MT403, Análise Numérica, A
MS612, Análise Numérica II,
Segundo Semestre de 2022, UNICAMP

Lista de Exercícios 1

(1) Verifique se as seguintes formulas (métodos) são consistentes e determine o erro de truncamento local de cada formula para aproximar $u'(x_i)$. Repetir esta análise para aproximar $u''(x_i)$.

[Formulas em malhas uniformes, $h = x_i - x_{i-1}$:

- $\dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta_x}$,
- $\dfrac{u_{i+1} + u_i}{\Delta_x}$,
- $\dfrac{u_{i+2} - u_{i-2}}{4\Delta_x}$,
- $\dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta_x^2}$

Formulas em malhas não uniformes, com $h_i = x_i - x_{i-1}$:

- $\dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h_i h_{i+1}}$
- $\dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{h_i + h_{i+1}}$

(2) Usando o método dos coeficientes indeterminados, e determine dois métodos de diferenças finitas do tipo $\sum_{i=0}^{2} a_i u(x - ih)$ para aproximar respetivamente:

- $u'(x)$,
- $u''(x)$.

De que ordem são os métodos determinados? Explique a resposta analisando o erro de truncamento local.
Em geral, se temos uma formula com n pontos e queremos aproximar a derivada $u^k(x)$ (com $n > k$) de que ordem podemos obter o método? Motive a sua resposta.

(3) Dada uma malha uniforme prove que o método

$$D_c u_i = \frac{1}{12h^2}(-u_{i-2} + 16u_{i-1} - 30u_i + 16u_{i+1} - u_{i+2})$$

tem ordem 4 quando é usado para para aproximar $u''(x_i)$

(4) Provar que na malha não uniforme $x_i = x_{i-1} + h_i$ com h_i que varia para cada i, o método

$$D_c u_i = C_{i-1}u_{i-1} + C_i u_i + C_{i+1}u_{i+1}$$

para aproximar $u'(x_i)$ tem como erro de truncamento $\tau_i = D_c u(x_i) - u'(x_i)$ que satisfaz para cada i

$$\tau_i = \frac{h_{i+1} - h_i}{3} u'''(x_i) + \frac{1}{12}(h_i^2 - h_i h_{i+1} + h_{i+1}^2) + O(h_{max}^3)$$

(5) Considere a formula centrada $D_0 u_i = \dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$

- Use a estrategia de extrapolação aplicada a $D_0 u_i$ para criar um método de ordem 4 para aproximar $u'(x_i)$.
- Use a estratégia das correções adiadas no caso que estas resolvendo o problema $u'(x) = g(x)$ com $u(x_0) = a$. para criar um método de ordem 4 para aproximar $u'(x_i)$.

(6) Considere o problema singularmente perturbado

$$\begin{cases} \varepsilon u'' + u(u' - 3) = 0 \\ u(-2) = 0 \\ u(2) = 1 \end{cases}$$

Quer se aproximar a solução em todo o intervalo $[-2, 2]$ usando a mesma acurácia $|E_i| := |u_i - u(x_i)| < \varepsilon = 10^{-2}$

- É possível obter isso usando uma malha uniforme qualquer? Se sim é uma estratégia computacionalmente eficiente? Responde analisando quantos pontos e quantas operações serão necessárias para obter $|E_i| < \varepsilon$ em cada ponto x_i.

- Determine um subintervalo de $[-1, 3]$ onde precisa usar mais pontos para aproximar melhor a solução do problema.
- Descreve uma estratégia numérica que usando a malha não uniforme do item interior permite de resolver este problema eficientemente

Note que a eficiência de uma estratégia numérica se analisa discutindo a memoria necessária (números de pontos da malha) e custo computacional (que é o numero de operações necessárias globalmente na estratégia numérica que é proporcional ao tempo computacional complexivo da estrategia numérica)

(7) Determine um método numérico de ordem 2 para aproximar a solução do seguinte problema de contorno (BVP)

$$\begin{cases} -u''(x) = x + 1 \\ u(-1) = 0 \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

- prove que o método é consistente;
- prove que o método é estável usando a norma 2 e a norma infinito;
- prove que o método tem ordem 2 na norma 2 e norma infinito.
- No caso que $u'(1) = 1$ substituísse a condição $u(1) = 1$, o problema admitiria ainda uma única solução?
  Se sim, resolve os itens anteriores para este novo problema (resposta não trivial).