Lista Preliminar de Análise I - MA502 (MM202)

1) Escreva a negação das seguintes sentenças:

(a) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon.$

(b) $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon.$

(c) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

(d) Se $x \geq 0$ é menor que qualquer outro número $\epsilon > 0$ então $x = 0$.

2) Use indução finita para provar as seguintes igualdades:

(a) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

(b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + ... + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

(c) $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

(d) $1 + 3 + 5 + ... + (2n+1) = (n+1)^2$

(e) (Integral ou primitiva de “ordem superior” usando uma única integração!) Dada uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, defina, para cada $n \in \mathbb{N}$ a função

$$F(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(u)(x-u)^{n-1}\, du.$$

Mostre que a n-ésima derivada $F^{(n)}(x) = f(x)$.

(Neste exercício, claro, assuma o teorema fundamental do cálculo, que não está incluído nesta disciplina).

3) Use indução para mostrar a fórmula do binômio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \tag{1}$$

onde $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ é o número de i combinações de n elementos.
(Em algum momento será usada a igualdade: $\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+i}{i+1}$)

4) Dada uma função $f : A \to B$ e $X, Y \subseteq A$. Mostre que $f(X \setminus Y) \supset f(X) \setminus f(Y)$. A função f é injetora se e somente se $f(A \setminus X) = f(A) \setminus f(X)$ para todo $X \subset A$.

5) Dados conjuntos A, B e C, estabeleça uma bijeção entre $\mathcal{F}(A \times B; C)$ e $\mathcal{F}(A; \mathcal{F}(B; C))$.

6) Dada uma família de conjuntos $(A)_{\lambda \in L}$, seja X um conjunto com as seguintes propriedades: 1) para todo $\lambda \in L$ temos que $A_\lambda \supset X$; 2) se um conjunto $Y \subset A_\lambda$ para todo $\lambda \in L$ então $Y \subset X$. Prove nestas condições que

$$X = \bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda.$$

7) Refaça o enunciado do exercício de tal maneira que caracterize agora $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$.

8) Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$, prove que $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

9) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, prove que $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

10) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, prove que $|x| \leq y$ se e somente se $-y \leq x \leq y$.

11) Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$, prove que $|x - y| < z$ se e somente se $y - z \leq x \leq y + z$.

12) Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$. Prove que $\{x : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

13) Prove que os números naturais e os números pares tem a mesma cardinalidade.

14) Prove que a função $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$f(n, m) = 2^{n-1}(2m - 1)$$

é injetora. Conclua que o produto de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.

15) Prove que uma união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

16) Seja X um conjunto finito não vazio. Prove que não existe uma bijeção de X com um subconjunto próprio qualquer.

17) Prove que $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ tem o mesmo cardinal.

18) Seja X um conjunto enumerável e F um conjunto finito. Prove que $X \bigcup F$ é enumerável.

19) Utilizando as expansões diádicas do intervalo $(0, 1)$ (i.e. representando esses números na base 2), prove que o cardinal de $\mathbb{R}$ é o mesmo que o de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

20) Seja X um conjunto não vazio. Prove que não existe uma bijeção de X com $\mathcal{P}(X)$.