Desigualdades

Definição: Dados $a, b \in \mathbb{R}$, dizemos que $a < b$ se, e só se, existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $a + c = b$. Caso contrário, dizemos que $a \geq b$.

Exemplos:

$2 < 5$, pois $2 + 3 = 5$

$-2 < 0$, pois $-2 + 2 = 0$

$-100 < -1$, pois $-100 + 99 = -1$

Propriedades: Sejam $a, b, x, y \in \mathbb{R}$. Temos

(i) se $a < b$, então $a + x < b + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

(ii) se $a < b$ e $x < y$, então $a + x < b + y$;

(iii) se $a < b$ e $x \geq 0$, então $ax \leq bx$;

(iv) se $a < b$ e $x < 0$, então $ax > bx$;

(v) se $0 < a < b$, então $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

(vi) se $a < b$ e $b < x$, então $a < x$

Demonstração de algumas dessas propriedades

(i) se $a < b$, então $a + x < b + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

Suponha que $a < b$. Pela definição, existe $c > 0$ tal que

$$a + c = b$$

$$\Rightarrow a + c + x = b + x$$

$$\Rightarrow (a + x) + c = b + x$$

$$\overset{\text{definição}}{\Rightarrow} a + x < b + x$$

$\square$

(ii) Se $a<b$ e $x<y$, então $a+x<b+y$;

Suponha que $a<b$ e $x<y$. Então, por definição, existem $c_1>0$ e $c_2>0$ tais que

$$a+c_1=b \quad \text{e} \quad x+c_2=y$$

Somando as duas equações, obtemos

$$a+c_1+x+c_2=b+y$$

$$(a+x)+(c_1+c_2)=b+y \qquad (*)$$

Como $c_1\geqslant 0$ e $c_2\geqslant 0$, temos $c_1+c_2\geqslant 0$. Daí, por $(*)$ e pela definição, inferimos que

$$a+x<b+y$$

$\square$

(vi) se $a<b$ e $b<x$, então $a<x$

Suponha que $a<b$ e $b<x$, então existem c_1 e c_2 reais positivos tais que

$$\left.\begin{array}{r} a+c_1=b \\ \text{e} \qquad b+c_2=x \end{array}\right\} \Rightarrow x=a+\underbrace{c_1+c_2}_{>0} \overset{\text{definição}}{\Rightarrow} a<x$$

pois $\left.\begin{array}{l} c_1>0 \\ c_2>0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1+c_2>0$

$\square$