Projeto I de Cálculo Numérico - Turmas A e B

Regras

- O Pojeto deve ser feito individualmente ou em dupla. O grupo deverá desenvolver os programas propostos, preferencialmente, em MatLab. Com os resultados obtidos, deve elaborar um relatório, o qual deve conter as listagens dos programas e os resultados solicitados, acompanhados dos respectivos comentários. O relatório deve ser entregue impresso.
- Projetos com evidências de terem sido copiados não serão considerados.
- Entregar até 03/05/2012

Problema 1: Instabilidade Numérica e sua Cura

Este estudo ilustra o fato de que instabilidades podem ocorrer em algoritmos numéricos e mostra como evitá-las.

Lembrando que 2π é a medida da circunferência de um círculo de raio 1, tem-se $p_n < 2\pi < P_n$, em que p_n e P_n denotam, respectivamente, os perímetros dos polígonos regulares inscritos e circunscritos ao círculo de raio unitário, com n lados. Por exemplo, com $n = 4$, o quadrado inscrito tem lado igual a $\sqrt{2}$ enquanto que o quadrado circunscrito tem lado igual a 2. Portanto, tem-se que $2\sqrt{2} < \pi < 4$. Espera-se que com $n \to \infty$, tanto p_n quanto P_n convirjam para 2π.

1. Utilizando as relações $c_n = \frac{2s_n}{\sqrt{4-s_n^2}}$ e $s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$, em que c_n e s_n representam a longitude do lado do polígono regular de n lados circunscrito e inscrito, respectivamente, elabore um algoritmo iterativo para calcular as estimativas inferiores $p_n/2$ e superiores $P_n/2$ para π, com $n = 2^k$, para $k = 2, 3, \ldots$.
2. Como $s_n \to 0$ quando $n \to \infty$, o cálculo de $2 - \sqrt{4 - s_n^2}$ envolve a diferença de dois números muito próximos, para valores grandes de n, o que pode causar sérios erros em aritmética de precisão finita. Implemente o algoritmo para calcular essas estimativas usando precisão simples e dupla, variando k até 15 e depois até 30. Comente os resultados.

3. A subtração de números muito próximos na expressão $x = 2 - \sqrt{4-b}$, para valores de b próximos de zero, pode ser evitada calculando-se primeiro $y = 2 + \sqrt{4-b}$ e então $x = b/y$. Use esse procedimento no cálculos de $2 - \sqrt{4 - s_n^2}$ e verifique o efeito sobre as estimativas de π .

4. Outra forma de avaliar $x = 2 - \sqrt{4-b}$ evitando a diferença de números muito próximos pode ser feita usando a expansão em série de Taylor

$$\sqrt{4-b} = 2 - d_1 - d_2 - \dots$$

em que $d_1 = \frac{b}{4}$ e os termos d_k verificam a relação $d_{k+1} = \frac{2k-1}{k+1}\frac{b}{8}d_k$. Elabore um algoritmo para o cálculo da série $2 - \sqrt{4-b} = d_1 + d_2 + d_3 \cdots$ agregando os termos d_k até que a soma não se altere mais.

5. Observe que tomando $b = s_n^2$, a soma $d_1 + d_2 + d_3 + \dots$ fornece diretamente o valor de s_{2n}^2. Introduza este procedimento para obter um algoritmo mais robusto para as estimativas de π , com $n = 2^k$, para $k = 2, 3, \dots, 30$ e comente os resultados.

Problema 2: Aplicação do método de Newton: um problema de estruturas

Para uma coluna presa pela base, carregada excentricamente, com tensão σ, o modelo matemático para calcular a carga axial máxima permitida, P, corresponde a encontrar a menor raiz positiva da equação

$$f(P) = \frac{P}{A} - \frac{\sigma}{1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{P}{EA}}\right)} = 0, \tag{1}$$

em que L é o comprimento da coluna, a, c e r são constantes positivas referentes às propriedades geométricas da seção transversal, $e > 0$ é a excentricidade da carga, E é o módulo de Young, parâmetro do material.

Se o alinhamenro é perfeito ($e = 0$), sabe-se que a carga máxima é a chamada carga de ruptura:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EA}{(L/r)^2}$$

que é o limite superior para a carga máxima permitida.

1. Elabore um algoritmo para o cálculo da menor raiz positiva de (1) pelo método de Newton, supondo A, c e r iguais a 1, $\sigma = 40000$, $E = 30 \times 10^6$, para valores dados arbitrários de e e L, com valor inicial $P_0 = P_{cr}/2$. Como critério de parada, interrompa o processo quando a magnitude da diferença de duas aproximações sucessivas for inferior a $\sigma A \times 10^{-5}$.

2. Implemente o algoritmos para todos os seguintes pares de valores de e e L : com $e = 0.3$, $L = 50$ e $e = 0.05$, $L = 150$.

3. Em cada caso, grafique a função $f(P)$ e verifique se de fato o resultado encontrado corresponde ao menor zero de $f(P)$, que deve ser menor do que P_{cr}.

4. Para prevenir que o método forneça aproximações acima de P_{cr}, modifique seu programa para reiniciar as iterações cada vez que o valor aproximado P_k ultrapassar P_{cr} , corregindo o valor para $P_k = (P_{k-1}+P_{cr})/2$. Verifique os resultados.