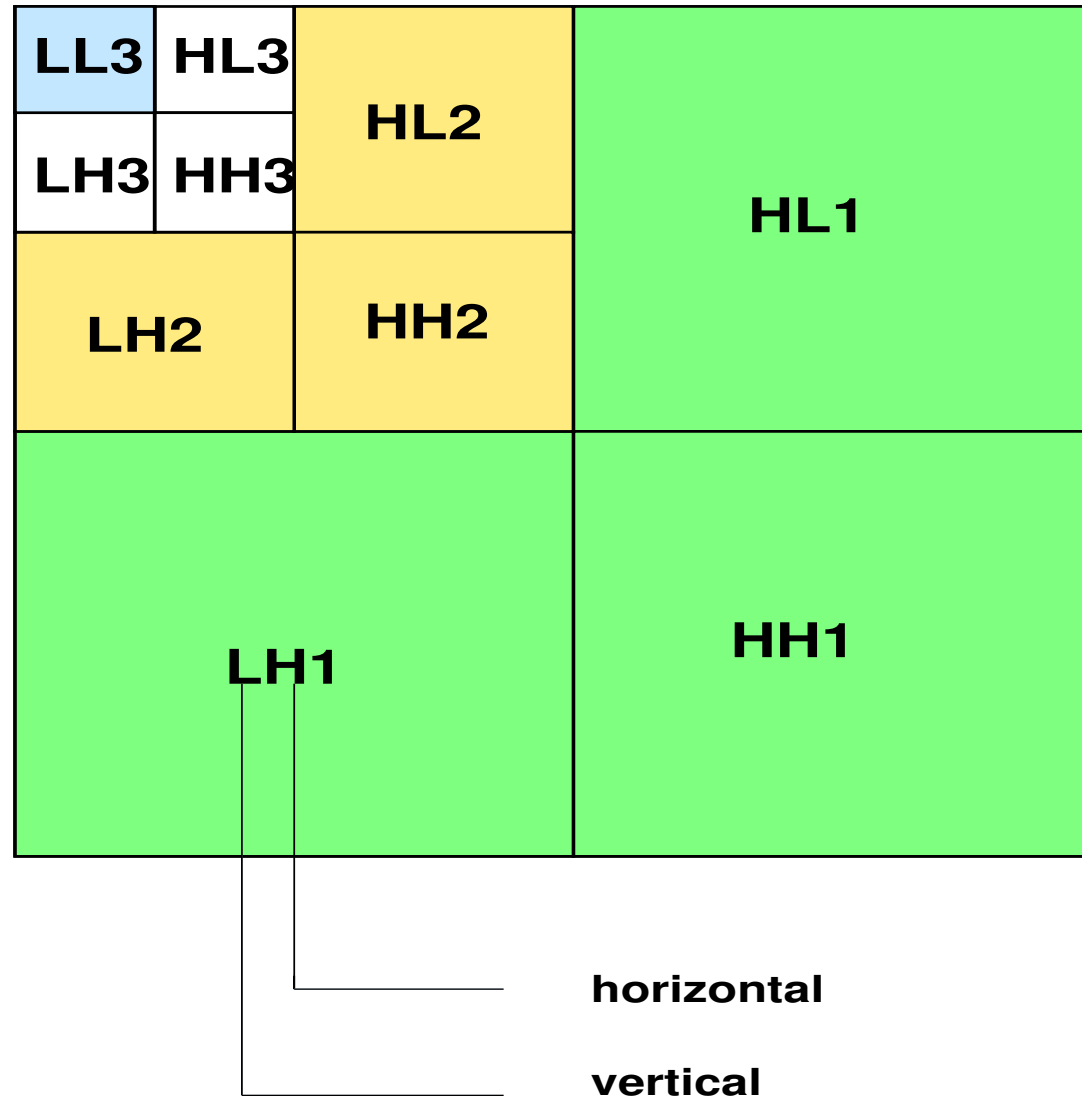
IDWT 2D



$2 \uparrow$ upsampling de colunas

$2 \uparrow$ upsampling de linhas

2D-DWT



Lena



GoldHill



Boats



Mandrill

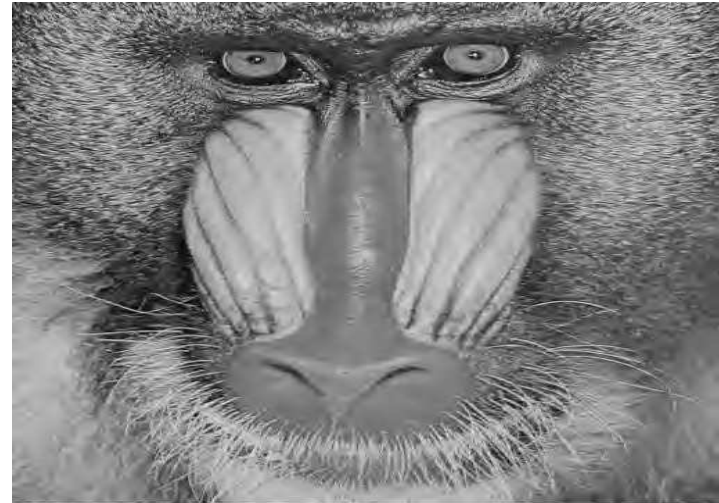


Figure 11.6: These images of $N^2 = 512^2$ pixels are coded with $\bar{R} = 0.5$ bit/pixel, by a wavelet transform coding.

A Wavelet Tour of Signal Processing

Stéphane Mallat, Academic Press 1999 (2nd edition)

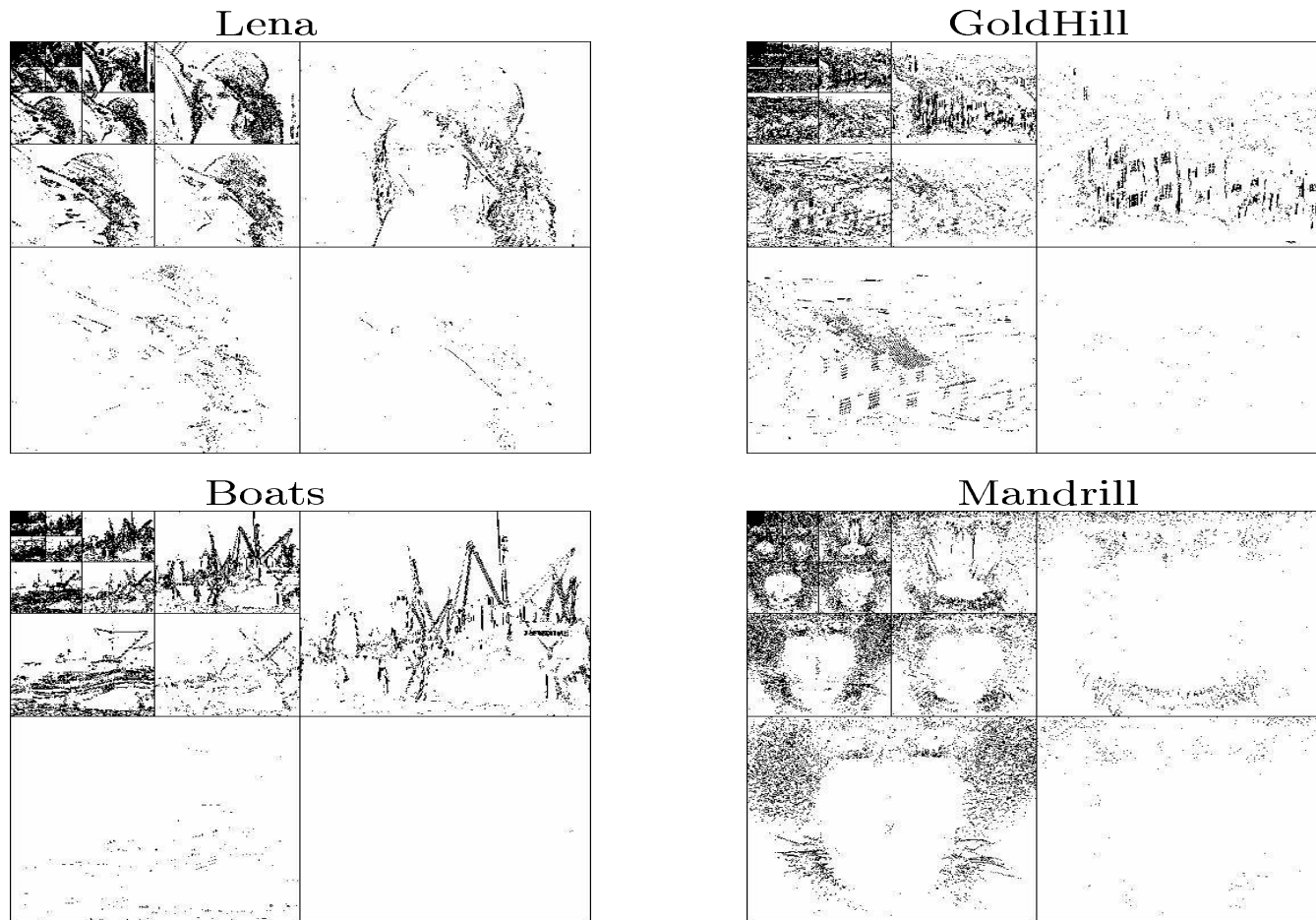


Figure 11.9: Significance map of quantized wavelet coefficients for images coded with $\bar{R} = 0.5$ bit/pixel.

A Wavelet Tour of Signal Processing

Stéphane Mallat, Academic Press 1999 (2nd edition)

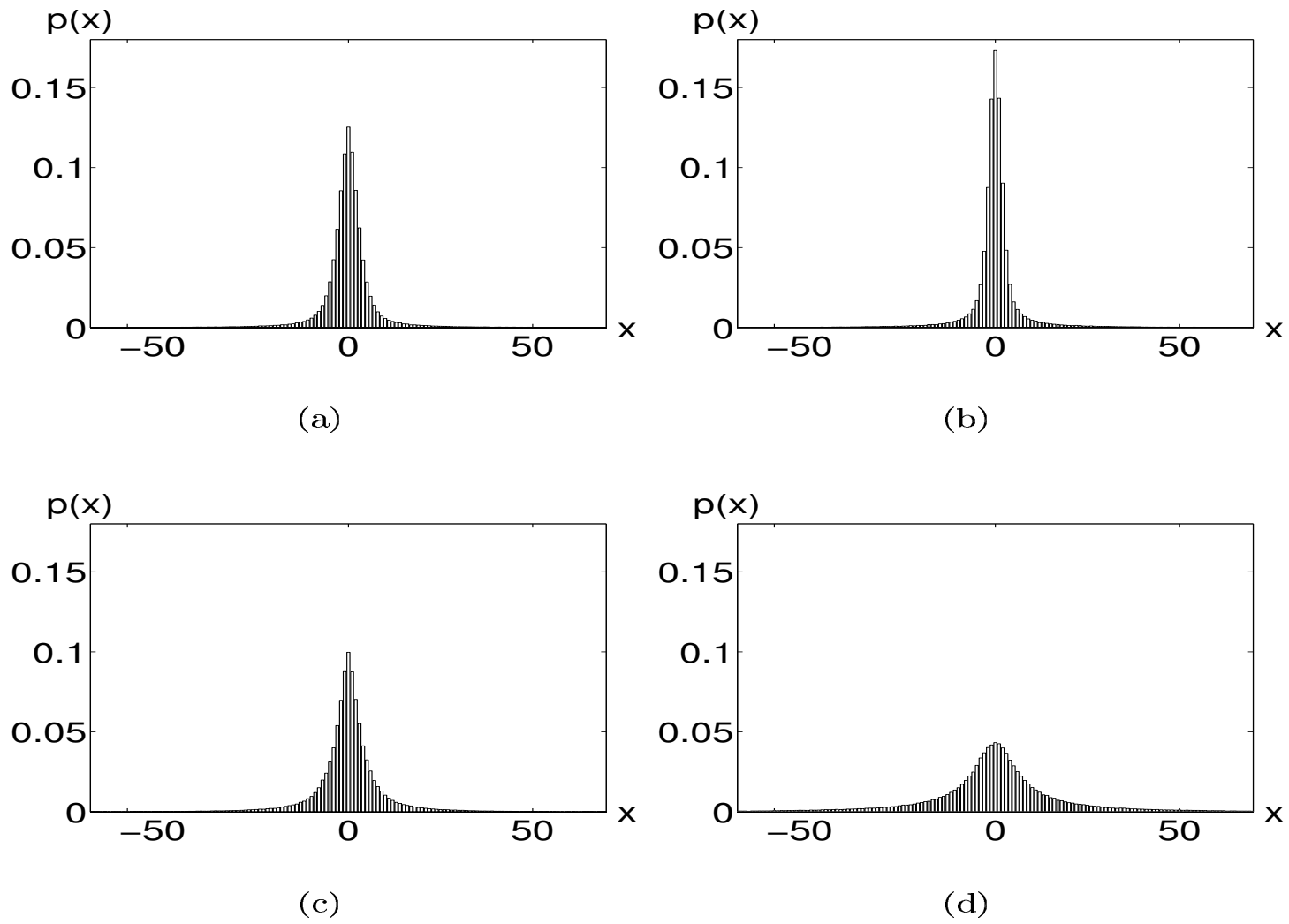


Figure 11.8: Normalized histograms of orthogonal wavelet coefficients for (a) Lena (b) Boats (c) GoldHill (d) Mandrill.

A Wavelet Tour of Signal Processing

Stéphane Mallat, Academic Press 1999 (2nd edition)

0.2 bit/pixel



0.05 bit/pixel



Figure 11.16: Embedded wavelet transform coding.

(a) PSNR = 36.2



34 KB
(a) JPEG

(b) PSNR = 39.2



Taxa de compressão = 20 : 1

(b) JPEG2000

(a) PSNR = 30



12 KB

(a) JPEG

(b) PSNR = 33.6



Taxa de compressão = 60 : 1

(b) JPEG2000

(a) PSNR = 26.5



(b) PSNR = 31.0



8 KB

Taxa de compressão = 100 : 1

(a) JPEG

(b) JPEG2000

Conclusões

Codificação por Transformadas

- JPEG - DCT

Vantagens: baixa complexidade, robusto, eficiente a taxas moderadas de compressão

Desvantagens: resolução única, pouca flexibilidade, efeitos quadriculados, etc

- JPEG2000 - DWT

Vantagens Eficiente mesmo em altas taxas de compressão, multirresolução, permite qualidade progressiva, etc.

- Imagens mais irregulares, impressões digitais, com texturas altamente oscilantes : outras bases são mais apropriadas (wavelet packets, local cosines)