

Sistemas equivalentes, Método de eliminação de Gauss

MS211 – Cálculo Numérico – Turma C

Giuseppe Romanazzi

Setembro 2024

Conteúdo

- 1 Transformações em sistemas equivalentes
- 2 Método de eliminação de Gauss
 - Algoritmo
 - Custo Computacional
 - Exemplo

Sistemas equivalentes

Definição

Um sistema $Ax = b$ diz se equivalente ao sistema $By = c$ se os dois sistemas admitem a mesma solução.

Exemplo:

Os sistemas $Ax = b$; $-2Ax = -2b$; $0.3Ax = 0.3b$
são sistemas equivalentes.

Transformações em sistemas equivalentes

Existem três operações simples que transformam um sistema linear num sistema equivalente.

- 1 Troca de duas equações do sistema. Por exemplo:

$$\begin{cases} 5x - 4y = -6 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases} \quad (1)$$

e $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 5x - 4y = -6 \end{cases}$ tem a mesma solução $(x, y) = (2, 4)$ e então são sistemas equivalentes.

- 2 Multiplicação de uma equação por uma constante.

$\begin{cases} 2.5x - 2y = -3 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases}$ tem a mesma solução do sistema (1), porque a sua primeira equação é obtida multiplicando por 0.5 a primeira equação de (1).

Transformações em sistemas equivalentes

- 3 Adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação do sistema.

$$\begin{cases} 5x - 4y = -6 \\ -2x + 2y = 4 \end{cases} \text{ tem a mesma solução do sistema (1).}$$

Notamos que a sua segunda equação é obtida do sistema (1) somando a segunda equação com a primeira equação multiplicada por -1 , ou seja:

$$\begin{aligned} &\text{segunda eq. do novo sistema} = \\ &[\text{segunda eq. do sistema (1)}] - 1 * [\text{primeira eq. do sistema (1)}] \end{aligned}$$

Eliminação de Gauss: transformação num sistema triangular superior

O objetivo do método de Eliminação de Gauss é de transformar o sistema de partida $Ax = b$, com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não singular, num sistema triangular superior equivalente do tipo $Ux = c$, para poder achar depois facilmente a solução do sistema de partida resolvendo o sistema equivalente triangular $Ux = c$.

Este sistema será obtido usando uma sequencia de transformações do tipo 1, 2, 3 vistas nas slides anteriores.

A ideia base é de transformar o sistema anulando em cada passo os elementos de uma coluna por baixo da diagonal até chegar a um sistema equivalente triangular superior.

Primeiro passo do método de eliminação de Gauss

Dado o sistema $Ax = b$ de dimensão n , denotado com

$$A^{(0)}x = b^{(0)} \quad (s_0)$$

vamos construir um sistema equivalente $A^{(1)}x = b^{(1)}$ que tem a matriz dos coeficientes $A^{(1)}$ com elementos nulos na primeira coluna por baixo da diagonal ou seja $a_{i1}^{(1)} = 0$, para $i = 2, \dots, n$.

O novo sistema equivalente $A^{(1)}x = b^{(1)}$ é obtido subtraindo as equações $i = 2, \dots, n$, a primeira equação de $A^{(0)}x = b^{(0)}$ multiplicada por $m_{i1} := \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$, ou seja ,

por cada $i = 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} &\text{eq. } i \text{ do novo sistema} = \\ &[\text{eq. } i \text{ do sistema } (s_0)] - m_{i1} * [\text{primeira eq. do sistema } (s_0)] \end{aligned}$$

A primeira equação de (s_1) é igual à primeira de (s_0) .

Primeiro passo do método de eliminação de Gauss

Este primeiro passo permite de construir a partir da estrutura algébrica $(A^{(0)}|b^{(0)})$ a estrutura $(A^{(1)}|b^{(1)})$ do novo sistema, onde os elementos da matriz $A^{(1)}$ e do vetor $b^{(1)}$ são

$$\begin{aligned} a_{1j}^{(1)} &= a_{1j}^{(0)}, & b_1^{(1)} &= b_1^{(0)} & j &= 1, \dots, n; \\ a_{ij}^{(1)} &= a_{ij}^{(0)} - m_{i1}a_{1j}^{(0)}, & b_i^{(1)} &= b_i^{(0)} - m_{i1}b_1^{(0)} & i &= 2, \dots, n; j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

onde $m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$. Note que das equações em cima

- $a_{i1}^{(1)} = a_{i1}^{(0)} - \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}a_{11}^{(0)} = 0$ por $i = 2, \dots, n$, portanto os elementos da primeira coluna de $A^{(1)}$ por baixo da diagonal são nulos.
- Para poder definir m_{i1} estamos supondo que $a_{11}^{(0)} \neq 0$. Se este elemento for nulo será suficiente encontrar um coeficiente da primeira coluna de $A^{(0)}$ que seja não nulo, e depois temos de trocar a primeira linha com a linha de A associada a este coef. não nulo. Este coeficiente não nulo tem de existir porque A é não singular.

Primeiro passo do método de eliminação de Gauss

O primeiro passo gera portanto o sistema

$$A^{(1)}x = b^{(1)} \quad (\text{s1})$$

com

$$(A^{(1)}|b^{(1)}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array} \right)$$

Segundo passo do método de eliminação de Gauss

No segundo passo obtemos o sistema $A^{(2)}x = b^{(2)}$ equivalente ao sistema (s1), que tem a matriz dos coeficientes $A^{(2)}$ com valores nulos por baixo da diagonal na segunda coluna, ou seja com $a_{i2}^{(2)} = 0$ por $i = 3, \dots, n$.

Este sistema será obtido subtraindo as equações $i = 3, \dots, n$ a

segunda eq. multiplicada por $m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} :$

para $i = 3, \dots, n$ temos

eq. i do novo sistema =

[eq. i do sistema (s1)] - m_{i2} * [segunda eq. do sistema (s1)]

As primeira duas equações de (s1) são invariadas.

Segundo passo do método de eliminação de Gauss

Os elementos da matriz $A^{(2)}$ e do vetor $b^{(2)}$ são

$$\begin{aligned} a_{\ell j}^{(2)} &= a_{\ell j}^{(1)}, & b_{\ell}^{(2)} &= b_{\ell}^{(1)} & \ell &= 1, 2; j = 1, \dots, n; \\ a_{ij}^{(2)} &= a_{ij}^{(1)} - m_{i2}a_{2j}^{(1)}, & b_i^{(2)} &= b_i^{(1)} - m_{i2}b_2^{(1)} & i &= 3, \dots, n; j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

onde $m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$. Note que das equações em cima

- $a_{i2}^{(2)} = a_{i2}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{22}^{(1)} = 0$ por $i = 3, \dots, n$, portanto os elementos da segunda coluna de $A^{(2)}$ por baixo da diagonal são nulos. Claramente também $a_{i1}^{(2)} = a_{i1}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{21}^{(1)} = 0$ sendo que $a_{i1}^{(1)} = 0$ por $i = 3, \dots, n$ e $a_{21}^{(1)} = 0$
- Estamos supondo que $a_{22}^{(1)} \neq 0$ para poder definir m_{i2} . Se este elemento for nulo será suficiente encontrar pelo menos uma linha ($i > 2$) de $A^{(1)}$ que tem o segundo elemento não nulo. Este elemento tem de existir porque a matriz $A^{(1)}$ é não singular, sendo que o sistema (s1) é equivalente a (s0) que admite solução.

Segundo passo do método de eliminação de Gauss

O segundo passo gera portanto o sistema

$$A^{(2)}x = b^{(2)} \quad (\text{s2})$$

com

$$(A^{(2)}|b^{(2)}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array} \right)$$

Passo k geral do método

Prosseguindo, depois $k - 1$ passos obtemos o sistema

$$A^{(k-1)}x = b^{(k-1)} \quad (\text{sk-1})$$

com a matriz $A^{(k-1)}$ que terá elementos nulos por baixo da diagonal nas primeiras $k - 1$ colunas. Para transformar o sistema (sk-1) num sistema de matriz $A^{(k)}$ com elementos nulos também na coluna k por baixo da diagonal, implementamos o

Passo k :

subtrair às linhas $i = k + 1, \dots, n$ a linha k de $A^{(k-1)}$ multiplicada

por $m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$ e assim obteremos o sistema equivalente

$$A^{(k)}x = b^{(k)} \quad (\text{sk})$$

com ...

Passo k geral do método

$$(A^{(k)}|b^{(k)}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & a_{k+1\ k+1}^{(k)} & \cdots & a_{k+1n}^{(k)} & b_{k+1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & a_{n\ k+1}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)} \end{array} \right)$$

Note que temos anulado k colunas por baixo da diagonal depois k passos.

Passo k geral do método, coeficientes

Os coeficientes da matriz $A^{(k)}$ e do vetor independentes $b^{(k)}$ são, por $j = 1, \dots, n$

$$a_{\ell j}^{(k)} = a_{\ell j}^{(k-1)}, \quad b_{\ell}^{(k)} = b_{\ell}^{(k-1)} \quad \ell = 1, \dots, k$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik} a_{kj}^{(k-1)}, \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - m_{ik} b_k^{(k-1)} \quad i = k+1, \dots, n. \quad (2)$$

$$\text{onde } m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}.$$

Passo final $n - 1$ do método

Sendo que em cada passo eliminamos os elementos de uma coluna, para eliminar todos aqueles por baixo da diagonal precisamos fazer $n - 1$ passos com operações do tipo (2) (veja slide anterior). Assim **depois $n - 1$ passos obtemos um sistema triangular superior equivalente ao sistema inicial $Ax = b$ que é**

$$A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}$$

com

$$(A^{(n-1)}|b^{(n-1)}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k-1)} & \cdots & a_{kn}^{(k-1)} & b_k^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array} \right)$$

Algoritmo do método de eliminação de Gauss

Require: n , $A = (a_{ij})$, $b = (b_i)$

for $k = 1, \dots, n - 1$ **do**

for $i = k + 1, \dots, n$ **do**

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}};$$

▷ 1 divisão

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - m_{ik} b_k^{(k-1)};$$

▷ 1 soma e 1 produto

for $j = k + 1, \dots, n$ **do**

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik} a_{kj}^{(k-1)}$$

▷ 1 soma e 1 produto

end for

end for

end for

Algoritmo do método de eliminação de Gauss

- Note que no algoritmo, o ciclo **for** automaticamente incrementa o relativo índice.
- Na atualização da $a_{ij}^{(k)}$ desconsideremos as primeiras k colunas sendo que sabemos, das contas descritas anteriormente, que são nulas. Este fato permite de um lado de poupar operações e de outro de não ter erros de cancelamento subtrativo no código associado.

Em geral, cada vez que já se conhece um valor teórico de um qualquer método é boa prática evitar que o algoritmo faça as operações necessárias para obter este valor.

Algoritmo otimizado no uso da memória

Require: n , $A = (a_{ij})$, $b = (b_i)$

for $k = 1, \dots, n - 1$ **do**

for $i = k + 1, \dots, n$ **do**

$$m = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}};$$

$a_{ik} \leftarrow m$; $\triangleright$ Podemos pôr $a_{ik} = 0$ mas é preferível $a_{ik} \leftarrow m$ para gravar todos os m_{ik} que

vão ser uteis para determinar a fatoração LU de A

$$b_i = b_i - mb_k;$$

for $j = k + 1, \dots, n$ **do**

$$a_{ij} = a_{ij} - m \cdot a_{kj}$$

end for

end for

end for

Este algoritmo permite de gravar todos os passos na mesma estrutura $(A|b)$ sem necessidade de ocupar nova memória respeito aquela disponível no input. Este pode ser feito sempre que não precisarmos de reutilizar sucessivamente os dados de input A e b .

Custo Computacional do método de eliminação de Gauss

Note que em cada um dos $n - 1$ macro-passos k :

- temos $(n - k)$ iterações no ciclo **for** $i = k + 1, \dots, n$;
- em cada uma destes iterações temos $(n - k)$ iterações no ciclo **for** $j = k + 1, \dots, n$.
- Neste ciclo em j temos em cada iteração duas operações, assim em total no ciclo **for** $j = k + 1, \dots, n$ temos $2(n - k)$ operações.
- No ciclo **for** $i = k + 1, \dots, n$ temos em cada iteração, além destes $2(n - k)$, também 3 outras operações (1 divisão, 1 produto e 1 soma), assim podemos dizer de ter totalmente $2(n - k + 1) + 1$ operações em cada iteração i do ciclo **for** $i = k + 1, \dots, n$.

Podemos concluir que o numero total das operações é

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n [2(n - k + 1) + 1]$$

Custo Computacional do método de eliminação de Gauss

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n [2(n-k+1) + 1] &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[\sum_{i=k+1}^n 1 + 2 \sum_{i=k+1}^n (n-k+1) \right] = \\ \sum_{k=1}^{n-1} [(n-k) + 2 \sum_{i=k+1}^n (n-k+1)] &= \sum_{k=1}^{n-1} [(n-k) + 2(n-k+1)(n-k)] = \\ \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell + 2 \sum_{\ell=1}^{n-1} (\ell+1)\ell, &\text{ onde } \ell = n - k. \end{aligned}$$

Usando a regra de Gauss $\sum_{\ell=1}^{n-1} \ell = \frac{n(n-1)}{2}$, $\sum_{\ell=1}^{n-1} \ell^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

O custo computacional do método é

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell + 2 \sum_{\ell=1}^{n-1} (\ell+1)\ell &= \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell + 2 \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell^2 + 2 \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell = \\ 3 \frac{n(n-1)}{2} + 2 \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} &= \frac{2}{3}n^3 + \frac{n^2}{2} - \frac{7}{6}n. \end{aligned}$$

Eliminação de Gauss tem custo computacional da ordem $O(n^3)$.

Proposição

O método de eliminação de Gauss determina a solução do sistema se as todas ($k = 1, \dots, n$) matrizes de cabeça $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i \leq k; 1 \leq j \leq k}$ são não singulares.

Exemplo de aplicação do método

Desejamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= -4 \\ -5x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 &= \frac{5}{2} \end{cases}$$

Primeiro verificamos se o sistema admite solução única. Sendo que $\det(A) = 2 - 10 + 3 + 10 + 6 + 1 = 12 \neq 0$ então o sistema é consistente e admite uma única solução. Observamos que o sistema tem a matriz A e b de dimensão $n = 3$ portanto são esperados somente $n - 1 = 2$ passos da eliminação de Gauss.

A matriz A e o termo b serão indicado com $A^{(0)}$ e $b^{(0)}$ respetivamente

$$(A^{(0)}|b^{(0)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ -5 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{array} \right)$$

Exemplo de aplicação do método, Primeiro passo $k = 1$

Usando $(A^{(0)}|b^{(0)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ -5 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{array} \right)$ geramos os m_{i1} com $i = 2, 3$ para poder anular os termos a_{i1} , sendo que $a_{11} \neq 0$ não precisamos trocar alguma linha. Obtemos $m_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \frac{1}{2}$, $m_{31} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = -\frac{5}{2}$.

Usamos m_{21} para gerar a linha 2 de $A^{(1)}$ e $b^{(1)}$:

$$\begin{aligned} a_{22}^{(1)} &= a_{22}^{(0)} - m_{21}a_{12}^{(0)} = 1 - \frac{1}{2}(-1) = \frac{3}{2}; & a_{23}^{(1)} &= a_{23}^{(0)} - m_{21}a_{13}^{(0)} = -2 - \frac{1}{2}(2) = -3 \\ b_2^{(1)} &= b_2^{(0)} - m_{21}b_1^{(0)} = -4 - \frac{1}{2}(1) = -\frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Usamos m_{31} para gerar a linha 3 de $A^{(1)}$ e $b^{(1)}$:

$$\begin{aligned} a_{32}^{(1)} &= a_{32}^{(0)} - m_{31}a_{12}^{(0)} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}(-1) = -1; & a_{33}^{(1)} &= a_{33}^{(0)} - m_{31}a_{13}^{(0)} = 1 + \frac{5}{2}(2) = 6; \\ b_3^{(1)} &= b_3^{(0)} - m_{31}b_1^{(0)} = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}(1) = 5. \end{aligned}$$

Exemplo de aplicação do método, Segundo passo $k = 2$

Do primeiro passo obtemos então o sistema

$$(A^{(1)}|b^{(1)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -3 & -\frac{9}{2} \\ 0 & -1 & 6 & 5 \end{array} \right).$$

Agora usando a $m_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = -\frac{2}{3}$ no segundo passo anularemos os elementos (só a_{32}) por baixo da segunda coluna:

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - m_{32}a_{23}^{(1)} = 6 + \frac{2}{3}(-3) = 4; \quad b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - m_{32}b_2^{(1)} = 5 + \frac{2}{3}\left(-\frac{9}{2}\right) = 2.$$

O sistema final triangular superior será $A^{(2)}x = b^{(2)}$, com

$$(A^{(2)}|b^{(2)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -3 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array} \right).$$

Exemplo, resolução do sistema triangular superior final

O sistema final $A^{(2)}x = b^{(2)}$ resulta ser portanto

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ \frac{3}{2}x_2 - 3x_3 & = & -\frac{9}{2} \\ 4x_3 & = & 2 \end{array}$$

Se resolvemos este sistema usando o método descrito na aula anterior temos começando da última equação:

$$\begin{aligned} 4x_3 &= 2 \longrightarrow x_3 = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}x_2 - 3x_3 &= -\frac{9}{2} \longrightarrow x_2 = \frac{-\frac{9}{2} + 3x_3}{\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{9}{2} + \frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \longrightarrow x_1 = \frac{1 + x_2 - 2x_3}{2} = -1 \end{aligned}$$

A solução é portanto $(x_1, x_2, x_3) = (-1, -2, \frac{1}{2})$.

Com uma simples verificação podemos também confirmar que esta é a solução do sistema dado $Ax = b$.