3a. Lista de Análise I - MA 502

1) Prove que toda sequência convergente é de Cauchy.

2) Mostre, a partir das definições, que se a sequência (x_n) é de Cauchy então qualquer subsequência (x_{n_k}) também é de Cauchy.

3) Dê, se possível, exemplo(s) de:

(a) Uma sequência para a qual nenhuma subsequência é de Cauchy.

(b) Uma sequência para a qual nenhuma subsequência é limitada.

4) Sejam (x_n) e (y_n) sequências em $\mathbb{R}$ que satisfazem:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0, |x_n - y_n| < \epsilon. \tag{1}$$

Mostre que (x_n) é de Cauchy se e somente se (y_n) é de Cauchy.

5) Sejam (x_n) e (y_n) sequências de Cauchy. Mostre que as sequências $(x_n + y_n)$,$(x_n y_n)$ e $(|x_n|)$ também são de Cauchy.

6) Suponha que uma sequência (x_n) de números reais satisfaz

$$\forall n \in \mathbb{N}; |x_{n+2} - x_{n+1}| < \kappa |x_{n+1} - x_n|, \tag{2}$$

onde $0 \leq \kappa \leq 1$. Mostre que (x_n) é de Cauchy. (Sugestão: avalie a distância $|x_{n+\kappa} - x_n|$).

7) Diga quais dos resultados abaixo exigem, para sua demonstração, o axioma da completude (axioma do supremo).

(a) Toda sequência de Cauchy converge.

(b) Se uma sequência tem limite então ela é de Cauchy.

(c) Se uma sequência é crescente e limitada superiormente então ela é convergente.

(d) Toda série absolutamente convergente é convergente.

(e) Se uma sequência tem limite então ela é limitada.

(f) Toda sequência limitada tem algum ponto de acumulação.

8) Seja (x_n) uma sequência convergente. Defina uma nova sequência (s_n) por $s_n = \frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n)$. Prove que (s_n) é convergente.

9) Seja (x_n) uma sequência. Defina uma nova sequência (y_n) por $y_n = x_{n+1} - x_n$. Mostre que a série Σy_n converge se e somente se existe $\lim_{n\to\infty} x_n$.

10) Seja (x_n) uma sequência monótona decrescente tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Prove que

$$\sum (-1)^{n+1} x_n \tag{3}$$

é uma série convergente.

11) Prove que uma série de termos não negativos converge se e somente se suas somas parciais estão limitadas.

12) Seja (x_n) uma sequência monótona decrescente de termos não negativos. Prove que $\sum x_n$ converge se e somente se $\sum 2^n x_{2^n}$ converge.

13) Mostre que a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} \tag{4}$$

diverge.

14) Mostre que, se $r > 1$, a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^r} \tag{5}$$

converge.

15) Seja (x_n) uma sequência monótona decrescente tal que Σx_n converge. Prove que $\lim_{n \to \infty} n x_n = 0$.

16) Se Σx_n é absolutamente convergente, então Σx_n^2 é convergente.

17) Determine se a série $\Sigma(\frac{\log n}{n})^n$ é convergente usando os testes de Cauchy e D'Alembert.

18) Dê exemplos de séries divergentes Σx_n e Σy_n tal que $\Sigma(x_n + y_n)$ seja convergente.

19) Dê exemplo de uma série $\Sigma_{n \geq 1} x_n$ e de uma subsequência (x_{n_k}) da sequência de seus termos, satisfazendo cada um dos casos abaixo:

(a) $\Sigma_{n \geq 1} x_n$ diverge e $\Sigma_{k \geq 1} x_{n_k}$ converge.

(b) $\Sigma_{n \geq 1} x_n$ converge e $\Sigma_{k \geq 1} x_{n_k}$ diverge.

20) O seguinte resultado é devido a Bernhard Riemann (1826-1866): Seja (x_n) uma sequência tal que a série Σx_n converge mas não converge absolutamente. Sejam $a \leq b$ números reais. Então existe uma reordenação $x_{\varphi(n)}$ com $\varphi : N \to \mathbb{N}$ bijetiva) tal que:

$$\liminf_{k \to \infty} \widetilde{s_k} = a \ e \ \limsup_{k \to \infty} \widetilde{s_k} = b \tag{6}$$

onde $\widetilde{s_k} = \sum_{i=1}^{k} x_{\varphi(n)}$ são as somas parciais da série reordenada. DICA: As séries de termo geral $p_n = \frac{1}{2}(|x_n| + x_n)$ e $q_n = \frac{1}{2}(|x_n| - x_n)$ são divergentes.