

DETECÇÃO DE SINGULARIDADES E COMPRESSÃO DE DADOS USANDO ANÁLISE DE MULTIRRESOLUÇÃO

Magda K. Kaibara, Sônia Maria Gomes e Margarete O. Domingues

FC/UNESP–Bauru, IMECC/UNICAMP, CPTEC/INPE

Sumário

Resumo

AMR Interpolante 1D

- Aspecto Discreto
 - Esquema de Refinamento Interpolante.
 - Detecção de Singularidades.
 - Compressão de Dados: Redução de Malhas.
 - Estabilidade.

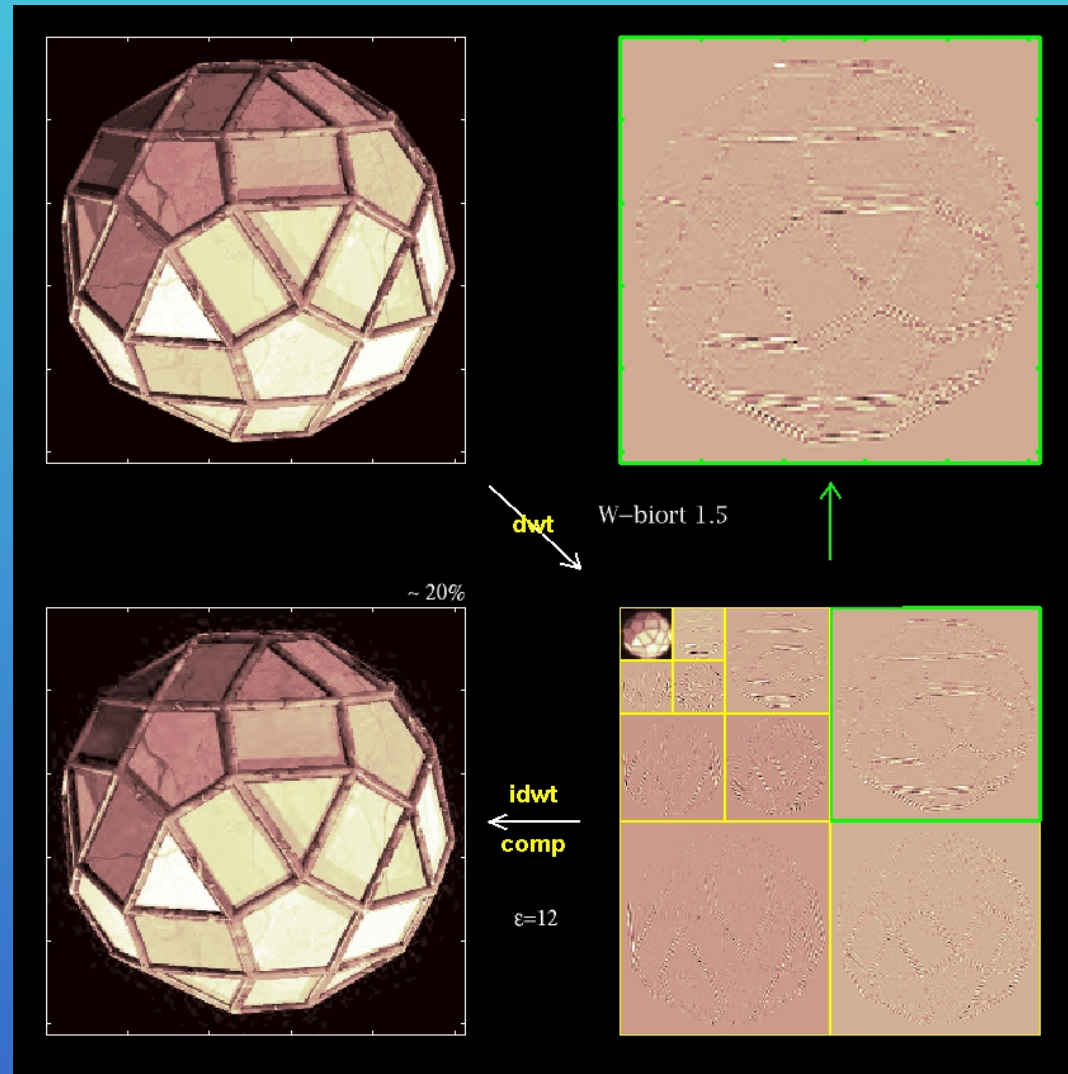
- Aspecto Funcional

AMR Interpolante 2D

- Detecção de Singularidades.
- Compressão de Dados: Redução de Malhas.
- Malhas Regulares por Blocos

Resumo

Exemplo: Análise de Multirresolução-AMR



AMR para valores pontuais

Principal Ingrediente:

$P_\ell^{\ell+1}$ operador de refinamento interpolante
(permite prever os valores de f no nível $\ell + 1$ a partir de informações do nível inferior ℓ)

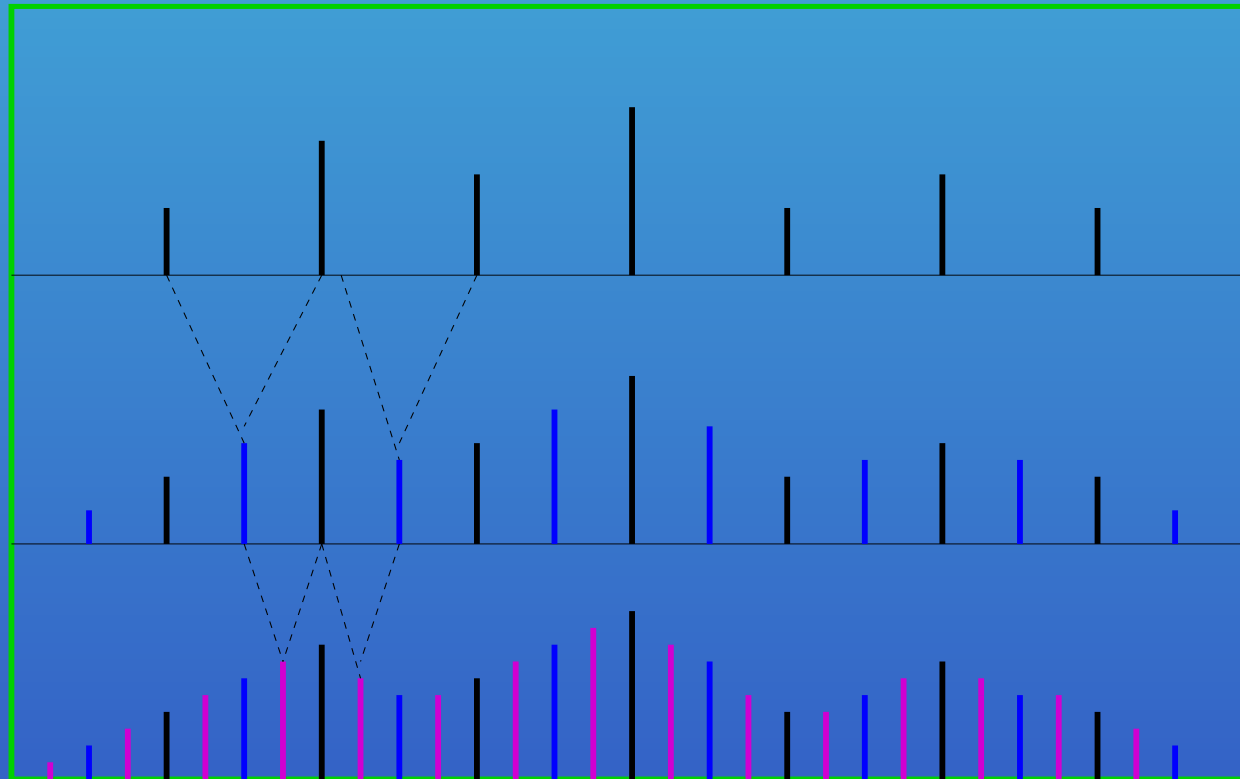
$$\tilde{f}_{2k-1}^{\ell+1} = [P_\ell^{\ell+1} f^\ell](2k-1)$$

Coeficientes wavelet

$$d_k^\ell = f_{2k-1}^{\ell+1} - \tilde{f}_{2k-1}^{\ell+1}$$

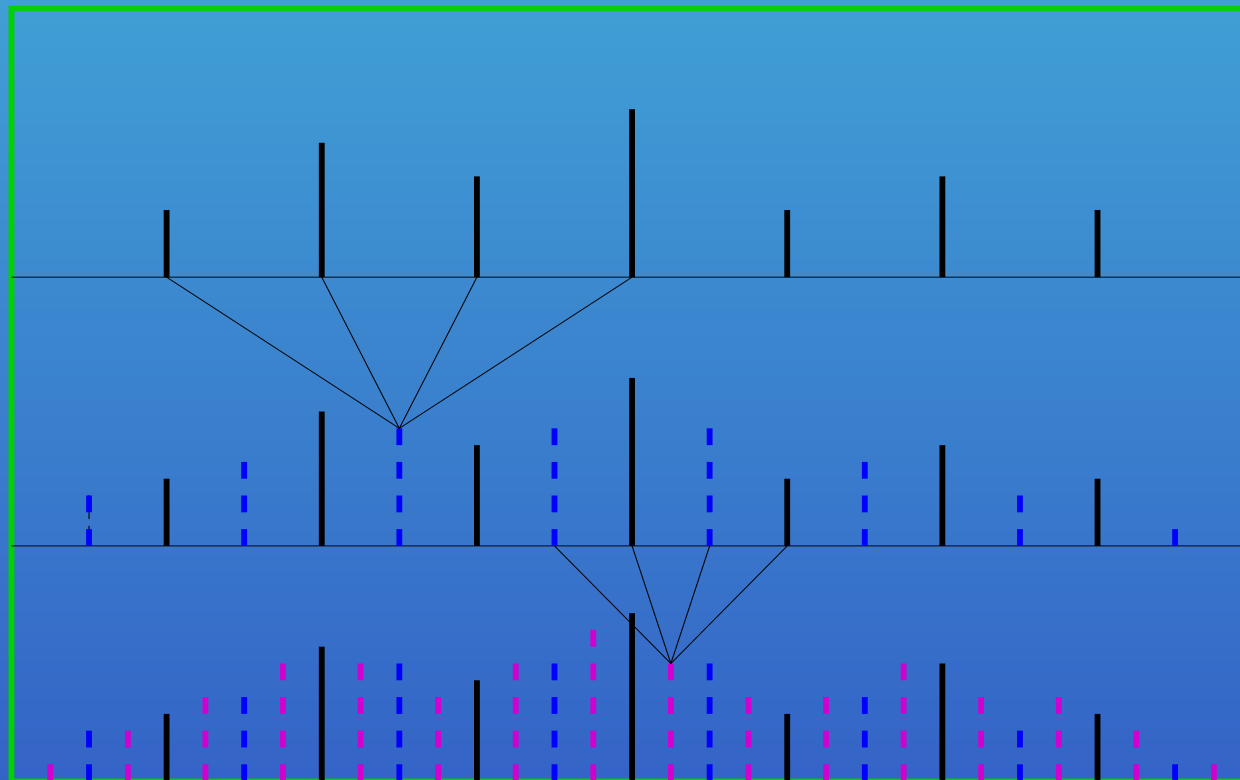
Exemplo: Interpolação linear

$$s^{\ell+1}(2k-1) = \frac{s^{\ell}(k-1) + s^{\ell}(k)}{2} = \tilde{f}_{2k-1}^{\ell+1}$$



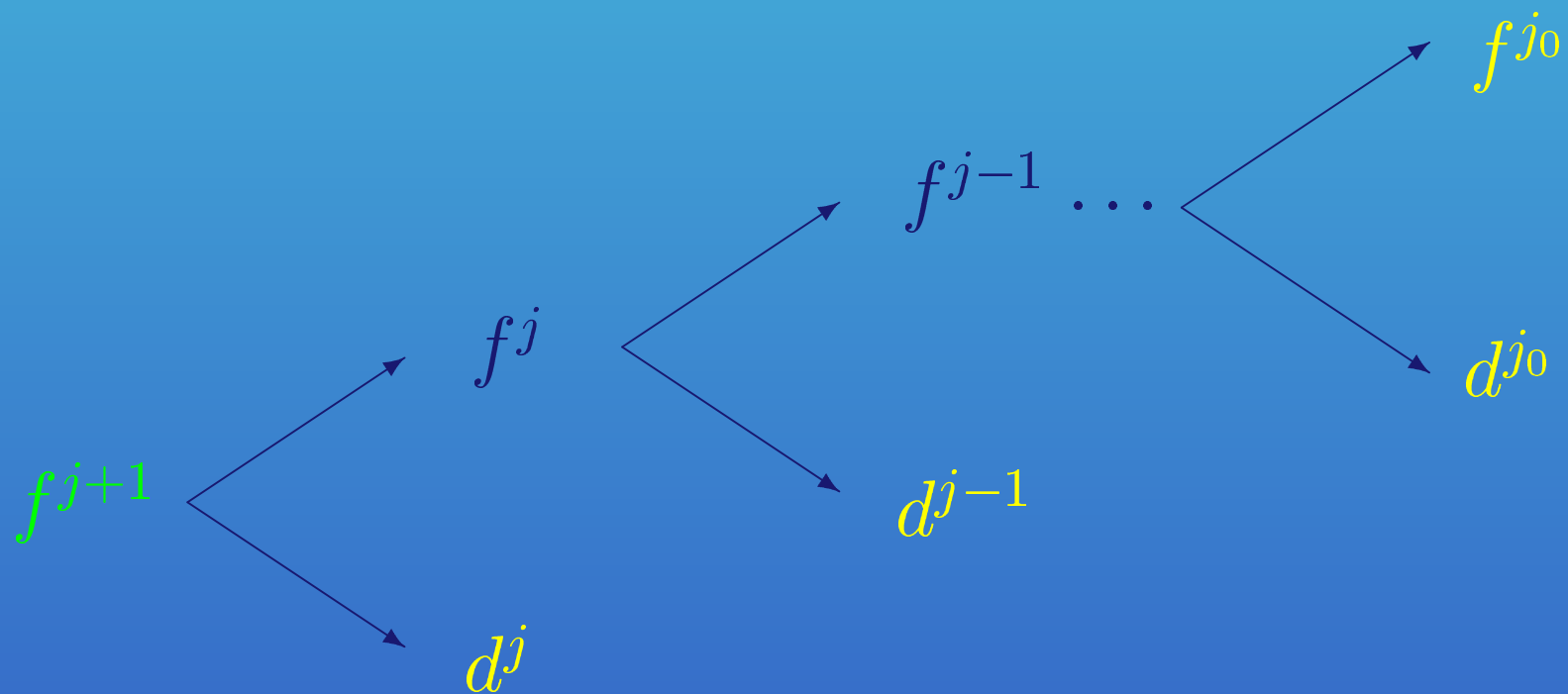
Exemplo: Interpolação Cúbica

$$\tilde{f}_{2k-1}^{\ell+1} = \frac{9}{16} [s^\ell(k) + s^\ell(k-1)] - \frac{1}{16} [s^\ell(k+1) + s^\ell(k-2)]$$



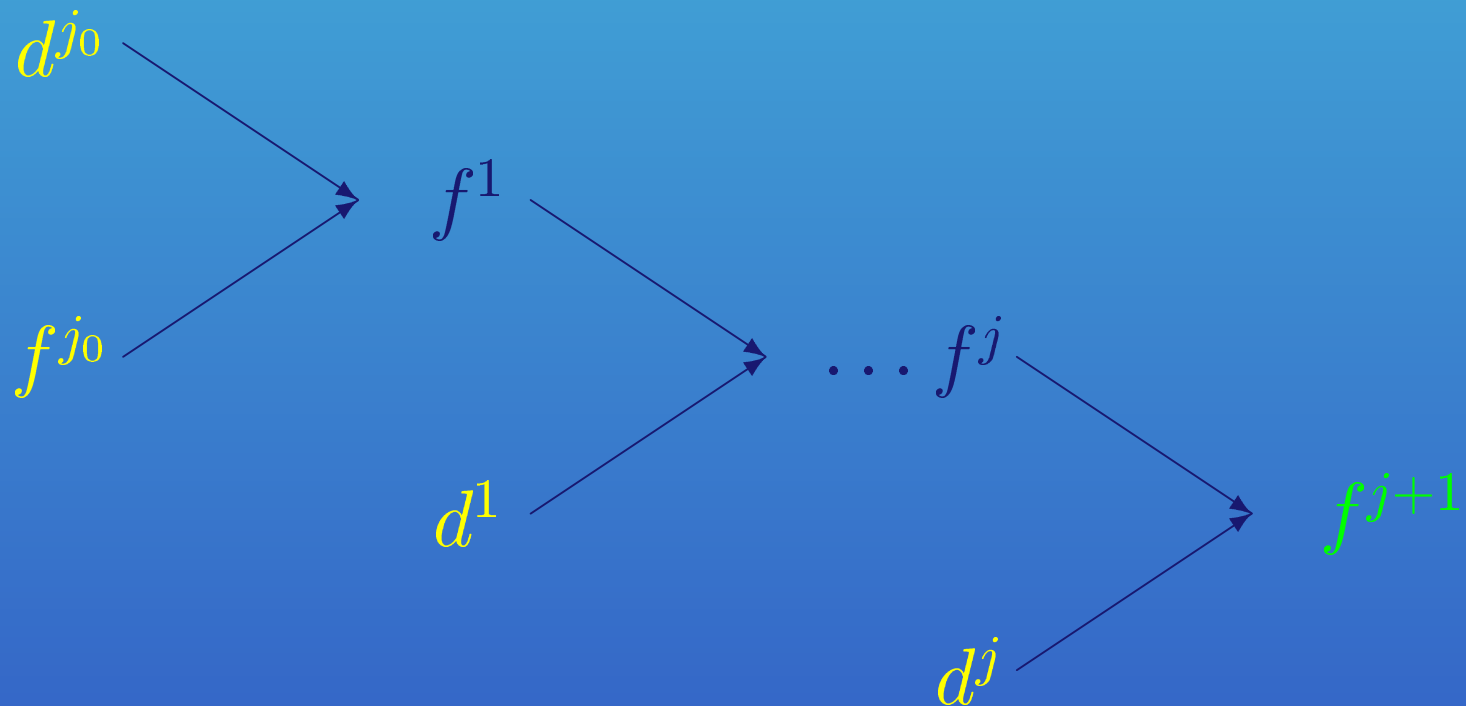
Algoritmo de Análise

$$f^{j+1} \xrightarrow{WT} (f^{j_0}, d^{j_0}, \dots, d^j)$$



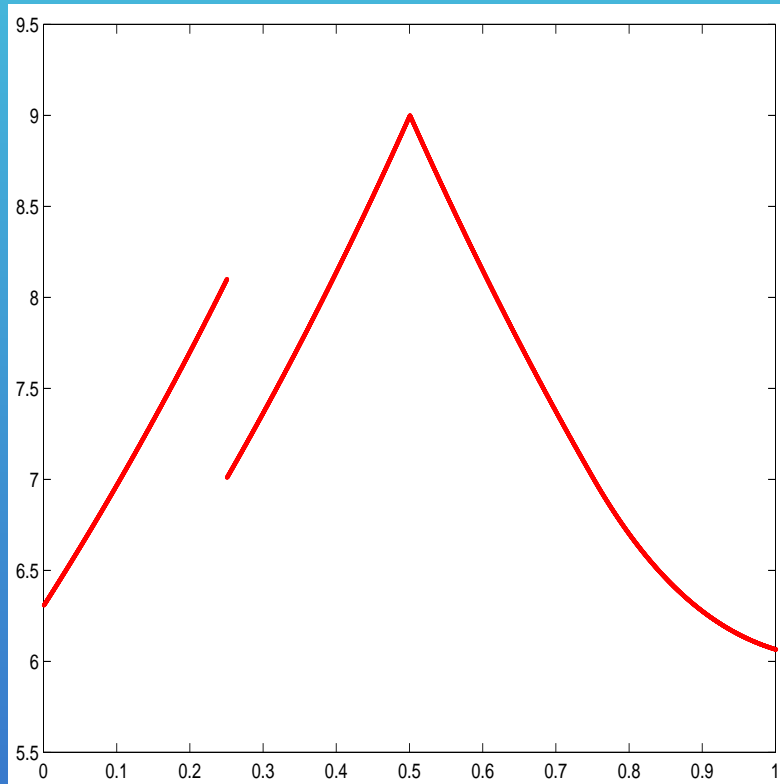
Algoritmo de Síntese

$$(f^{j_0}, d^{j_0}, \dots, d^j) \xrightarrow{IWT} f^{j+1}$$

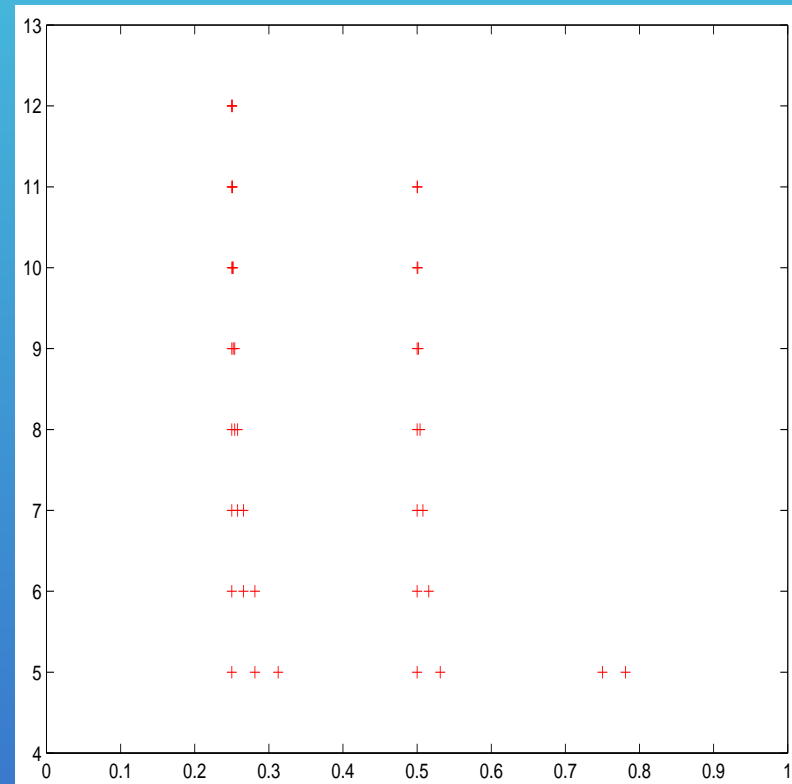


Indicadores de regularidade local

$f(x)$



$$|d_k^\ell| > 5 \times 10^{-4}$$



Algoritmo de Truncamento

🟡 **Input:** f^{j+1}, ϵ

🟡 **Passo 1: Análise**

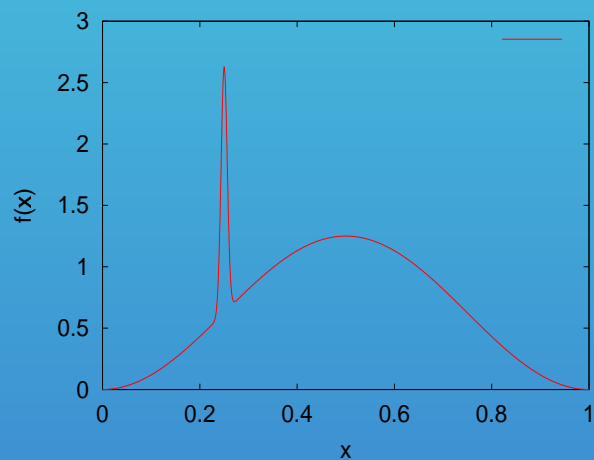
$$f^{j+1} \xrightarrow{WT} f_{MR}^{j+1} = (f^{j_0}, d^{j_0}, \dots, d^j).$$

🟡 **Passo 2: Truncamento**

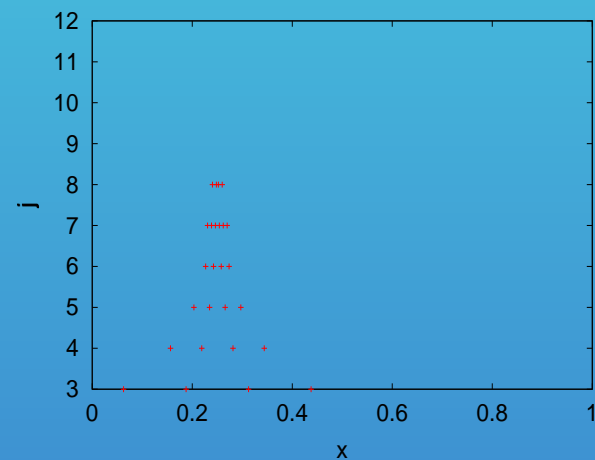
$$d_{\epsilon,k}^{\ell} = \begin{cases} d_k^{\ell} & \text{se } |d_k^{\ell}| > \epsilon \\ 0 & \text{se } |d_k^{\ell}| \leq \epsilon \end{cases}$$

🟡 **Output:** $f_{\epsilon,MR}^{j+1} = (f^{j_0}, d_{\epsilon}^{j_0}, \dots, d_{\epsilon}^j).$

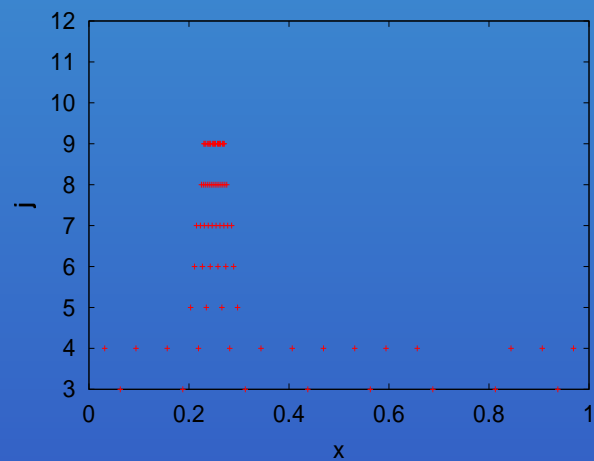
$f(x)$



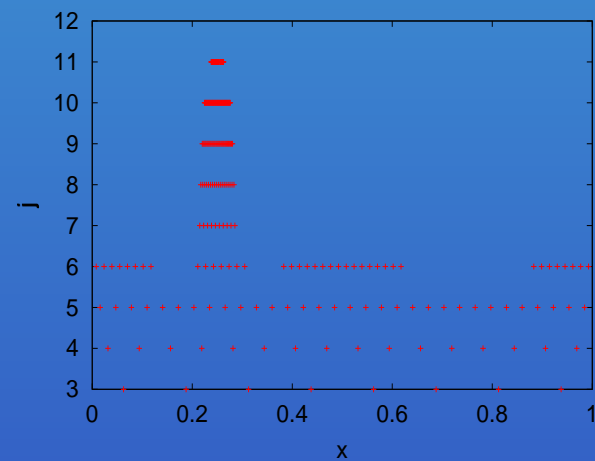
$\epsilon = 10^{-2}$



$\epsilon = 10^{-4}$



$\epsilon = 10^{-6}$



- No algoritmo de truncamento, os coeficientes wavelet d^ℓ são substituídos por d_ϵ^ℓ , de tal forma que

$$||d^\ell - d_\epsilon^\ell|| \leq \epsilon.$$

- Questão:

Após o algoritmo de síntese, a perturbação $f^{j+1} - f_\epsilon^{j+1}$ fica da mesma ordem de ϵ ?

- Resposta:

Sim, pois o algoritmo de refinamento é **convergente**

convergência \implies estabilidade

Convergência do Esquema de Refinamento

Aspecto Funcional

- P_l^{l+1} – esquema de refinamento interpolante
 - s^j – conjunto inicial de dados
 - Aplica-se iterativamente o esquema de refinamento

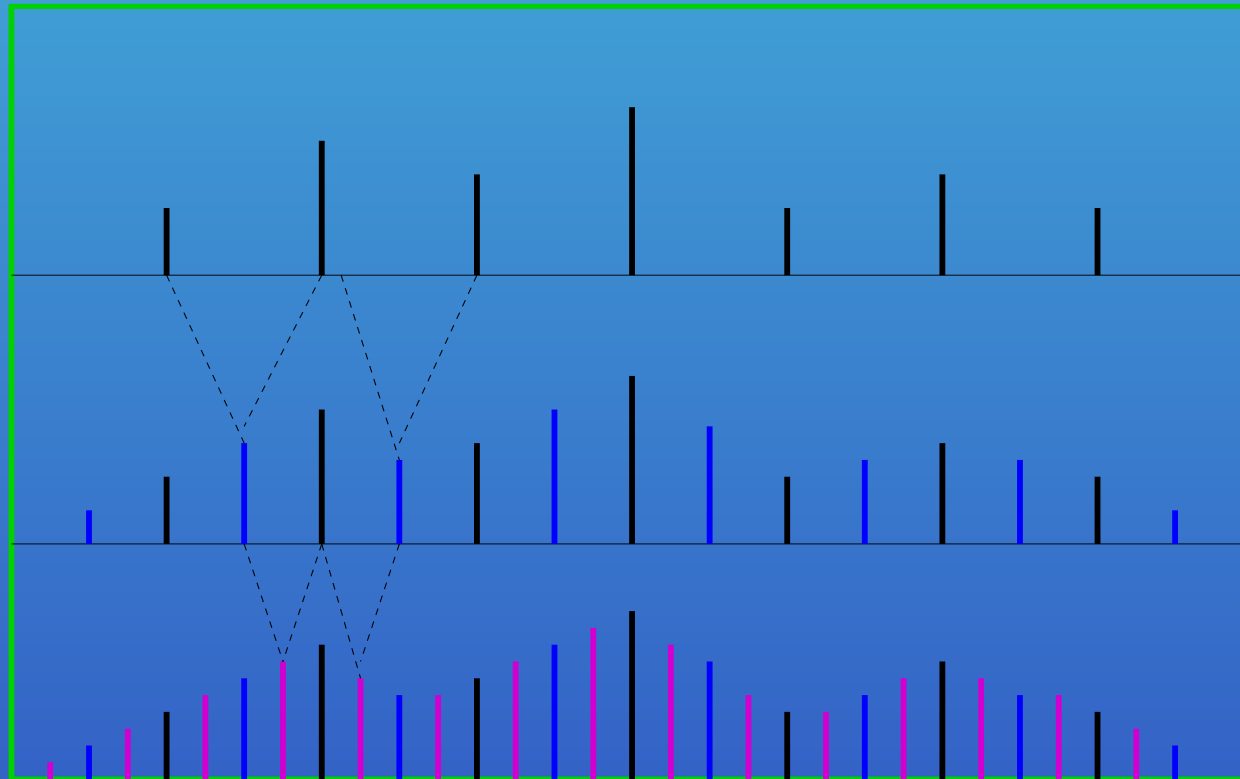
$$s^\ell = P_{\ell-1}^\ell s^{\ell-1}, \quad \ell > j$$

- Definição O esquema de refinamento é dito **convergente** se para todo s^j existe uma função contínua $I^j(x; s^j)$ que coincide com $s^\ell(k)$ nos pontos $x_k^\ell \in X^\ell$, para todo $\ell \geq j$. Isto é,

$$I^j(x_k^\ell; s^j) = s^\ell(k), \quad \ell \geq j,$$

Exemplo: Interpolação linear

$$s^{\ell+1}(2k-1) = \frac{s^{\ell}(k-1) + s^{\ell}(k)}{2} = \tilde{f}_{2k-1}^{\ell+1}$$



■ Espaços funcionais

$$V^j = \{g \in C[0, 1] : g \text{ é linear por partes em } X^j\}$$

■ Base de V^j

$$\{\phi_k^j(x), k = 0, \dots, 2^j\} \text{ tal que } \phi_k^j(x_m^j) = \delta_{km}.$$

■ Operador de reconstrução interpolante

$$I^j(x; f^j) = \sum_{k=0}^{2^j} f_k^j \phi_k^j(x),$$

$I^j(x; f^j)$: função de V^j que coincide com f^j no pontos de X^j

🟡 $V^j \subset V^{j+1}$

$$V^{j+1} = V^j + W^j$$

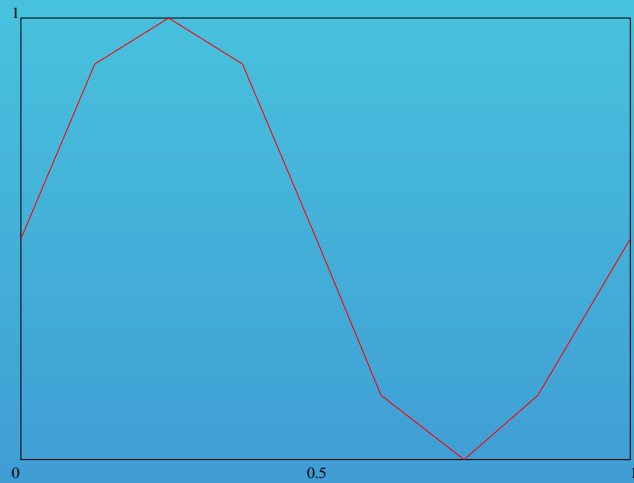
$$W^j = \{f \in V^{j+1} \mid f(x) = 0, \forall x \in X^j\}$$

🟡 Base de W^j

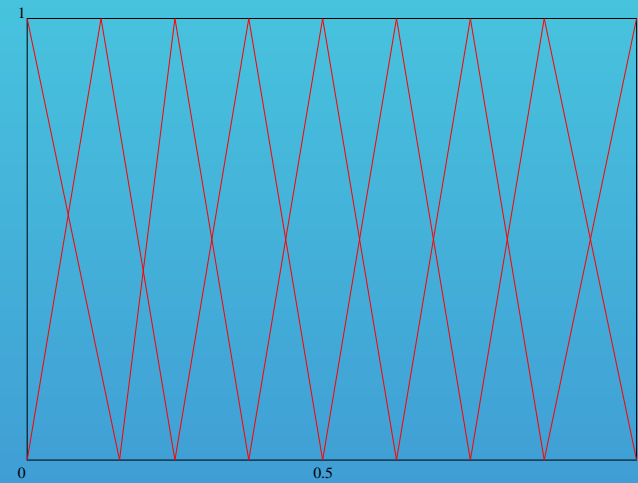
$$\psi_k^j(x) = \phi_{2k-1}^{j+1}(x), \quad k = 1, \dots, 2^j$$

$$\sum_{k=0}^{2^{j+1}} f_k^{j+1} \phi_k^{j+1}(x) = \sum_{j=0}^{2^j} f_k^j \phi_k^j(x) + \sum_{k=1}^{2^j} d_k^j \psi_k^j(x)$$

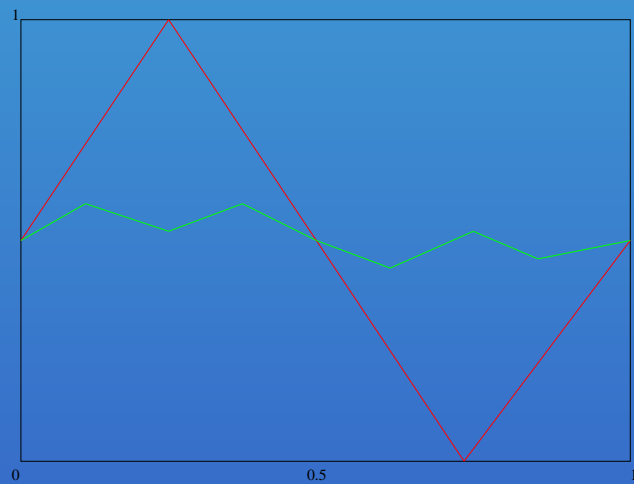
$$I(x; f^3)$$



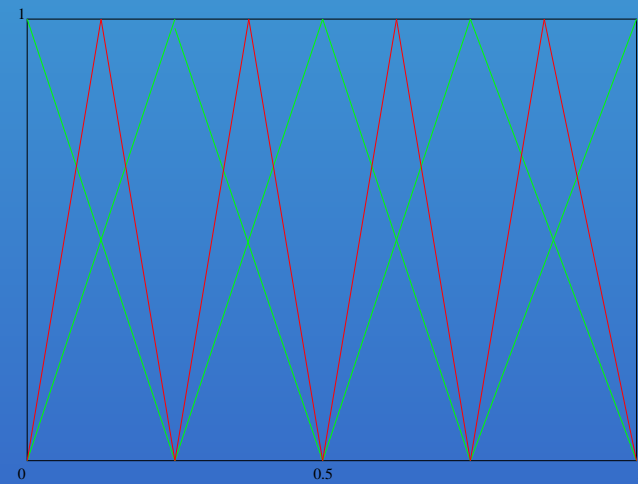
Base nodal de V^3



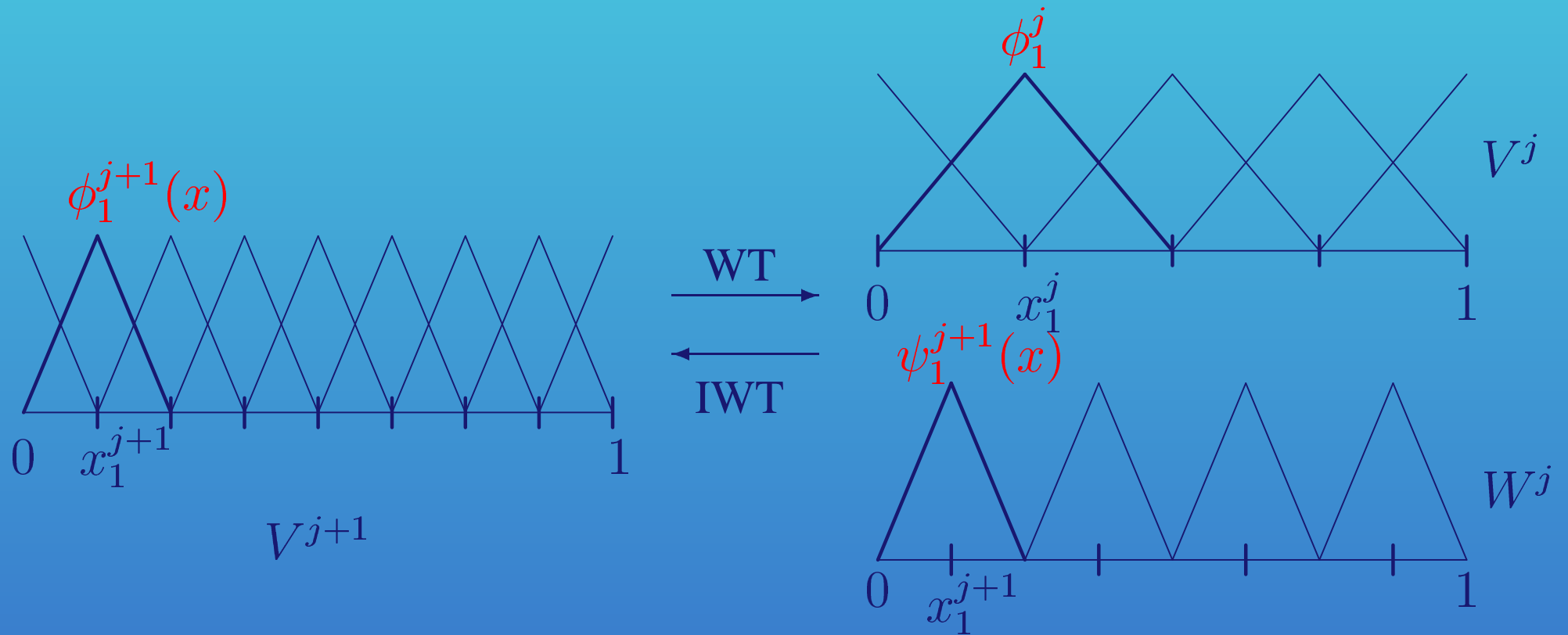
$$I(x; f^2) \text{ e } I(x; f^3) - I(x; f^2)$$



Base hierárquica de V^3



Mudança de Base



Se $j_0 < j$ é o nível menos refinado, obtem-se a representação em multinível

$$\sum_{k=0}^{2^{j+1}} f_k^{j+1} \phi_k^{j+1}(x) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}} f_k^{j_0} \phi_k^{j_0}(x) + \sum_{l=j_0}^j \sum_{k=1}^{2^l} d_k^l \psi_k^l(x),$$

que corresponde à soma direta

$$V^{j+1} = V^{j_0} + W^{j_0} + \dots + W^j$$

Esquemas de Ordem Superior

■ M – número par ≥ 2

■ $\mu = x_{2k-1}^{\ell+1} \in X^{\ell+1} \setminus X^\ell$

■ $\mathcal{S}(\mu) \subset X^\ell$ estêncil de interpolação

■ p é o polinômio de grau $M - 1$ tal que

$$p(\nu) = s^\ell(m), \quad \nu = x_m^\ell \in \mathcal{S}(\mu)$$

Define-se $s^{\ell+1} = P_\ell^{\ell+1} s^\ell$ tal que

$$s^{\ell+1}(2k-1) = p(\mu)$$

Detalhamento

Caso 1: μ próximo do extremo inferior de I
 $0 < k \leq M/2 - 1$

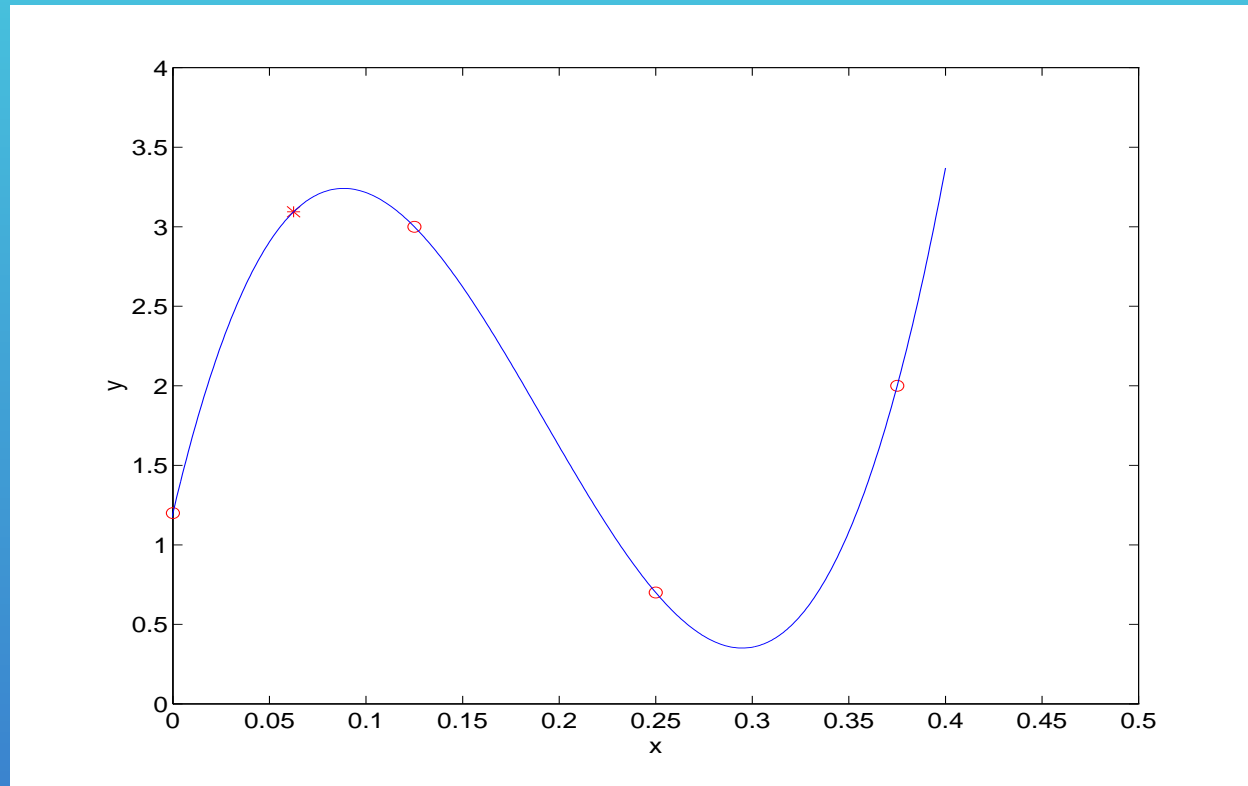
$$\mathcal{S}(\mu) = \{x_m^\ell = m2^{-\ell}, 0 \leq m \leq M - 1\}$$

$$p(\mu) = \sum_{m=0}^{M-1} s^\ell(m) c_{k,m}$$

em que

$$c_{k,m} = \prod_{n=0, n \neq m}^{M-1} \frac{2k - 2n - 1}{2m - 2n}.$$

μ próximo do extremo



Caso 2: μ no interior de I

$$M/2 - 1 < k \leq 2^\ell - (M/2 - 1)$$

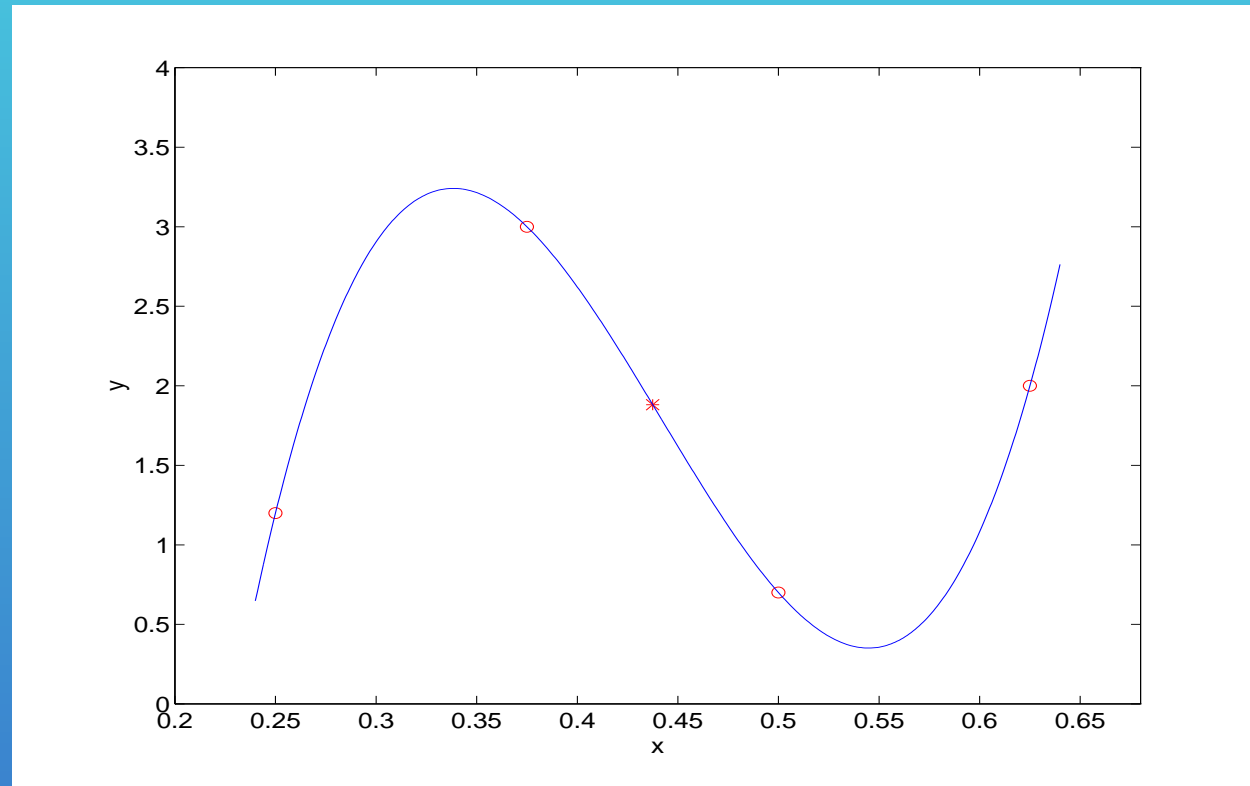
$$\mathcal{S}(\mu) = \{x_m^\ell = m2^{-\ell}, \quad k - M/2 \leq m \leq k + M/2 - 1\}$$

$$p(\mu) = \sum_{m=0}^{M/2-1} c_{k,m} (s^\ell(\ell + m) + s^\ell(\ell - m - 1))$$

em que

$$c_{k,m} = \frac{1}{2^{M-1}} \prod_{n=-M/2, n \neq m}^{M/2-1} \frac{2n+1}{n-m}.$$

μ no interior de I



Caso 3: μ próximo a fronteira superior de I

$$2^\ell - (M/2 - 1) < k \leq 2^\ell$$

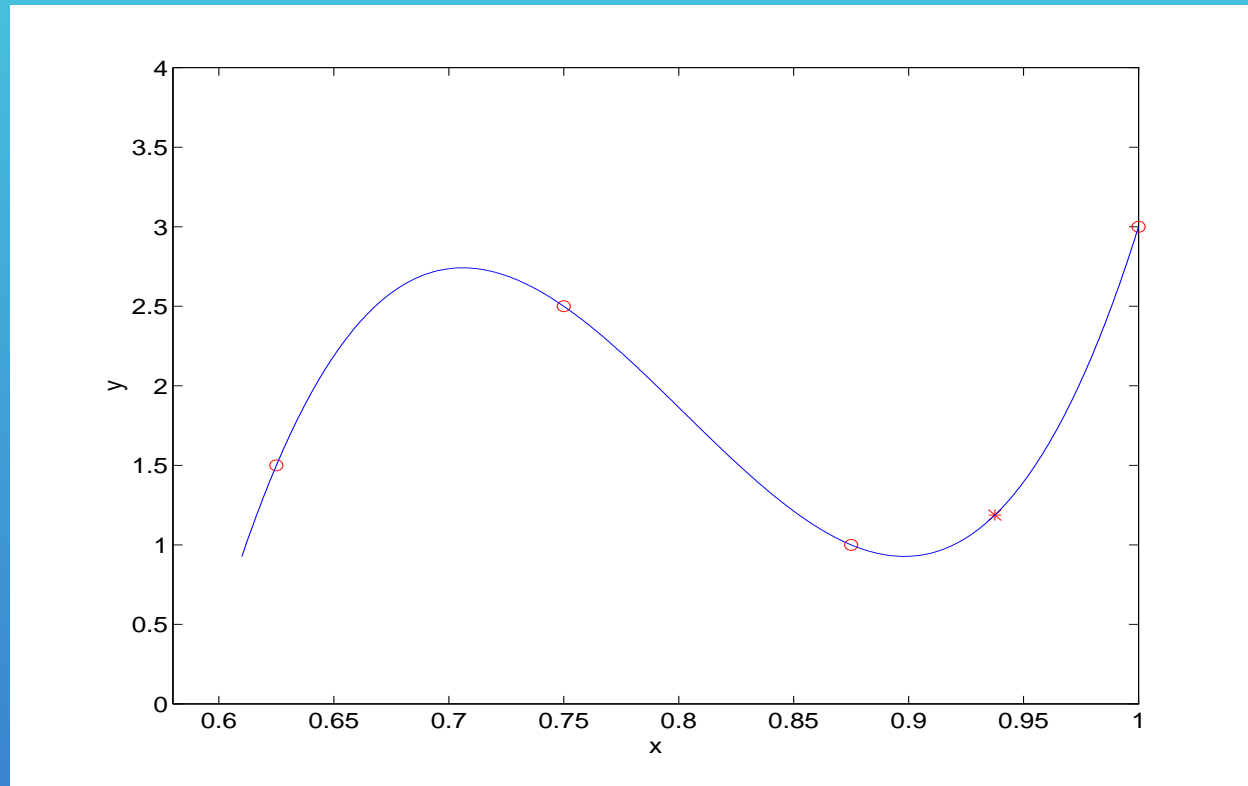
$$\mathcal{S}(\mu) = \{x_m^\ell = m2^{-\ell}, 2^\ell - (M - 1) \leq m \leq 2^\ell\},$$

$$p(\mu) = \sum_{m=2^\ell-M+1}^{2^\ell} s^\ell(m) c_{k,m}$$

em que

$$c_{k,m} = \prod_{n=2^\ell-M+1, n \neq m}^{2^\ell} \frac{2k - 2n - 1}{2m - 2n}.$$

μ próximo a fronteira



Observações

- Os coeficientes $c_{k,m}$ não dependem do nível ℓ
- Longe dos extremos do intervalo, $c_{k,m} = c_m$
- No extremo inferior os valores $c_{k,m}$ são os mesmos do extremo superior com a ordem invertida.

Coeficientes de interpolação centrada

M	c_0	c_1	c_2
2	1/2		
4	9/16	-1/16	
6	150/256	-25/256	3/256

Coeficientes de interpolação próximo da fronteira inferior

M	k	$c_{k,0}$	$c_{k,1}$	$c_{k,2}$	$c_{k,3}$	$c_{k,4}$	$c_{k,5}$
2	1	1/2					
4	1	5/16	15/16	-5/16	1/16		
6	1	63/256	315/256	-105/128	63/128	-45/256	7/256
	2	-7/256	105/256	105/128	-35/128	21/256	-3/256

Teorema

O esquema de refinamento $P_\ell^{\ell+1}$, de qualquer ordem M , é **convergente**

■ Espaços funcionais: V^j

Funções contínuas $I^j(x; f^j)$ geradas pelo esquema de refinamento a partir de f^j

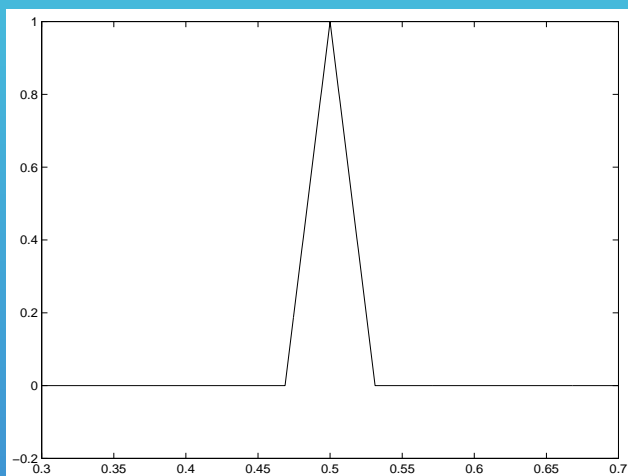
$$I^j(x; f^j) = \sum_{k=0}^{2^j} f_k^j \phi_k^j(x)$$

■ Base de V^j

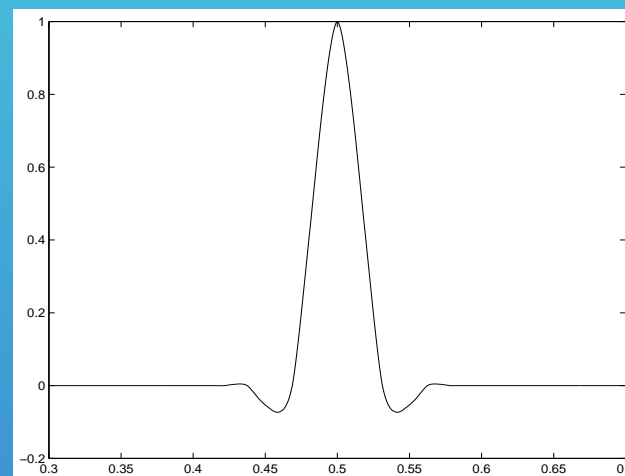
$\phi_k^j(x)$ funções nodais em X^j

$$\phi_{\mu}^5 (\mu = 1/2)$$

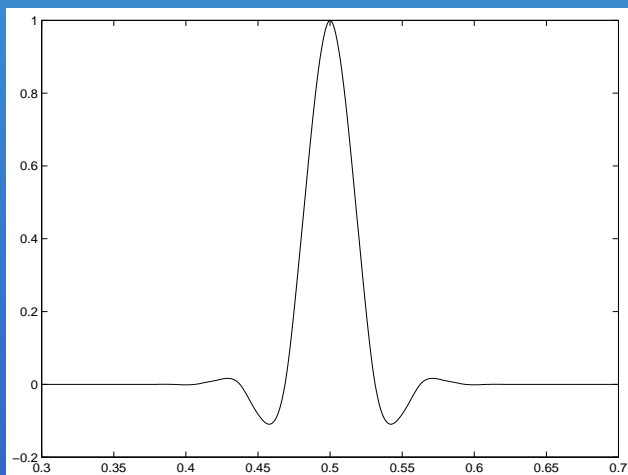
$M = 2$



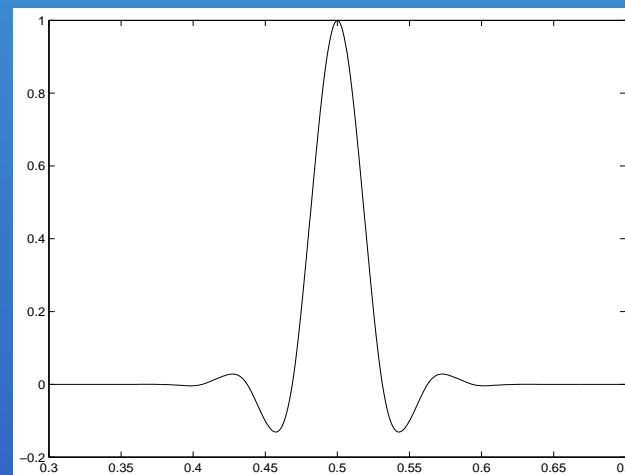
$M = 4$



$M = 6$

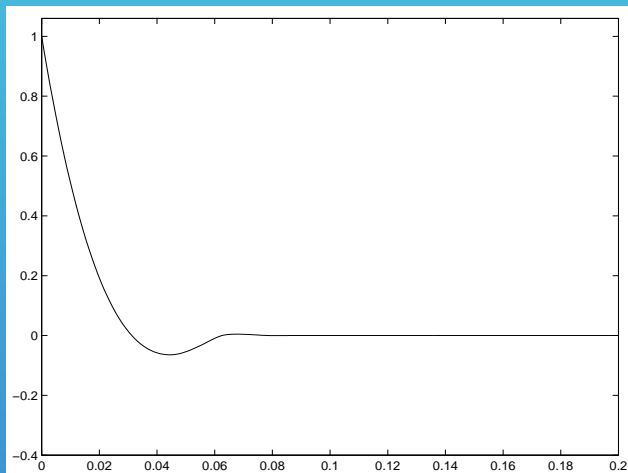


$M = 8$

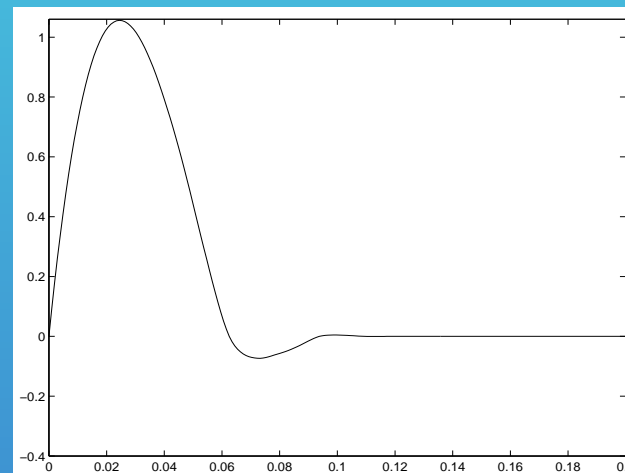


ϕ_μ^5 (Interação com o extremo inferior do intervalo)

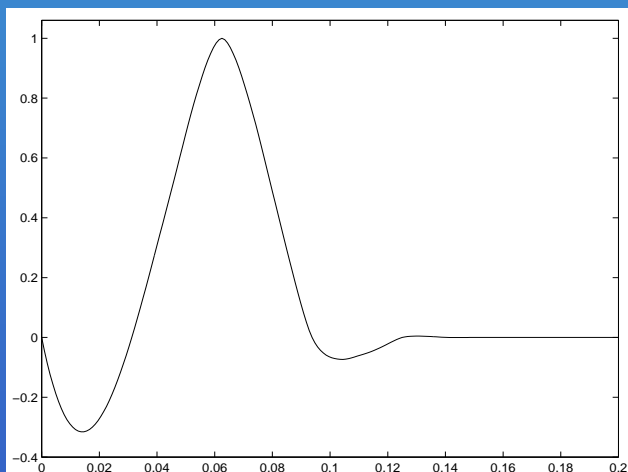
$$\mu = 0$$



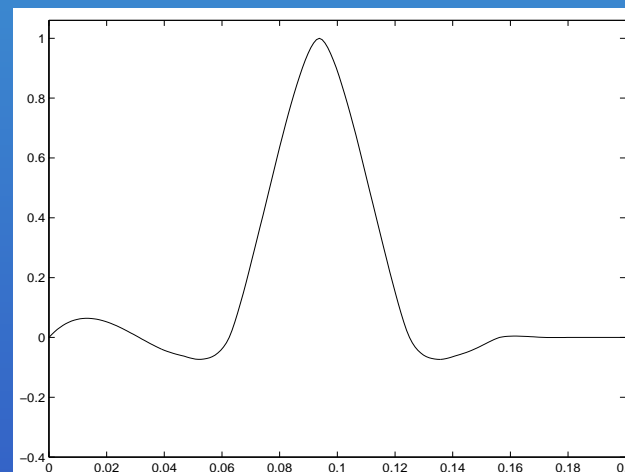
$$\mu = 1/2^5$$



$$\mu = 2/2^5$$



$$\mu = 3/2^5$$



Estabilidade

🟡 Perturbação $d_{k,\epsilon}^\ell = d_k^\ell + \epsilon$

🟡 Síntese $(f^\ell, d_\epsilon^\ell) \rightarrow f_\epsilon^{\ell+1}$

$$e^{\ell+1} = f_\epsilon^{\ell+1} - f^{\ell+1}$$

$$e_{2k-1}^{\ell+1} = f_{\epsilon,2k-1}^{\ell+1} - f_{2k-1}^{\ell+1} = d_{\epsilon,k}^\ell - d_k^\ell = \epsilon$$

🟡 Aplicando o esquema de refinamento, sucessivamente, existe o perigo de que a perturbação seja amplificada, descontroladamente?

🟡 No caso do esquema de refinamento por interpolação polinomial de Lagrange isto não ocorre pois o esquema é **convergente**

$$\max_{x \in I} |I(x; e^{\ell+1})| \leq C\epsilon$$

Conclusões

- 📍 Uma AMR interpolante, de qualquer ordem, pode ser definida, com algoritmos **eficientes**
- 📍 Os coeficientes wavelet são erros de interpolação e podem ser usados como **indicadores locais de regularidade**.
- 📍 AMR interpolante permite a **compressão de dados**: descartando os coeficientes wavelet de pouca significância, resulta uma representação em uma malha adaptativa .
- 📍 As malhas adaptativas são refinadas em regiões de singularidade e esparsas em regiões de suavidade.
- 📍 Os algoritmos de análise e síntese são **estáveis** e podem ser interpretados como mudança entre bases nodais e bases em multinível (hierárquicas).

Mais informações...

- <http://www.wavelet.org>
- <http://www.ime.unicamp.br/~soniag/papers.html>
- <http://www.mathsoft.com/wavelets.html>
- <http://www-stat.stanford.edu/~wavelab>
- ...

Agradecimentos

As autoras agradecem:

- O apoio concedido por:

- SBMAC

- Fundunesp

- CNPq

- A todos os que contribuem no desenvolvimento e divulgação de programas de livre distribuição e código aberto, em especial, à GNU FreeSoftware Foundation e aos participantes dos projetos GNU/Linux, GNU/gcc, L^AT_EX e Prosper