Regras de L'Hospital, notas de aula

Teorema 1 (1a. Regra de L'Hospital: indeterminações do tipo " $\frac{0}{0}$ "). *Sejam f e g duas funções reais deriváveis definidas no domínio $D = (p-\delta, p) \cup (p, p+\delta)$, com $\delta > 0$ tais que*

$$\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} g(x) = 0.$$

Se $\dfrac{f'}{g'}$ estiver definida em D e existir (mesmo que estendido) o limite $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ em $\mathbf{R}$ (ou o estendido em $\{+\infty, -\infty\}$) então

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

► Antes de demonstrarmos a regra, apresentamos uma demonstração fácil para uma situação que é particular, mas que cobre alguns casos de interesse, além disso, e o que é mais importante, dá uma intuição do fenômeno que está em jogo: suponha que o domínio D onde f e g são deriváveis inclua o ponto p, isto é $D = (p-\delta, p+\delta)$ e que $g'(p) \neq 0$. A hipótese significa que $f(p) = g(p) = 0$ portanto

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} \quad = \quad \lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{g(x) - g(p)} = \lim_{x\to p} \frac{\frac{f(x)-f(p)}{x-p}}{\frac{g(x)-g(p)}{x-p}} = \frac{\lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}}{\lim_{x\to p} \frac{g(x)-g(p)}{x-p}} = \frac{f'(p)}{g'(p)}.$$

Esse caso particular também pode ser provado facilmente usando o teorema de Cauchy.

► Note que a igualdade garantida pela Regra de L'Hospital está condicionada à existência (mesmo que estendida para $\pm\infty$) do limite de $\dfrac{f'}{g'}$. Não quer dizer que a igualdade seja verdadeira sempre (mesmo com $\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} g(x) = 0$), isto é, o limite de $\dfrac{f}{g}$ pode existir, sem que exista o limite de $\dfrac{f'}{g'}$. Considere por exemplo $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ com $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ e $g(x) = x$.

A demonstração para o caso geral como enunciado acima será um corolário imediato da Regra de L'Hospital para limites laterais, que faremos abaixo. Essa demonstração utilizará três vezes a seguinte

► **Observação 1**: Se uma função $h : (p, p+\delta) \to \mathbf{R}$ é tal que $\lim_{x\to p^+} h(x) = 0$ e h é derivável com $h' > 0$, então $h(x) > 0$ para todo $x \in (p, p+\delta)$. De fato, para verificar isso, defina uma nova função $\bar{h} : [p, p+\delta)$ dada por $\bar{h}(p) = 0$ e $\bar{h}(x) = h(x)$ para $x \in (p, p+\delta)$. Naturalmente, pela maneira que foi definida, $\bar{h}$ é contínua em $[p, p+\delta)$, e derivável em $(p, p+\delta)$ tal que neste intervalo $\bar{h}'(x) = h'(x) > 0$. Segue pelo teorema do valor médio que $\bar{h}$ é estritamente crescente, portanto $\bar{h}(x) > 0$ para $x \in (p, p+\delta)$. Analogamente, $h < 0$ se $h' < 0$. Também é análogo quando consideramos o intervalo $(p-\delta, p)$, com os respectivos acertos do sinal.

$\square$

▶ **Observação 2**: (Um Teorema do Valor Intermediário para derivadas) Se uma função h é derivável em um intervalo I e para $a < b \in I$ temos que $h'(a) < 0$ e $h'(b) > 0$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$. Esse resultado, chamado de Teorema de Darboux (no Guidorizzi está na página 282) tem uma maneira fácil de demonstrar: o ponto a, extremo esquerdo do intervalo $[a, b]$ não é ponto de mínimo de h em $[a, b]$ porque $h'(a) < 0$, da mesma maneira b, o extremo direito do intervalo, tampouco é ponto de mínimo de h em $[a, b]$. Segue pelo Teorema de Weierstrass que existe um ponto $c \in (a, b)$ que é ponto de mínimo de h, portanto $h'(c) = 0$.

Assim, se $\frac{f'}{g'}$ está definida em D, então $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in D$. Portanto esse teorema do valor intermediário para derivadas garante que g' não troca de sinal em $(p, p+\delta)$ nem em $(p - \delta, p)$.

□

Proposição 2 (1a. Regra de L'Hospital: com limites laterais)**.** *Sejam f e g duas funções reais deriváveis definidas no intervalo $I = (p, p + \delta)$, com $\delta > 0$ tais que*

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = \lim_{x \to p^+} g(x) = 0.$$

Se $\dfrac{f'}{g'}$ estiver definida em I e existir (mesmo que estendido) o limite $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ em $\mathbf{R}$ (ou o estendido em $\{+\infty, -\infty\}$) então

$$\lim_{x \to p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstração: Pela Observação 2 acima, g' não muda de sinal em $(p, p+\delta)$. Sem perda de generalidade, considere que $g'(x) > 0$ para todo $x \in I$. Assim, pela Observação 1 também teremos $g(x) > 0$ para $x \in I$. Suponha que sejam dados dois números reais α e β tais que para todo $x \in (p, \delta')$, com $\delta' \leq \delta$ tenhamos

$$\alpha < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \beta. \tag{1}$$

Então

$$\alpha g'(x) < f'(x) < \beta g'(x).$$

Da desigualdade do lado esquerdo tiramos que $\alpha g'(x) - f'(x) < 0$; junto com o fato de $\lim_{x \to p^+}(\alpha g(x) - f(x)) = 0$ então, pela observação antes da Proposição 2:

$$\alpha g(x) - f(x) < 0 \tag{2}$$

E da desigualdade do lado direito tiramos que $\beta g'(x) - f'(x) > 0$, junto com o fato de $\lim_{x \to p^+}(\beta g(x) - f(x)) = 0$ então, mais uma vez pela observação antes da Proposição 2

$$\beta g(x) - f(x) > 0 \tag{3}$$

Assim, as desigualdades (2) e (3) implicam que também temos

$$\alpha < \frac{f(x)}{g(x)} < \beta \tag{4}$$

para $x \in (p, p + \delta')$.

Se $\lim_{x \to p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbf{R}$, dado um $\varepsilon > 0$ arbitrário, tome $\alpha = L - \varepsilon$ e $\beta = L + \varepsilon$. Então existe um δ' que satisfaz as propriedades acima, portanto, das desigualdades (4) acima teremos também $\lim_{x \to p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

No caso de $\lim_{x \to p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$, usamos somente o lado esquerdo da desigualdade (4). Para um dado α arbitrariamente grande, existe um δ' que vai satisfazer as propriedades acima (no que se refere ao lado esquerdo das desigualdades (1) e (4)).

Finalmente, se $\lim_{x \to p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$, usamos somente o lado direito da desigualdade (4). Para um dado um β negativo de módulo arbitrariamente grande, existe um δ' que vai satisfazer as propriedades acima (no que se refere ao lado direito das desigualdades (1) e (4)).

$\square$

► Observação 3: Verifique que assumindo no começo da demonstração que $g' < 0$ em I, a demonstração continua válida. As inversões de sinal necessárias em (2) e em (3) são desinvertidas e se chega na mesma desigualdade (4).

► Observação 4: Verifique que podemos enunciar uma proposição análoga para limites laterais a esquerda. Conclui-se assim que a demonstração do Teorema 1 está completa.

Teorema 3 (2a. Regra de L'Hospital: indeterminações do tipo " $\frac{\infty}{\infty}$ ")**.** *Sejam f e g duas funções reais deriváveis definidas no domínio $D = (p - \delta, p) \cup (p, p + \delta)$, com $\delta > 0$ tais que*

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} g(x) = +\infty.$$

Se $\frac{f'}{g'}$ estiver definida em D e existir (mesmo que estendido) o limite $\lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ em $\mathbf{R}$ (ou o estendido em $\{+\infty, -\infty\}$) então

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Da mesma maneira que fizemos com a 1a. Regra de L'Hospital, a 2a. Regra será demonstrada usando a proposição abaixo, que a demonstra o caso de limites laterais.

Proposição 4 (2a. Regra de L'Hospital: com limites laterais)**.** *Sejam f e g duas funções reais deriváveis definidas no intervalo $I = (p, p + \delta)$, com $\delta > 0$ tais que*

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = \lim_{x \to p^+} g(x) = +\infty.$$

Se $\frac{f'}{g'}$ estiver definida em I e existir (mesmo que estendido) o limite $\lim_{x \to p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ em $\mathbf{R}$ (ou o estendido em $\{+\infty, -\infty\}$) então

$$\lim_{x \to p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstração: Pela Observação 2, g' não muda de sinal em $(p, p+\delta)$. Pela hipótese de $\lim_{x\to p^+} g(x) = +\infty$, teremos necessariamente que $g' < 0$ neste intervalo. Suponha que sejam dados dois números reais α e β tais que para todo $x \in (p, \delta')$, com $\delta' \leq \delta$ tenhamos $g(x) > 0$ e

$$\alpha < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \beta. \tag{5}$$

Então da desigualdade do lado esquerdo tiramos que $\alpha g'(x) - f'(x) > 0$. Portanto, comparando os valores da função $\alpha g - f$ em $x \in (p, p+\delta')$ e em $p+\delta'$ temos:

$$\alpha g(x) - f(x) < \alpha g(p+\delta') - f(p+\delta') \tag{6}$$

E da desigualdade do lado direito tiramos que $\beta g'(x) - f'(x) < 0$. Portanto, comparando os valores da função $\beta g - f$ em $x \in (p, p+\delta')$ e em $p+\delta'$ temos:

$$\beta g(x) - f(x) > \beta g(p+\delta') - f(p+\delta') \tag{7}$$

Assim, das desigualdades (6) e (7) e lembrando que neste intervalo $g > 0$, temos

$$\alpha - \frac{\alpha g(p+\delta') - f(p+\delta')}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < \beta - \frac{\beta g(p+\delta') - f(p+\delta')}{g(x)} \tag{8}$$

para todo $x \in (p, p+\delta')$.

Se $\displaystyle\lim_{x\to p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbf{R}$, dado um $\varepsilon > 0$ arbitrário, tome $\alpha = L - \frac{\varepsilon}{2}$ e $\beta = L + \frac{\varepsilon}{2}$. Então existe um δ' que satisfaz simultaneamente: as propriedades acima e torna as duas frações das desigualdades (8) com constantes no numerador e $g(x)$ no denominador menores que $\frac{\varepsilon}{2}$. Portanto, das desigualdades (8) acima teremos também $\displaystyle\lim_{x\to p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

No caso de $\displaystyle\lim_{x\to p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$, usamos somente o lado esquerdo da desigualdade (8). Para um dado um α arbitrariamente grande, existe um δ' que vai satisfazer as propriedades acima (no que se refere ao lado esquerdo das desigualdades (5) e (8)).

Finalmente, se $\displaystyle\lim_{x\to p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$, usamos somente o lado direito da desigualdade (8). Para um dado β negativo de módulo arbitrariamente grande, existe um δ' que vai satisfazer as propriedades acima (no que se refere ao lado direito das desigualdades (5) e (8)).

□

► Observação 5: Verifique que podemos enunciar uma proposição análoga para limites laterais a esquerda. Conclui-se assim que a demonstração do Teorema 4 está completa.