4a. Lista de Análise I - MA 502

1) Dados os subconjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ mostre que se $A \subset B$ então $\text{int}(A) \subset \text{int}(B)$ e $\bar{A} \subset \bar{B}$.

2) Para um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$, mostre que $\text{int}(A) \subset \text{int}(\bar{A})$ e $\overline{\text{int}(A)} \subset \bar{A}$. Dê exemplos de subconjuntos tais que essas inclusões não sejam igualdades.

3) Mostre que $\text{int}(A) = \emptyset$ se e somente se A^c é denso.

4) Mostre que $\text{int}(A^c) = (\bar{A})^c$ e que $\overline{A^c} = (\text{int}(A))^c$.

5) Sejam A e B abertos de $\mathbb{R}$. Mostre que o conjunto $A + B = \{x + y \in \mathbb{R} : x \in A \text{ e } y \in B\}$ é aberto.

6) Prove que a união de dois fechados é fechada e que a interseção de dois abertos é aberta. O que acontece com a união de fechados e a interseção de abertos em geral?

7) Dê, se possível, exemplos de:

   (a) um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ tal que $\text{int}(A) \neq \emptyset$ mas A não é aberto;

   (b) um conjunto A tal que $\text{int}(A) \neq \text{int}(\bar{A})$;

   (c) um conjunto A tal que $\overline{\text{int}(A)} \neq \bar{A}$;

   (d) um conjunto $A \neq \mathbb{R}$ que é ao mesmo tempo aberto e denso;

   (e) um conjunto $A \neq \mathbb{R}$ que é ao mesmo tempo fechado e denso;

   (f) um conjunto denso cujo interior é vazio;

   (g) conjuntos que não são nem abertos nem fechados.

8) Seja $F \subset \mathbb{R}$ um conjunto fechado e limitado. Mostre que $\sup F, \inf F \in F$.

9) Mostre, usando a definição, que as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas nos pontos a indicados:

   (a) $f(x) = |x|$ em $a = 0$ e $a = 1$.

   (b) $f(x) = x^3$ em $a = 0$ e $a = 3$.

   (c) $f(x) = \frac{1}{x}$ em $a = 1$.

   (d) $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ no ponto $a = 0$.

10) Sejam as funções $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in A$. Suponha que f e g sejam contínuas em a e mostre, diretamente a partir da definição de função contínua num ponto, que $f + g$ e $f \cdot g$ são contínuas em a.

11) Mostre que toda função polinomial $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ é contínua em $\mathbb{R}$.

12) Sejam as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e denote A, B e C respectivamente os conjuntos dos pontos em que f, g e $f + g$ são contínuas. Mostre que $A \cap B \subset C$. Dê exemplos de funções em que $A \cap B \neq C$.

13) Para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja A o conjunto dos pontos em que f é contínua e B o conjunto dos pontos de continuidade de $|f|$. Mostre que $A \subset B$. Dê exemplo de uma função f em que $A \neq B$.

14) Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Prove que o conjunto dos pontos de descontinuidade simples de f é enumerável.

15) Dado um conjunto compacto $C \subset \mathbb{R}$, seja $f : C \to \mathbb{R}$ uma função contínua nesse conjunto. Denote por $f(C)$ a imagem de f. Mostre que $f(C)$ é um conjunto limitado superior e inferiormente em $\mathbb{R}$. Mostre que existem $x, y \in C$ tais que $\sup f(C) = f(x)$, $\inf f(C) = f(y)$.

16) Dê exemplo de uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e um subconjunto fechado tal que $f(F)$ não é fechado. (Compare com o exercício anterior.)

17) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que o conjunto das soluções da equação $f(x) = 0$ é fechado e que o conjunto das soluções da inequação $f(x) > 0$ é um conjunto aberto.

18) Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ vale $f(x) \neq 0$. (Use o exercício anterior.)

19) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas e $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$. Mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ vale $f(x) \neq g(x)$. (Use o exercício anterior.)

20) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Mostre que o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$ é fechado.

21) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) = -1$ e $f(10) = 1$. Considere o conjunto $A = \{x \in [0, 10] : f(x) < 0\}$.Mostre que $\sup A$ existe e que $f(\sup A) = 0$.

22) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Mostre que $\forall q \in \mathbb{Q}, f(q) = g(q)$, então $f = g$ (isto é, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$).

23) Prove que se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e $D \subset \mathbb{R}$ um subconjunto denso tal que $f|^D = g|^D$, então $f = g$.

24) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas tais que $f(0) = -1$, $f(10) = 2\pi$, $g(0) = \pi$ e$g(10) = -10$. Prove que existe $x \in (0, 10)$ tal que $f(x) = g(x)$.

25) Prove que a imagem de um compacto por uma função contínua é compacto. Prove que a imagem de um conexo por uma função contínua é conexo.

26) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 0$ se x é irracional e $f(x) = \frac{1}{n}$ onde n é o menor inteiro com $x = m/n$. Prove que f é contínua em todo número irracional e que tem uma descontinuidade simples em cada número racional.