

DETECÇÃO DE SINGULARIDADES E COMPRESSÃO DE DADOS USANDO ANÁLISE DE MULTIRRESOLUÇÃO

Magda K. Kaibara, Sônia Maria Gomes e Margarete O. Domingues

FC/UNESP–Bauru, IMECC/UNICAMP, CPTEC/INPE

Sumário

Motivação

AMR Interpolante 1D

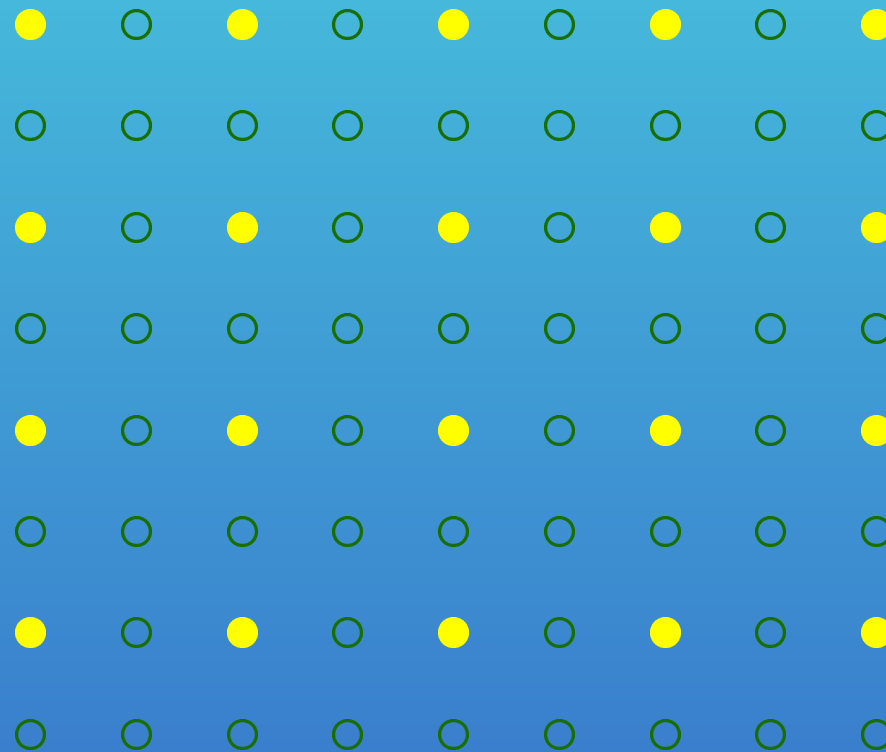
- Aspecto Discreto
 - Esquema de Refinamento Interpolante.
 - Detecção de Singularidades.
 - Compressão de Dados: Redução de Malhas.
 - Estabilidade.
- Aspecto Funcional

AMR Interpolante 2D

- Detecção de Singularidades.
- Compressão de Dados: Redução de Malhas.
- Malhas Regulares por Blocos

AMR Interpolante 2D

Pontos de uma malha $\mathcal{X}^{\ell+1}$



● \rightarrow pontos de \mathcal{X}^{ℓ}

○ \rightarrow pontos de $\mathcal{X}^{\ell+1} \setminus \mathcal{X}^{\ell}$

🟡 valores pontuais: $f_{k,m}^\ell = f(x_k^\ell, y_m^\ell)$

🟡 malhas diádicas: \mathcal{X}^ℓ

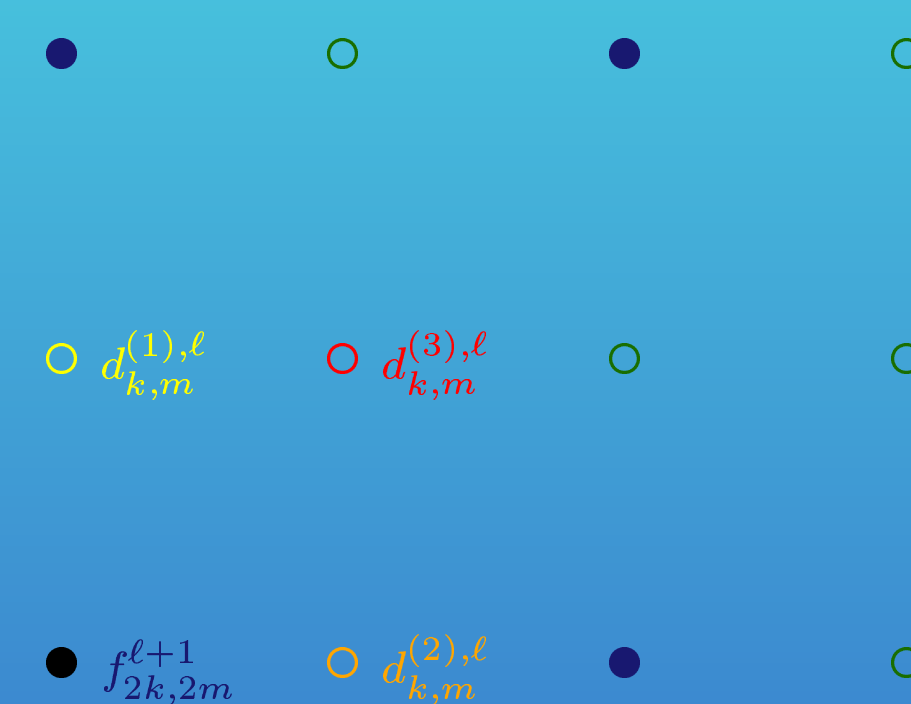
$$\{(x_k^\ell, y_m^\ell) = (kh_x^\ell, mh_y^\ell) \in I \times I\}$$

🟡 $\mathcal{X}^\ell \subset \mathcal{X}^{\ell+1}$

Os pontos $(x_k^\ell, y_m^\ell) \in \mathcal{X}^\ell$ passam a ser os pontos $(x_{2k}^{\ell+1}, y_{2m}^{\ell+1})$ da malha mais refinada $\mathcal{X}^{\ell+1}$

$$f_{2k,2m}^{\ell+1} = f_{k,m}^\ell$$

Coeficientes wavelets



$\circ \rightarrow$ as posições associadas aos coeficientes wavelet.

$d_{s,q}^{(\alpha)\ell}$: são dados pelas diferenças entre os valores de f nos pontos de $\mathcal{X}^{\ell+1} \setminus \mathcal{X}^{\ell}$ e aqueles obtidos por interpolação a partir dos valores de f em \mathcal{X}^{ℓ} .

Análise

$$f^{j+1} \xrightarrow{WT} (f^{j_0}, d^{(1,2,3)j_0}, \dots, d^{(1,2,3),j})$$

- Para $\ell = j, j-1, \dots, j_0$
- Para $k = 1, \dots, N_x^\ell$
- Para $m = 1, \dots, N_y^\ell$

$$f_{k,m}^\ell = f_{2k,2m}^{\ell+1}$$

$$d_{k,m}^{(1)\ell} = f_{2k,2m+1}^{\ell+1} - \tilde{f}_{2k,2m+1}^{\ell+1}$$

$$d_{k,m}^{(2)\ell} = f_{2k+1,2m}^{\ell+1} - \tilde{f}_{2k+1,2m}^{\ell+1}$$

$$d_{k,m}^{(3)\ell} = f_{2k+1,2m+1}^{\ell+1} - \tilde{f}_{2k+1,2m+1}^{\ell+1}$$

Síntese

$$(f^{j_0}, d^{(1,2,3)j_0}, \dots, d^{(1,2,3)j}) \xrightarrow{IWT} f^{j+1}$$

- Para $\ell = j_0, \dots, j$
- Para $k = 1, \dots, N_x^\ell$
- Para $m = 1, \dots, N_y^\ell$

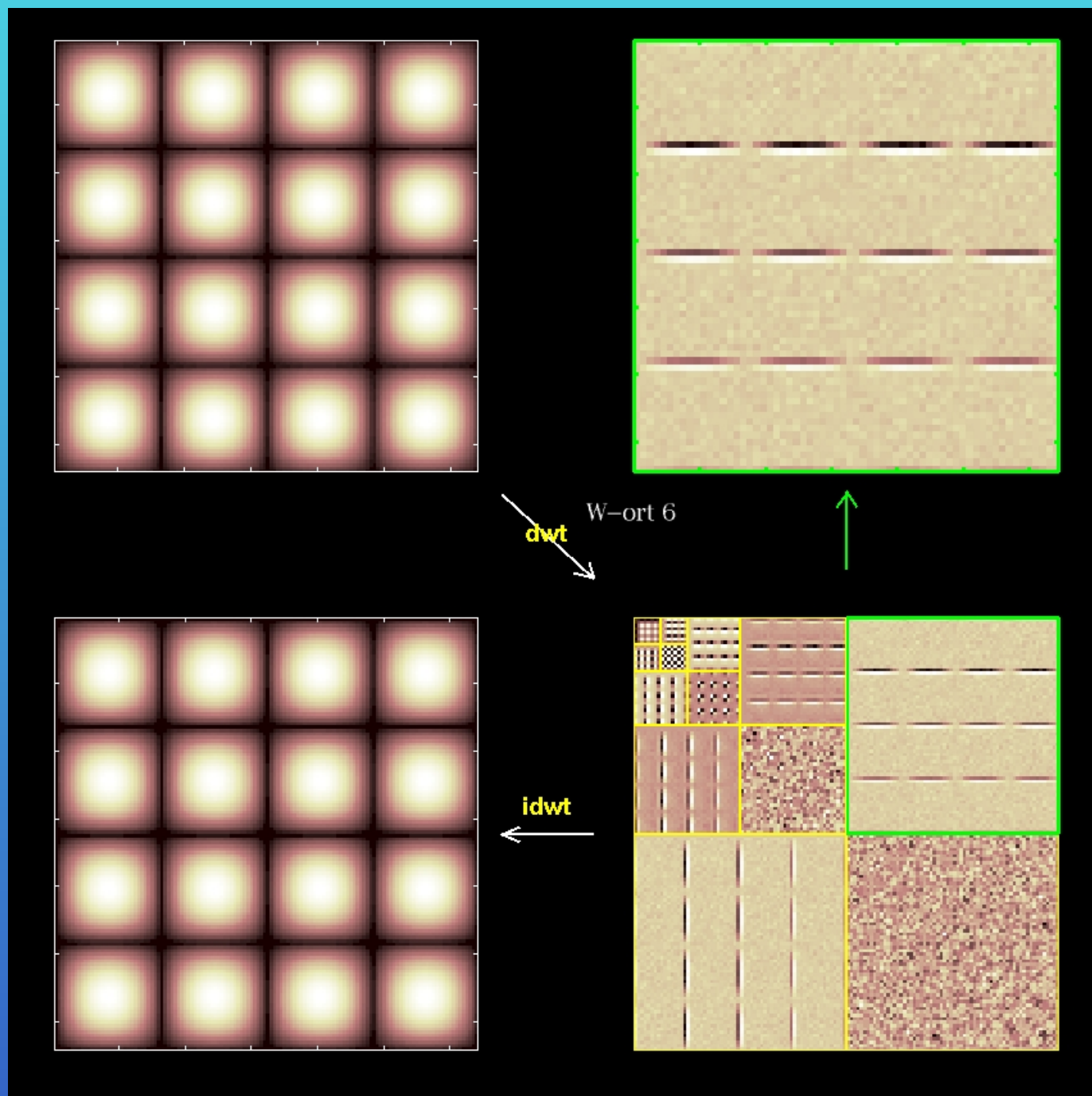
$$f_{2k,2m}^{\ell+1} = f_k^\ell$$

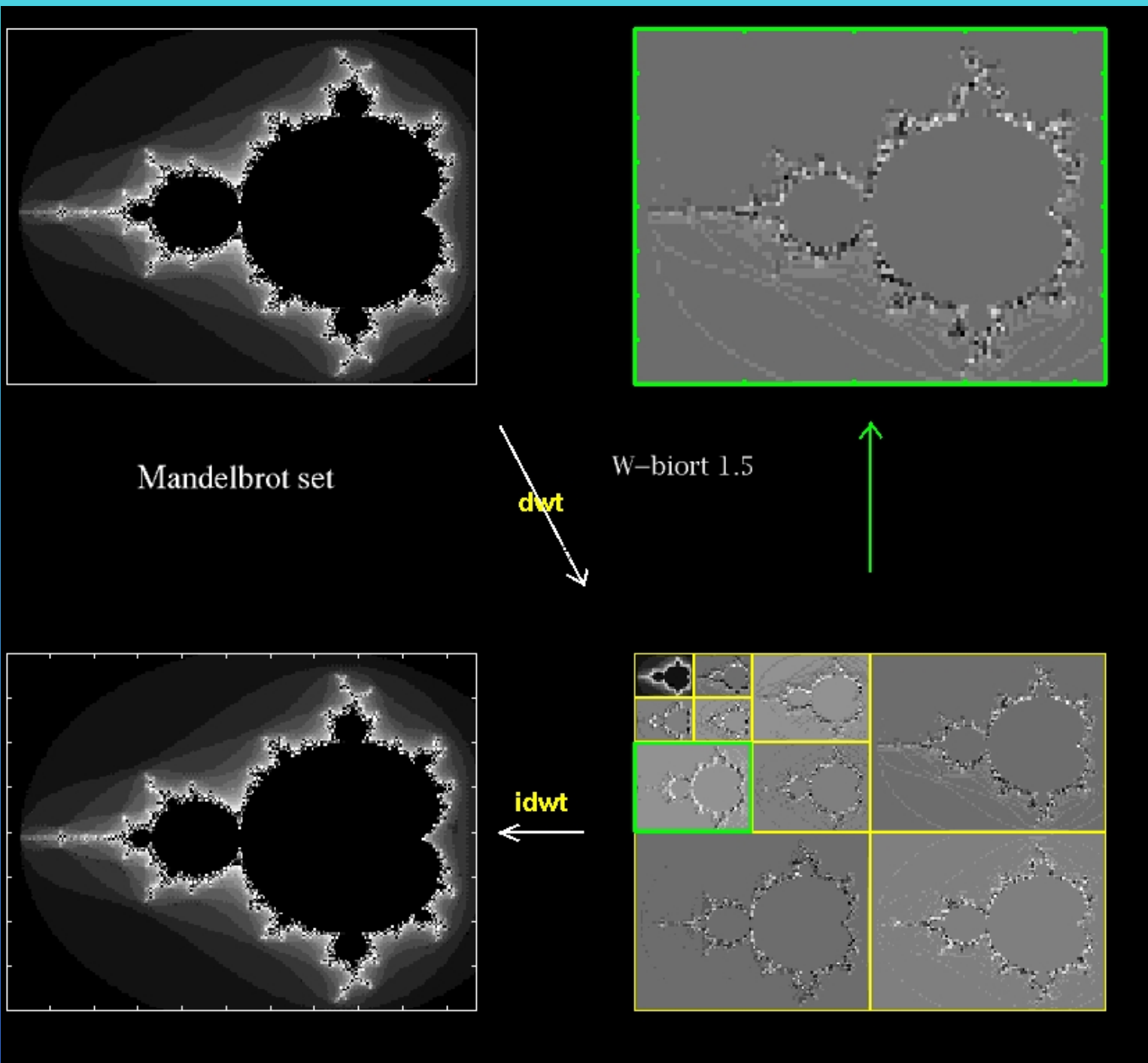
$$f_{2k,2m+1}^{\ell+1} = d_{k,m}^{(1)\ell} + \tilde{f}_{2k,2m+1}^{\ell+1}$$

$$f_{2k+1,2m}^{\ell+1} = d_{k,m}^{(2)\ell} + \tilde{f}_{2k+1,2m}^{\ell+1}$$


$$f_{2k+1,2m+1}^{\ell+1} = d_{k,m}^{(3)\ell} + \tilde{f}_{2k+1,2m+1}^{\ell+1}$$

Exemplos







Refinamento interpolante $\tilde{f}^{\ell+1} = \mathcal{P}_\ell^{\ell+1} f^\ell$

 $\tilde{f}_{2k,2m}^{\ell+1} = f_{k,m}^\ell$

 $\tilde{f}_{2k,2m+1}^{\ell+1} = \sum_q f_{k,q}^\ell c_q$
refinamento na direção **y** (referente ao índice q).

 $\tilde{f}_{2k+1,2m}^{\ell+1} = \sum_s f_{s,m}^\ell c_s$
refinamento unidimensional na direção **x** (referente ao índice s).

 $\tilde{f}_{2k+1,2m+1}^{\ell+1} = \sum_s \sum_q f_{s,q}^\ell c_s c_q$
refinamento na direção **x** (índice s) e a seguir na direção **y** (índice q)

Análise Local de Regularidade

- Coeficientes wavelet \leftrightarrow erro de interpolação polinomial, estimativas análogas ao do caso 1D podem ser obtidas para o caso 2D.
- $d_k^{(\alpha)\ell} \rightarrow$ indicadores da regularidade local de uma função.
- A caracterização de regularidade local em termos de coeficientes wavelet & representações compactas de funções.
- Da mesma forma que o caso 1D pode-se compactar funções 2D zerando-se os coeficientes wavelets cujo módulo for menor que um certo parametro de truncamento.

Exemplos

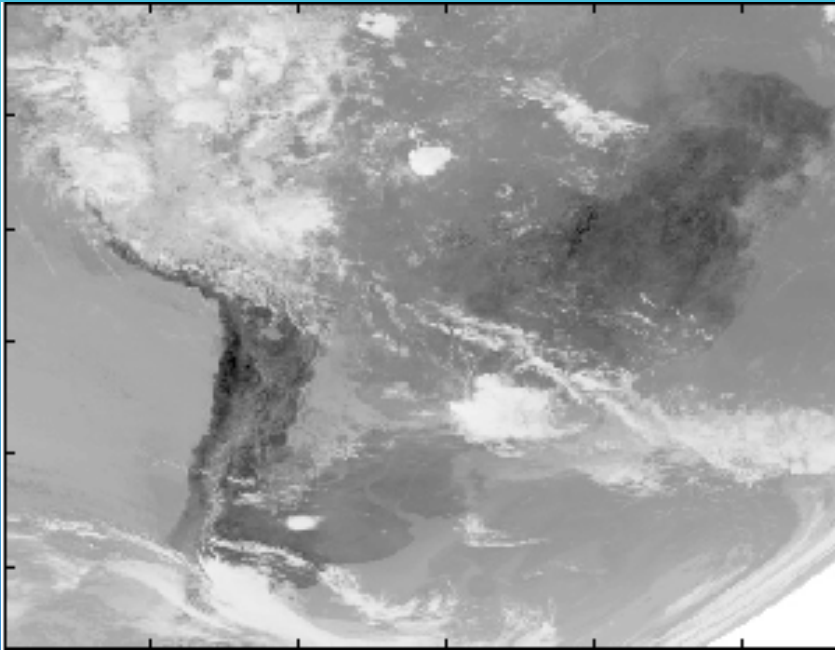


Imagem original

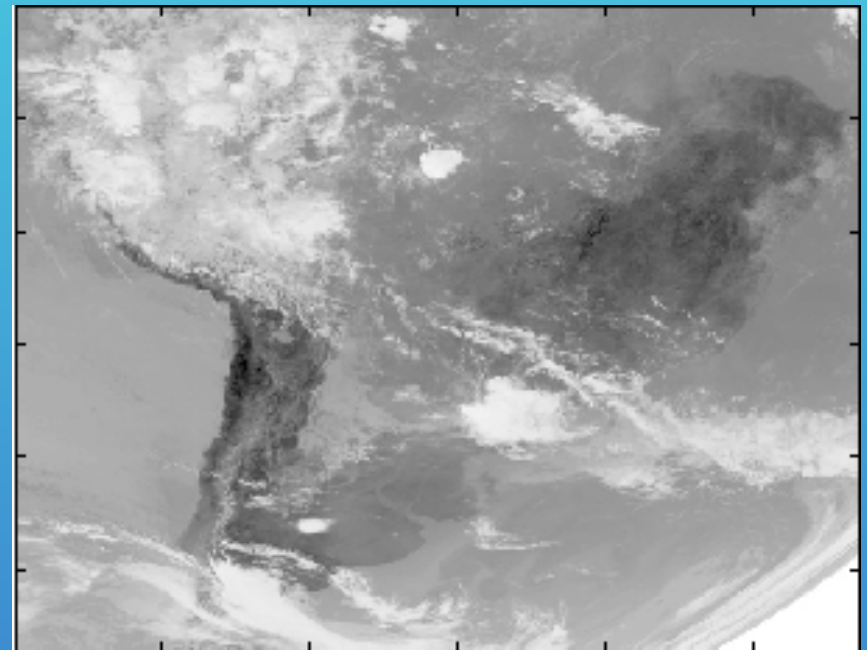
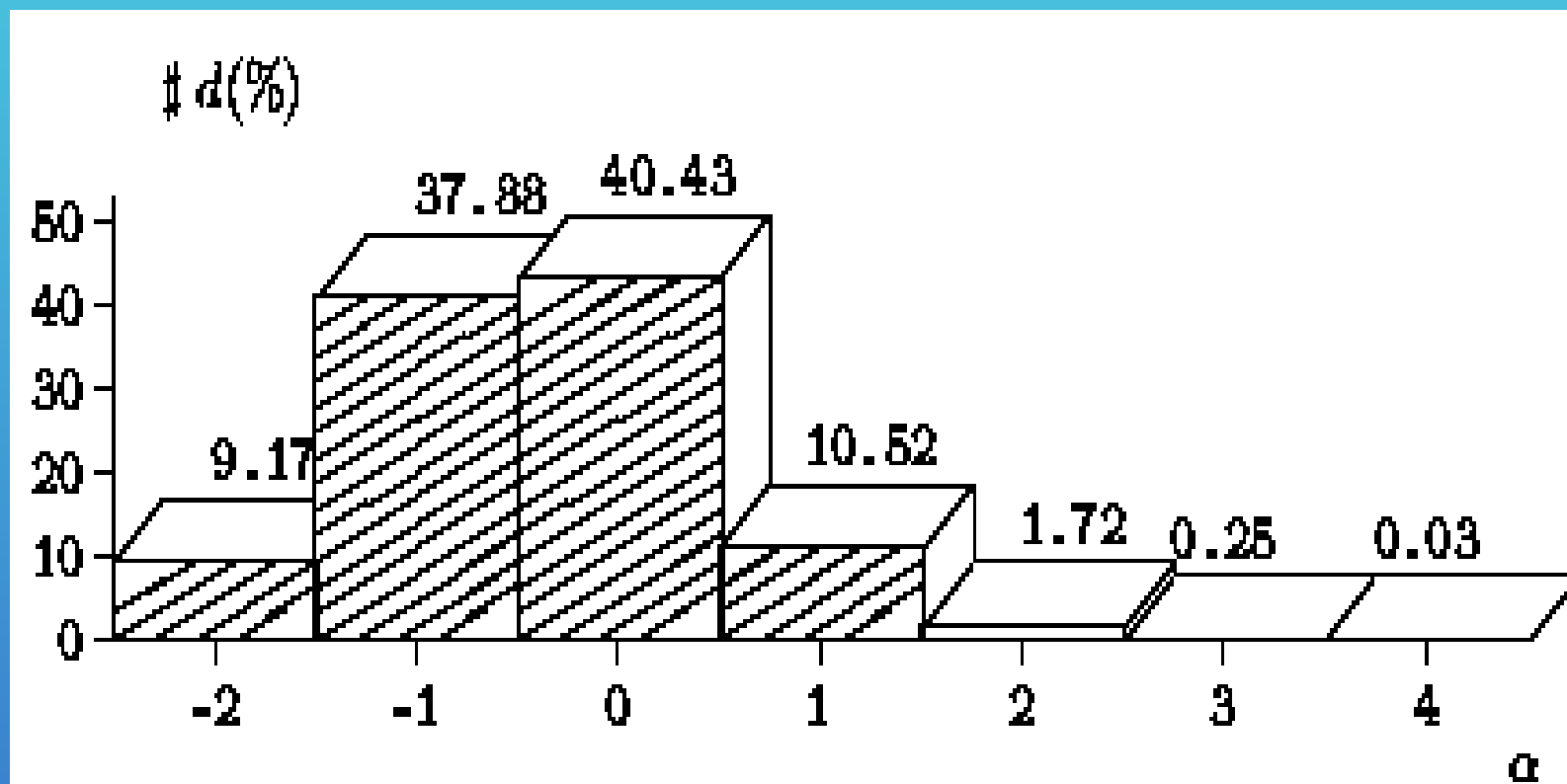
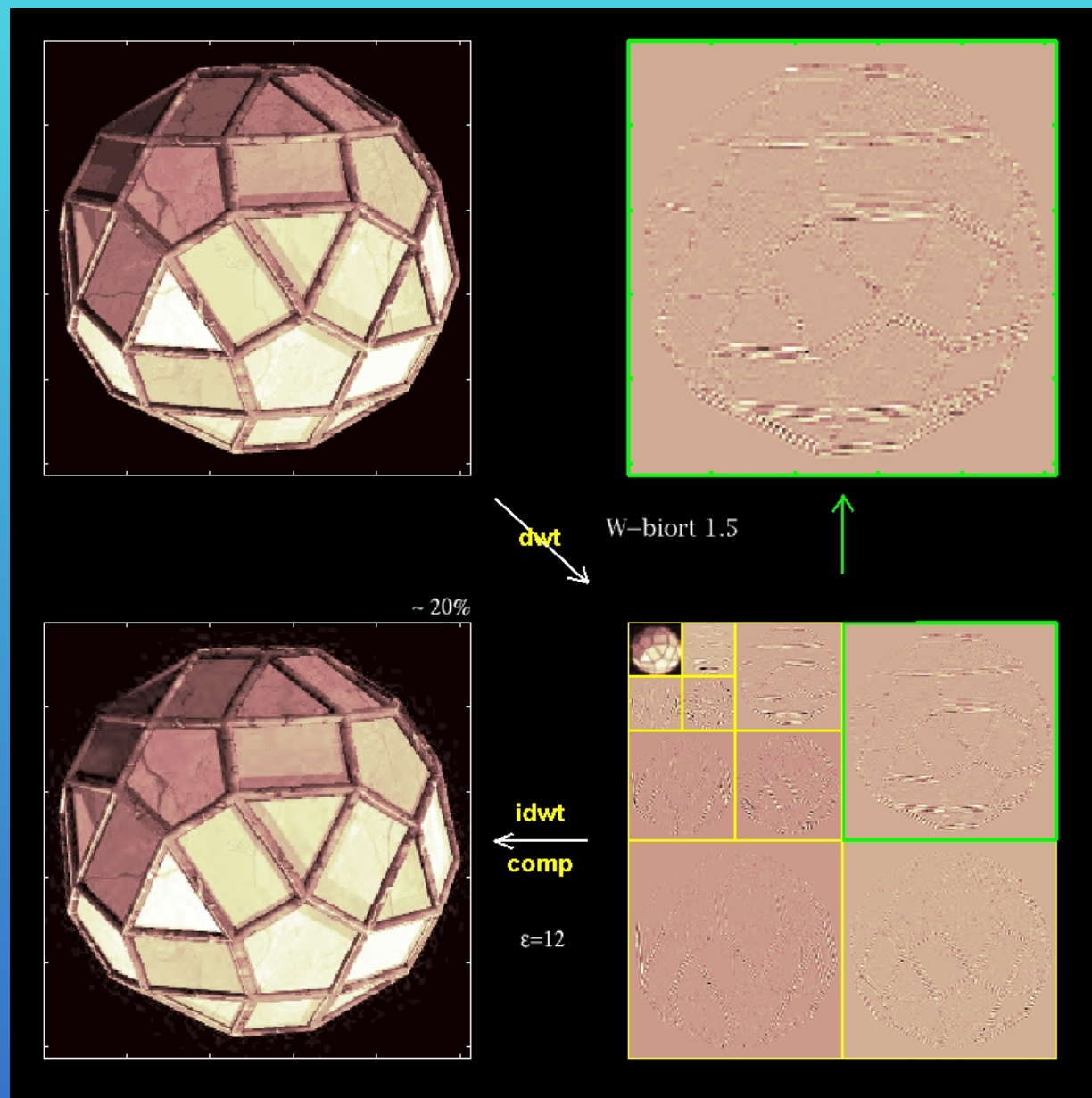
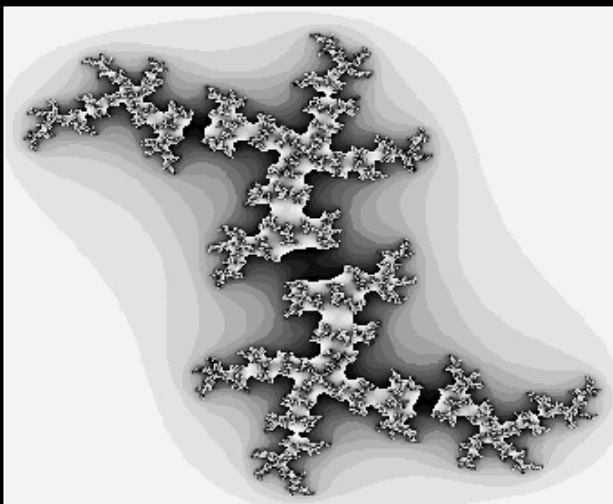


Imagem reconstruída
 $\approx 2\%$



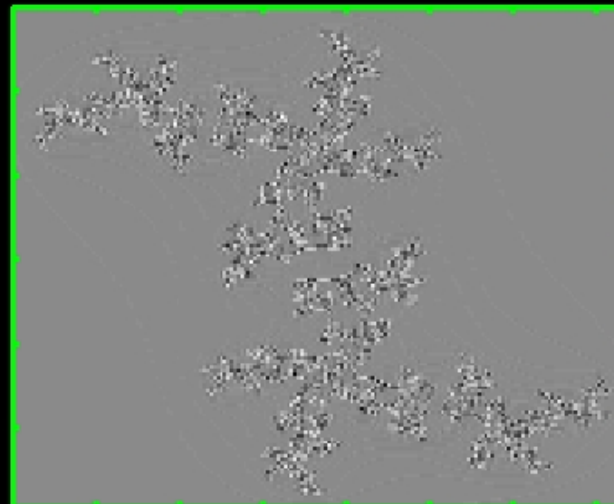
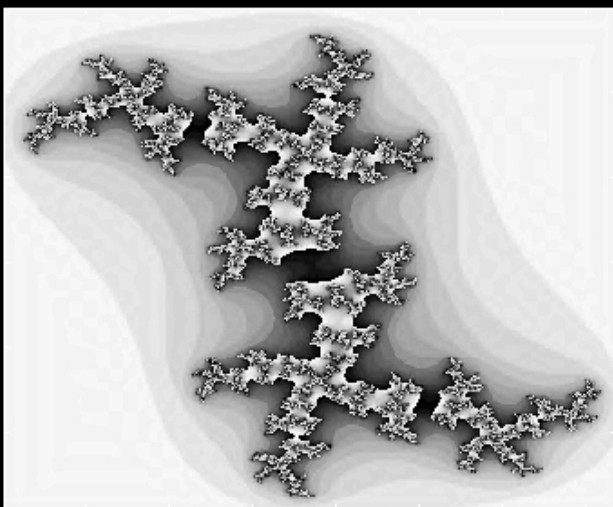
(Distribuição dos coeficientes wavelet de acordo com sua ordem de magnitude $\epsilon = 10^\alpha$)





Julia set

~ 20%



W-biort 2.6

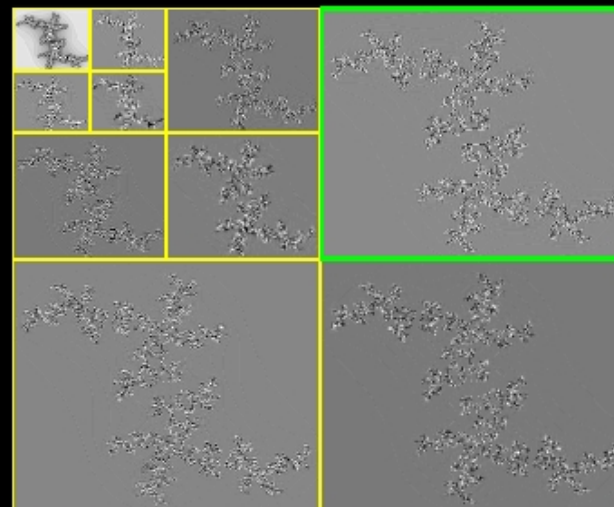
dwt



idwt

comp

$\epsilon=3$



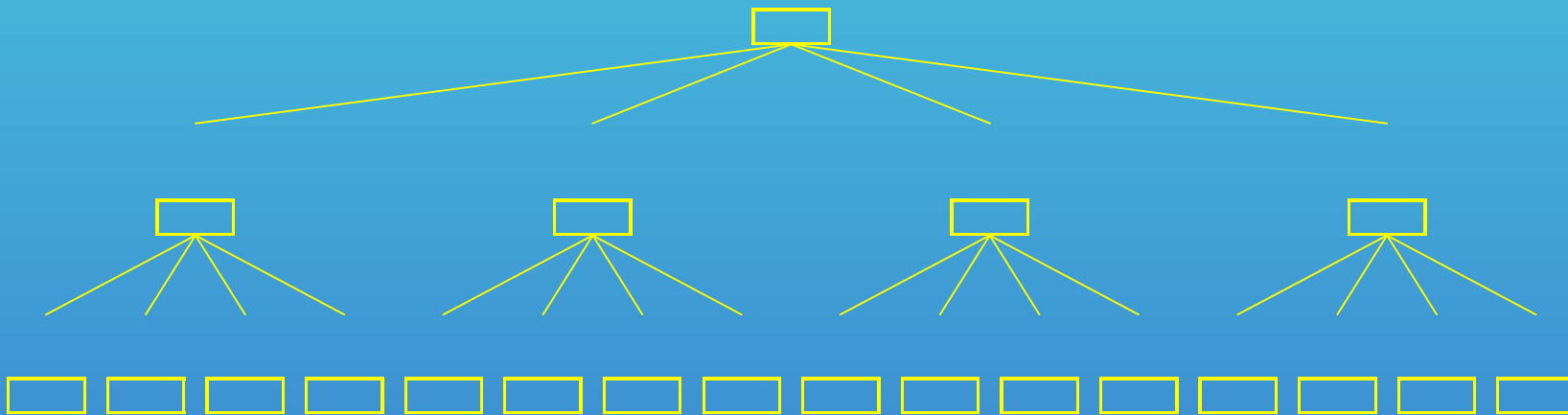
Armazenamento & busca

- A **topologia** das malhas irregulares 2D não é tão simples de ser tratada, podendo aumentar bastante a complexidade de **armazenamento** e de **busca**.
- Por isso quando se necessita de um equilíbrio **armazenamento/busca** é preferível lidar com malhas que sejam **localmente regulares**.
- Malhas regulares por blocos possuem tais características. Para ilustrar a construção dessas malhas os conceitos de estrutura de árvores quaternárias serão introduzidos.

Árvores & Malhas

(Principais características)

Árvores



Interesse: Árvores quaternária completa e incompleta

Nomenclatura: raiz, mãe, filhos, folhas,

Estrutura de Árvores & Malhas

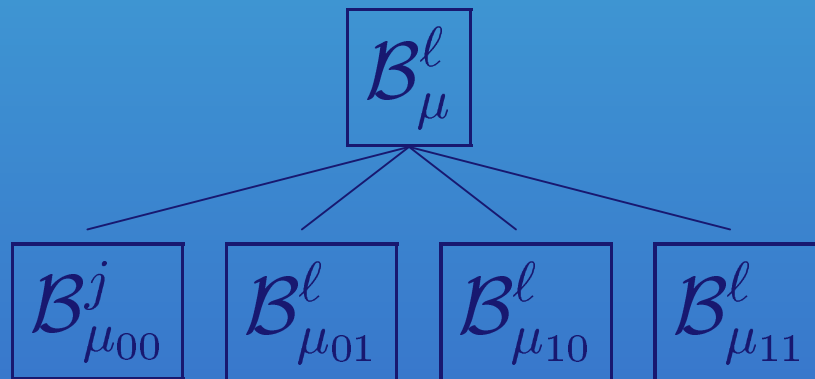
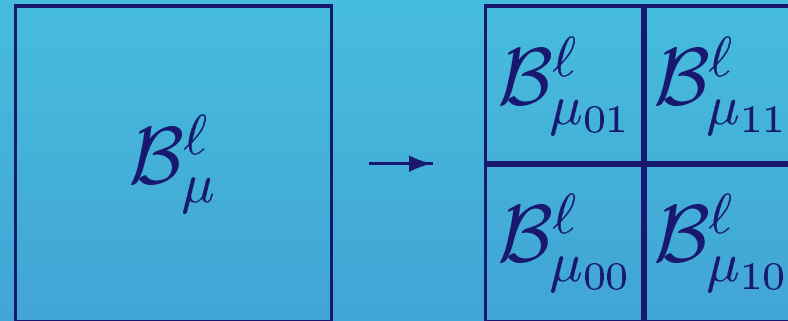
- \mathcal{X}^ℓ – malhas regulares diádicas 2D
- $\mathcal{B}_\mu^\ell \subset \mathcal{X}^\ell$ – blocos de malhas regulares , com $N_x \times N_y$ pontos

$$\mathcal{B}_\mu^\ell = \{ \gamma = \mu + (kh_x^\ell, \ell h_y^\ell) \} ,$$

$$0 \leq k < N_x, \quad 0 \leq \ell < N_y$$

- μ – extremo inferior esquerdo de \mathcal{B}_μ^ℓ é chamado de ponto diretor,
- ℓ – nível de escala do bloco.

Exemplo de árvore & blocos



$$\mathcal{B}_\mu^\ell \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{B}_\mu^\ell) = \{\mathcal{B}_{\mu 00}^{\ell+1}, \mathcal{B}_{\mu 01}^{\ell+1}, \mathcal{B}_{\mu 10}^{\ell+1}, \mathcal{B}_{\mu 11}^{\ell+1}\}.$$

Geração de malhas regulares por blocos

- $\mathcal{B}_{(0,0)}^0 = \mathcal{X}^0$ – raiz
- Após j gerações temos uma árvore quaternária completa de $j + 1$ níveis.
- Em cada nível $0 \leq \ell \leq j$ existem $2^{2\ell}$ blocos (nós), cujos pontos diretores integram um conjunto que denominamos \mathcal{I}^ℓ .

\mathcal{B}_μ^j – folhas do último nível de uma árvore completa de $j + 1$ níveis, cuja união forma a malha regular mais fina.

$$\mathcal{X}^j = \bigcup_{\mu \in \mathcal{I}^j} \mathcal{B}_\mu^j$$

Malhas Adaptáveis Regulares por Blocos

(Utilizando a dwt como dectectoras de singularidades)

- Idéia: permitir a representação de funções suaves, com irregularidades localizadas, de uma forma mais econômica em malhas localmente regulares por blocos.
- Ingrediente fundamental: indicador $\iota_\epsilon(\mathcal{B})$ que testa se um determinado bloco será ou não refinado. Ele é caracterizado por um esquema de multirresolução interpolante e por um parâmetro ϵ de truncamento dos coeficientes wavelet, escolhidos a priori.

Indicador de Refinamento

- \mathcal{B} – bloco no nível ℓ
- $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ – indica o conjunto de todos os coeficientes wavelet associados aos pontos novos de seu refinamento.
- Se todos os coeficientes wavelet $d_{k,\ell}^{(\alpha)} \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$ tiverem módulo menor do que o valor de truncamento ϵ , então definimos $\iota_\epsilon(\mathcal{B}) = 0$. Caso contrário, definimos $\iota_\epsilon(\mathcal{B}) = 1$.

Construção de \mathcal{M}_ϵ

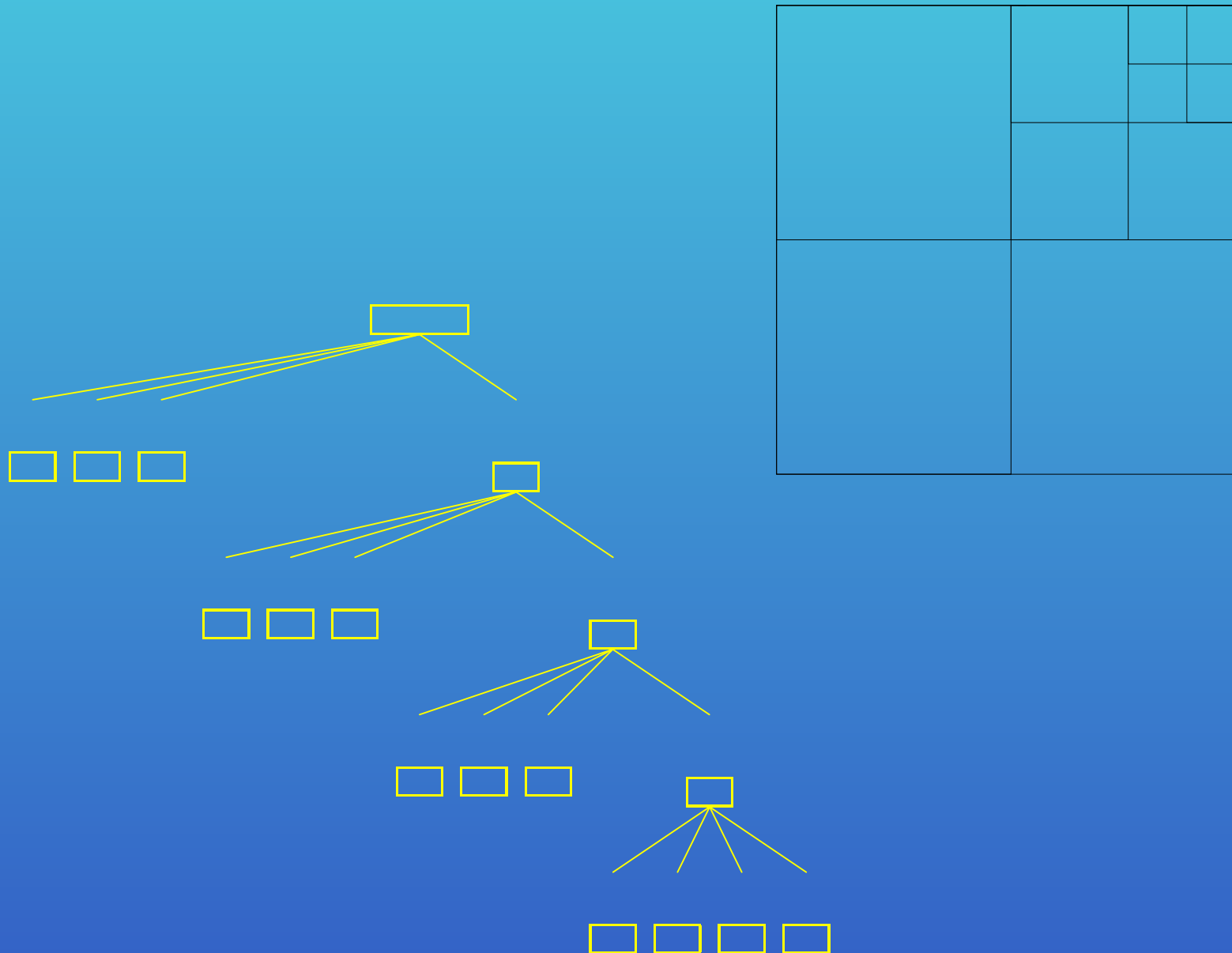
■ bloco raiz: $\mathcal{B} = \mathcal{X}^{j_0}$ - considera-se $\iota_\epsilon(\mathcal{B}) = 1$.

■ Cálculo ι_ϵ dos filhos

- Se o indicador for nulo em todos os quatro filhos, então o bloco \mathcal{B} é considerado folha e é integrado à \mathcal{M} .
- Caso contrário, apenas são considerados folha, e integrados à malha, aqueles blocos filhos com indicador nulo. Nos demais blocos, com indicador igual a um, repetimos o processo de teste até alcançar um nível em que todos os blocos são considerados folha.

Obs.: Na prática pode ser necessário antecipar a interrupção desta construção devido a limitações físicas da máquina. Estabelece-se um número máximo de blocos presentes na malha.

Exemplo: Árvore & Malha Regular por Blocos



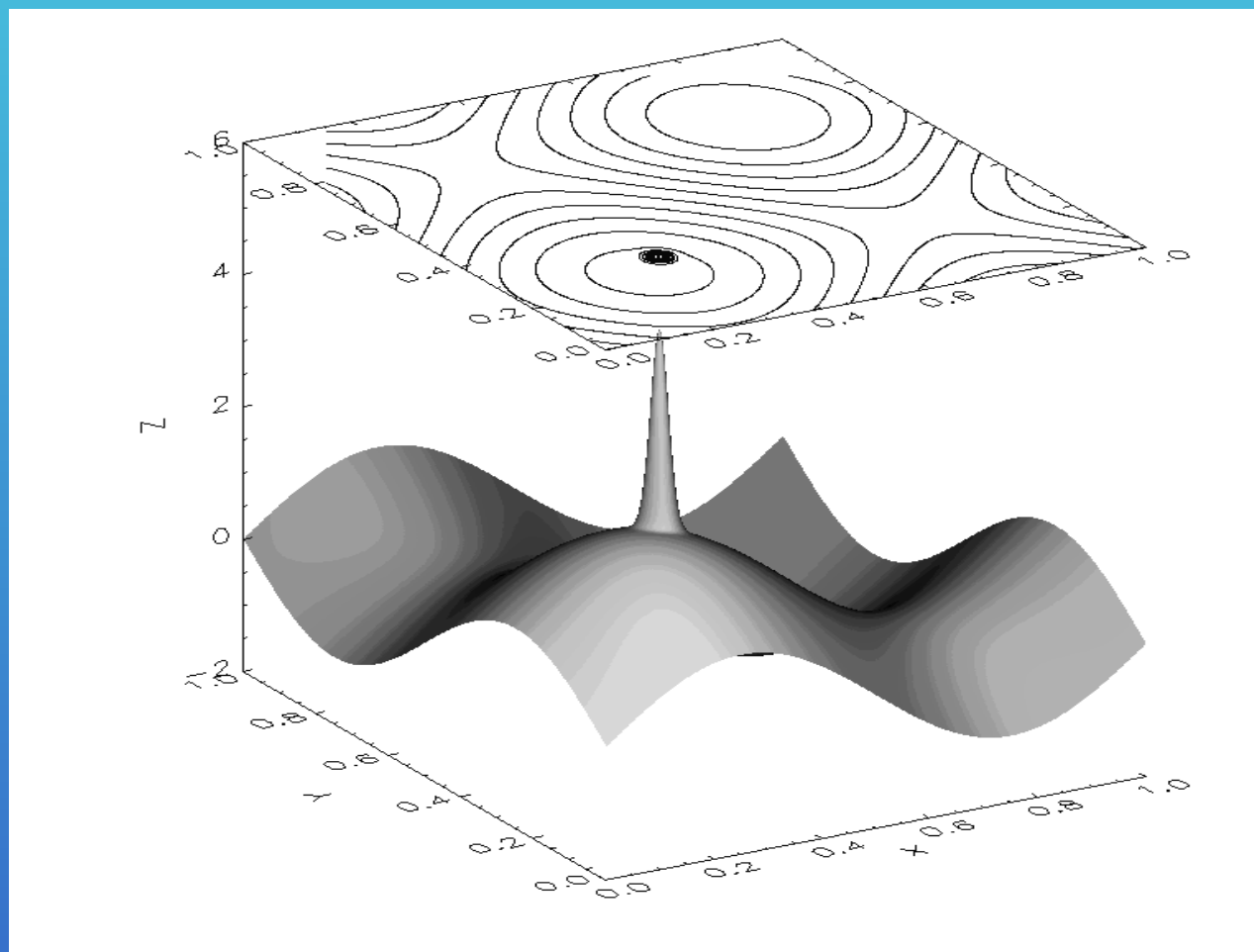
Exemplo

Função tipo *pulso*

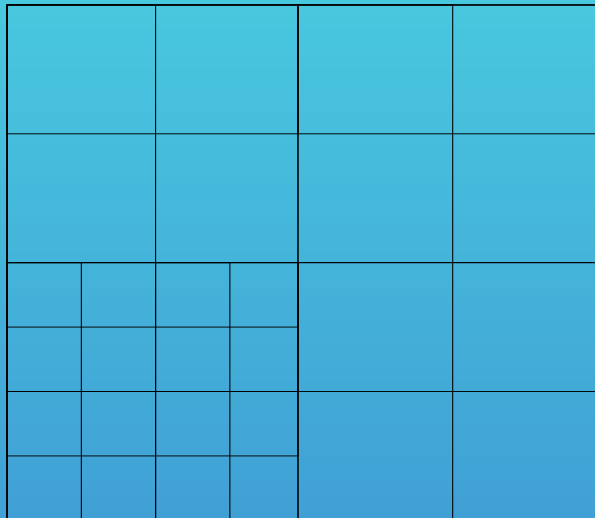
$$f(x, y) = 3 \exp^{-2500((x-0.3)^2 + (y-0.3)^2)} + \sin(2\pi x) + \sin(2\pi y)$$

- 🟡 A função tem uma singularidade localizada em torno do ponto $(0.3, 0.3)$.
- 🟡 Os blocos utilizados possuem $N_x = N_y = 32$ e $M = 4$.

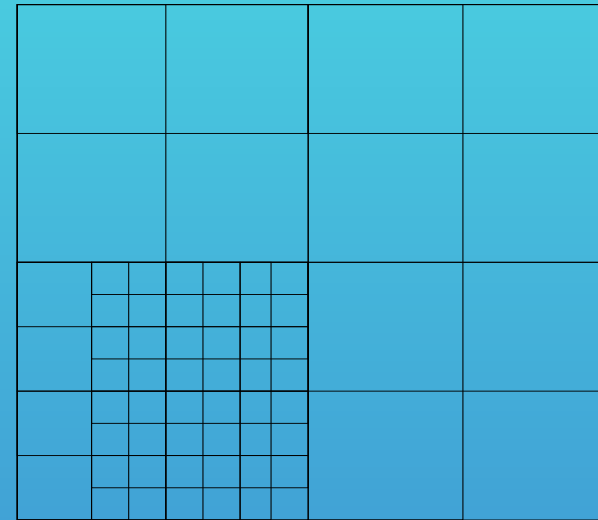
Função tipo *pulso*



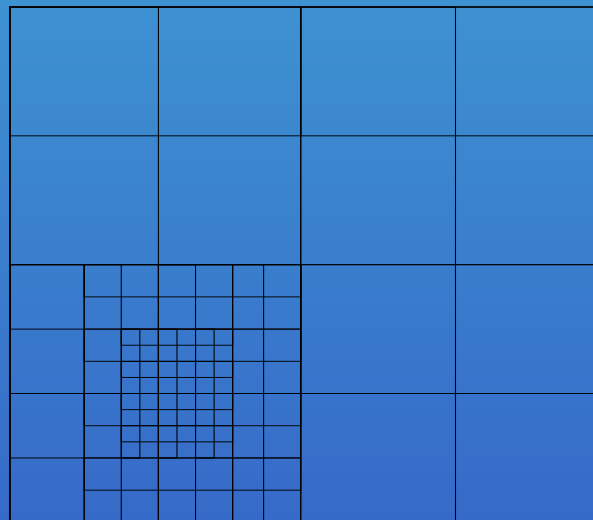
$\mathcal{M}_{10^{-3}}$, 28 blocos



$\mathcal{M}_{10^{-4}}$, 64 blocos



$\mathcal{M}_{10^{-5}}$, 100 blocos



Armazenagem em Malhas \mathcal{M}_ϵ

ϵ	Nro de Blocos	$\#(\mathcal{M}_\epsilon)$	$\#(\mathcal{X}^{\ell_{\max}})$	$\#(\mathcal{M}_\epsilon)/\#(\mathcal{X}^{\ell_{\max}})$
10^{-5}	100	102400	2097152	0.05
10^{-4}	64	65536	262144	0.25
10^{-3}	28	28672	65536	0.43

A Tabela mostra a economia de pontos alcançada em cada representação adaptável, comparada com a representação em $\mathcal{X}^{\ell_{\max}}$ correspondente ao nível mais refinado atingido ℓ_{\max} .

- 🟡 O número de blocos aumenta à medida que ϵ diminui.
- 🟡 A proporção $\#(\mathcal{M}_\epsilon)/\#(\mathcal{X}^{\ell_{\max}})$, diminui drasticamente com a redução de ϵ .

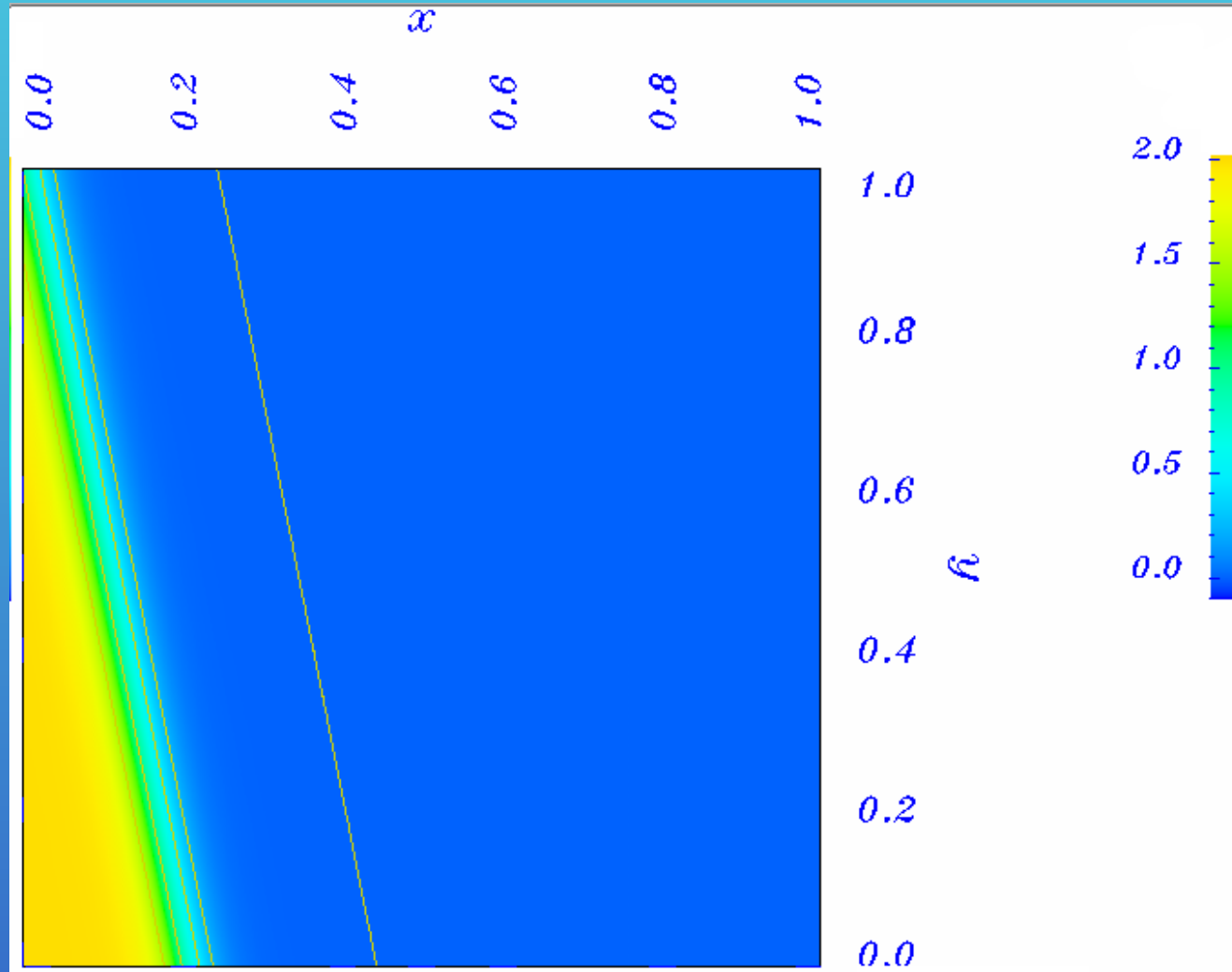
Exemplo

Função frente oblíqua

$$f(x, y) = 1 - \tanh(25x + 5(y - 1))$$

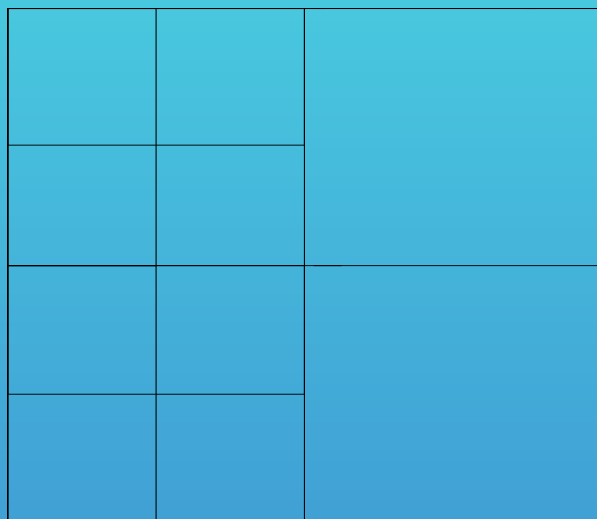
- Os blocos utilizados possuem $N_x = N_y = 32$ e $M = 4$.
- Posicionamento dos blocos mais refinados em torno da região de variação mais brusca da função.

Frente-oblíqua

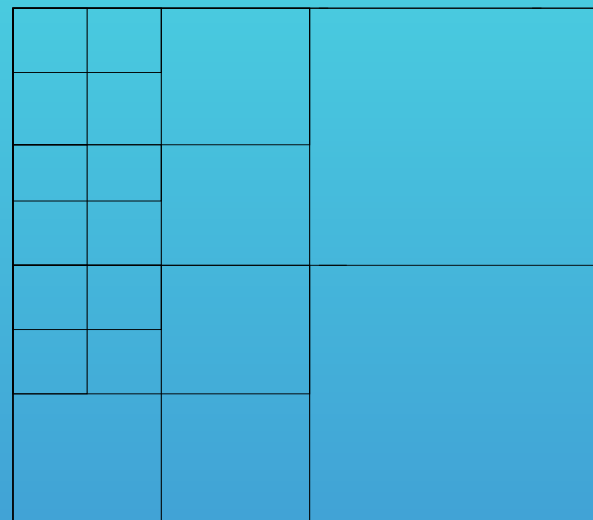


(curvas de nível)

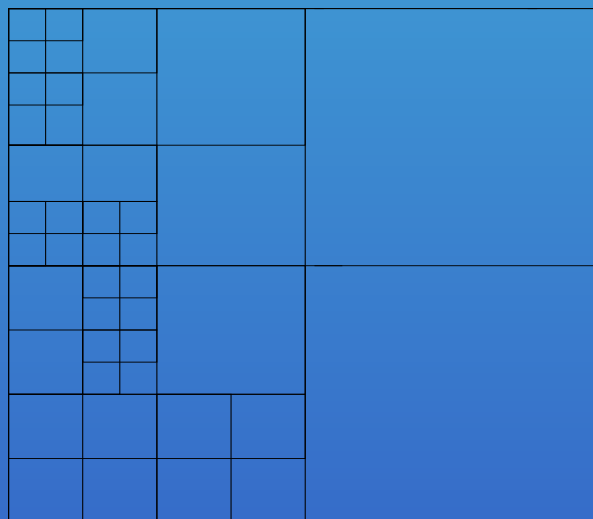
$\mathcal{M}_{10^{-3}}$, 10 blocos



$\mathcal{M}_{10^{-4}}$, 19 blocos



$\mathcal{M}_{10^{-5}}$, 44 blocos



Armazenagem em Malhas \mathcal{M}_ϵ

ϵ	Nro de Blocos	$\#(\mathcal{M}_\epsilon)$	$\#(\mathcal{X}^j)$	$\#(\mathcal{M}_\epsilon)/\#(\mathcal{X}^\ell)$
10^{-5}	44	45056	262144	0.17
10^{-4}	19	19456	65536	0.30
10^{-3}	10	10240	16384	0.60
10^{-2}	4	4096	4096	1.00

A Tabela mostra a economia de pontos alcançada em cada representação adaptável, comparada com a representação em $\mathcal{X}^{\ell_{\max}}$ correspondente ao nível mais refinado atingido ℓ_{\max} .

Pulso × Frente

- Comparando estes resultados com os do exemplo anterior, observamos que ocorre um melhor desempenho de armazenagem para estruturas pontualmente localizadas, como no caso do *pulso*.
- O nível máximo ℓ da função *pulso* é maior que o alcançado na representação da frente oblíqua.
- $M = 4$

Conclusões

- 🟡 AMR interpolante permite a compressão de dados.
- 🟡 Os coeficientes wavelet são erros de interpolação e podem ser usados como indicadores locais de regularidade.
- 🟡 Descartando os coeficientes wavelet de pouca significância, resulta uma representação em uma malha adaptativa .
- 🟡 As malhas adaptativas são refinadas em regiões de singularidade e esparsas em regiões de suavidade.
- 🟡 A estrutura de dados fica mais simples se a malha adaptativa for regular por blocos.
- 🟡 Aplicações de interesse: esquemas para a solução numérica de EDPs, com adaptabilidade espacial.

Mais informações...

- <http://www.wavelet.org>
- <http://www.ime.unicamp.br/~soniag/papers.html>
- <http://www.mathsoft.com/wavelets.html>
- <http://www-stat.stanford.edu/~wavelab>
- ...

Agradecimentos

As autoras agradecem:

- O apoio concedido por:

- SBMAC

- Fundunesp

- CNPq

- A todos os que contribuem no desenvolvimento e divulgação de programas de livre distribuição e código aberto, em especial, à GNU FreeSoftware Foundation e aos participantes dos projetos GNU/Linux, GNU/gcc, L^AT_EX e Prosper