2a. Lista de Análise I - MA 502

1) Sejam A e B subconjuntos não vazios e limitados de $\mathbb{R}$. Suponha que a seguinte propriedade é satisfeita: $\forall x \in A, \exists y \in B, y \leq x$. Mostre que $\inf B \leq \inf A$.

2) Sejam A, B subconjuntos não vazios e limitados de $\mathbb{R}$. Suponha que a seguinte propriedade é satisfeita: $\forall x \in A, \exists y \in B, x \leq y$. Mostre que $\sup B \geq \sup A$.

3) Mostre que toda sequência convergente é limitada.

4) Escreva com detalhes a negação de $\lim x_n = x$.

5) Sejam x_n uma sequência tal que $\lim x_n = x$. Prove que a nova sequência y_n definida por $y_n = x_{2n+9}$ verifica que $\lim y_n = x$.

6) Prove que toda sequência monótona limitada é convergente.

7) Seja (x_n) uma sequência tal que $\lim x_n = x > 0$. Prove que

(a) Existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $x_k > 0$ para todo $k \geq M$.

(b) Para todo $a < x$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $x_k > a$ para todo $k \geq M$.

8) Seja (x_n) uma sequência. Definimos a sequência $y_n = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$. Prove que se existe $\lim x_n = x$ então $\lim y_n = x$. Pode (y_n) ser convergente, mas que (x_n) não o seja?

9) Sejam x_n e y_n sequências tais que $\lim x_n = x$ e $\lim y_n = y$. Prove que

(a) $\lim x_n = |x|$

(b) $\lim(x_n + y_n) = x + y$

(c) $\lim x_n y_n = xy$

(d) Se $y \neq 0$ então $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$

10) Prove que:

$$\lim \frac{3n^7 - 2n^6 + 5m^3 - 2n^2 + n - 1}{5n^7 - 8n^3 - 3n^2 - 9n - 1} = \frac{3}{5}. \tag{1}$$

11) Sejam (x_n) e (y_n) sequências tais que $\lim x_n = x$ e $\lim(x_n - y_n) = 0$. Prove que $\lim y_n = x$.

12) Sejam (x_n) e (y_n) sequências tais que $\lim x_n = 0$ e (y_n) é limitada. Prove que:

$$\lim x_n y_n = 0. \tag{2}$$

13) Sejam x_n e y_n sequências tais que $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que se existem $\lim x_n = x$ e $\lim y_n = y$, então $x \leq y$.

14) Para uma sequência x_n limitada, considere as sequintes notações: (i) para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n = x_m : m \geq n$; (ii)$i_n = inf A_n$, $s_n = sup A_n$. Mostre que as sequências i_n e s_n são limitadas, i_n é crescente e s_n decrescente. Mostre também que para todo $m, n \in \mathbb{N}$, vale $i_n \leq s_m$. Conclua que existem os limites $i = \lim i_n$ e $s = \lim s_n$. Mostre que $i \leq s$. (Por definição $\liminf x_n = i$ e $\limsup x_n = s$.)

15) Com as notações do exercício anterior, sejam também $I = i_n : n \in \mathbb{N}$, $S = s_n : n \in \mathbb{N}$. Descreva A_n, i_n, s_n, I e S, para cada uma das sequências x_n abaixo:

(a) $x_n = \frac{1}{n}$;

(b) $X_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & \text{para n par} \\ 2 + \frac{1}{n}, & \text{para n ímpar} \end{cases}$

(c) $x_n = (-1)^n$;

(d) $x_n = \frac{1+n}{2+3n}$

16) Seja x_n uma sequência limitada (superiormente e inferiormente) e considere a sequência $y_n = -x_n$. Mostre que $\limsup y_n = -\liminf x_n$ e $\liminf y_n = -\limsup x_n$. (Sugestão: use as definições e a propriedade $sup(-A) = -inf(A)$, para um conjunto A).

17) Seja x_n uma sequência limitada em $\mathbb{R}$. Mostre que se toda subsequência x_{n_k} de x_n tem limite, então a sequência converge. Isto é, $\exists \lim x_n$. (Sugestão: Suponha por absurdo que x_n tem mais de um ponto de acumulação e construa uma subsequência que não tem limite).

18) Mostre que se uma sequência x_n em $\mathbb{R}$ não é limitada então existe uma subsequência x_{n_k} de x_n que não converge.

19) Mostre que se L_i é uma sequência de valores de convergência de subsequências de uma sequência x_n e $\lim L_i = L_0$ então L_0 também é valor de convergência de uma subsequência de x_n.

20) Mostre que existe uma sequência x_n com valores de convergência de subsequências dados pelo subconjunto $[0, 1] \cup [2, 3]$. É possível construir uma sequência tal que os valores de convergência de subsequências são dados por $(0, 1) \cup (2, 3)$?

21) Dê, se possível, exemplo(s) para as seguintes afirmações:

(a) Uma sequência limitada x_n tal que seu limite superior é diferente do supremo do conjunto de seus termos, isto é, $\limsup x_n \neq sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

(b) O mesmo que o anterior, com lim inf no lugar de lim sup e $inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(c) Uma sequência limitada x_n tal que $sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ não é valor de convergência de nenhuma subsequência.

(d) Uma sequência limitada x_n tal que $\limsup x_n = \liminf x_n$.

(e) Sequências x_n e y_n em $\mathbb{R}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq y_n$ e $\limsup x_n = \limsup y_n$ e $\liminf x_n = \liminf y_n$.

(f) Uma sequência x_n que não é limitada, mas que tenha subsequência convergente para valor real.