5a. Lista de Análise I - MA 502

1) Prove que $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ é derivável em $\mathbb{R}$ com derivada:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} i a_i x^{i-1}. \tag{1}$$

2) Calcule, a partir da definição, a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$.

3) Sejam A e B abertos de $\mathbb{R}$ e $f : A \to B$ uma função derivável em A invertível. Prove que se $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$ então

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \tag{2}$$

Para um contra-exemplo estude a inversa de $f(x) = x^3$ no 0.

4) Sejam A e B abertos de $\mathbb{R}$ e $f : A \to B$ uma função não-decrescente derivável. Prove que $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in A$.

5) Sejam A aberto de $\mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função derivável pela direita no ponto $a \in A$ tal que $f'(a) > 0$. Prove que se existe $\delta > 0$ tal que se $a < x < x + \delta$ então $f(a) < f(x)$.

6) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com derivada limitada ($|g'| \leq K$). Prove que existe um $\delta > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < \delta$, $f(x) = x + \varepsilon g(x)$ é bijetora.

7) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x}) + \frac{x}{2}$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Provar que f tem derivada em todo $\mathbb{R}$, $f'(0) = \frac{1}{2}$ e que f não crescente numa vizinhança do 0.

8) Sejam A aberto de $\mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Se f é derivável em $a \in A$ e a é um ponto de máximo ou mínimo, prove que $f'(a) = 0$. Dê um contra-exemplo da recíproca.

9) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ função contínua derivável em (a, b) tal que $f(a) = f(b) = 0$. Prove que existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

10) Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas deriváveis em (a, b). Suponha que $g' \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Prove que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{3}$$

11) Seja $p(x)$ um polinômio de grau com todas as suas raízes reais. Prove que $p'(x)$ tem todas as suas raízes reais.

12) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ função derivável tal que $f' = 0$. Prove que f é constante.

13) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifica:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^2 \tag{4}$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que f é constante.

14) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ função derivável. Prove que entre duas raízes consecutivas de f' existe no máximo uma raiz de f.

15) Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas deriváveis em $c \in (a, b)$ tais que $f(c) = g(c) = 0$. Suponha que $g'(c) \neq 0$. Prove que

$$\lim_{t \to c} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{5}$$

16) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ função derivável em $c \in [a, b]$. Sejam $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ sequências de pontos de $[a, b]$ tais que $x_n < c < y_n$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = c$. Provar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(c). \tag{6}$$

17) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ função duas vezes derivável em $c \in [a, b]$. Prove que

$$f''(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) + f(c-h) - 2f(c)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+2h) - 2f(c+h) + 2f(c)}{h^2} \tag{7}$$

18) Determine dois números reais cuja soma é 10 e cujo produto seja o máximo possível.

19) Considere a função $f(x) = (1+x)^n$ e obtenha sua série de Taylor relativa a 0.

20) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ função par. Prove que na expressão da fórmula de Taylor relativa a 0 não aparecem as derivadas ímpares em 0. Enuncie e demonstre um resultado análogo para funções ímpares.

21) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função de classe C^k tal que $f'(a) = f''(a) = ... = f^{(n)}(a) = 0$. Prove que existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função de classe C^{n-k} tal que $f(x) = (x-a)^k g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

22) Seja $f : (a-\delta, a+\delta) \to \mathbb{R}$ função de classe C^∞ tal que existem constantes $a_0, ..., a_n, ...$ tais que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \tag{8}$$

Prove que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ é a série de Taylor de f relativa a a.

23) Prove o método de Newton das aproximações sucessivas. Mostre que o mesmo converge quadraticamente. Aplique o método ao cálculo aproximado de $\sqrt[3]{a}$.