Sistemas Lineares e resolução. Sistemas Triangulares

MS211 – Cálculo Numérico

Giuseppe Romanazzi

Agosto 2024

Introdução

Nesta aula vamos apresentar exemplos práticos e a teoria sobre a solução de sistemas lineares gerais do tipo $Ax = b$ com $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$ qualquer. Depois vamos analisar a resolução dos sistemas quadrados ($m = n$), e apresentaremos os sistemas triangulares e um método numérico para a sua resolução.

Conteúdo

Onde aparecem, donde vêm os sistemas lineares?

- Interseção entre retas, planos.
  Problemas associados

- Determinar os $x \in \mathbb{R}^n$ solução dos problemas lineares

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x) = 0 \end{cases}$$

onde $f_i(x) := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i$ é uma função linear em $x_1, \ldots, x_n$.

Onde aparecem, donde vêm os sistemas lineares?

- Problemas descritos das equações não lineares $f_i(x) = 0$ onde $f_i(x)$ é não linear. Por exemplo:
  encontrar x, y, z tais que

$$\begin{cases} sin(x) + e^{xy+3} + z - 3 = 0 \\ cos(x) + log(x + y) - 4 = 0 \\ 2^x + y - z * y + 2 = 0 \end{cases}$$

- Na resolução de problemas diferenciais do tipo encontrar a função $g(x)$ tal que: $g'(x) + -x \cdot g(x) + x \sin(x) = 4x$

Aplicando algum métodos numéricos (como Newton para sistemas não lineares) para resolver os problemas em cima aparecem sistemas lineares que necessitam de ser resolvidos. Estes métodos numéricos vão ser analisado nesta disciplina em aulas seguintes.

Sistema linear geral (retangular)

Dados $b \in \mathbb{R}^m$ e a matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de m linhas e n colunas, o problema de determinar $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = b$,
é chamado **sistema linear** de m equações e n incógnitas. O vetor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ é chamado solução do sistema linear, o vetor $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ é chamado vetor independente, e enfim $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n}$ também indicada com

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

é chamada matriz dos coeficientes do sistema linear $Ax = b$.

Vetores e vetores transpostos

- Um vetor $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ é chamado vetor coluna de n elementos.
- Um vetor $w = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{pmatrix}$ é chamado vetor linha de n elementos.
- Uma sequência $x = (x_i)_{i=1,\dots,n}$ é chamado simplesmente vetor de n elementos.
- Dado um vetor y denotaremos com y^t o vetor transposto de y, então se z for um vetor coluna de n elementos $z^t = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{pmatrix}$ é um vetor linha de n elementos.

  Vice-versa se w for um vetor linha de n elementos então $w^t = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ é um vetor coluna de n elementos.

Matriz transposta

A transposta de uma matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, indicada com A^t é a matriz de dimensão $n \times m$ obtida transferindo cada linha i na coluna i ou seja

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

Vetores linearmente independentes

- Dados dois vetores $y, z \in \mathbb{R}^n$ de n elementos, diremos que são *linearmente independentes* **se não existir algum** $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ tal que $y = \alpha z$.
- Diremos que dois vetores y, z são *linearmente dependentes* **se existir um** $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ tal que $y = \alpha z$.
- Um conjunto de k vetores $\{\bar{v}_i\}_{i=1,\ldots,k} \subset \mathbb{R}^n$, se diz linearmente independente se uma combinação linear deles é nula somente se as constantes que multiplicam os vetores são todas nulas. Ou seja se $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \bar{v}_i = 0$ acontece somente se $\alpha_i = 0$ por cada $i = 1, \ldots, k$.
- Se existir algum $\alpha_i \neq 0$ para que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \bar{v}_i = 0$ os vetores não são linearmente independentes
- Exemplo de três vetores linearmente independentes: (1 2 3), (4 5 5), (1 1 1)
- Outros vetores lin. indep. : $(1\ 2\ 3)^t$, $(4\ 5\ 6)^t$, $(1\ 1\ 2)^t$

Vetores não linearmente independentes (linearmente dependentes)

- Se existir algum $\alpha_i \neq 0$ para que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \bar{v}_i = 0$ os vetores não são linearmente independentes, ou seja são linearmente dependentes. Podemos exprimir um vetor deles como combinação linear dos outros.
- Exemplo de três vetores não linearmente independentes :
  $\bar{v}_1 = (1\ 2\ 3)$, $\bar{v}_2 = (4\ 5\ 5)$, $\bar{v}_3 = (-1\ \ -0.5\ \ 0.5)$.
  São lin. dependentes porque o terceiro vetor é obtido como a combinação dos primeiro dois:
  $\bar{v}_3 = \bar{v}_1 - \frac{1}{2}\bar{v}_2$. Note que cada dupla destes três vetores é em vez linearmente independentes.

Vetores linearmente independentes e o Determinante da matriz associada

Proposição

n vetores linha $\bar{\ell}_i$, com $i = 1, \ldots, n$, são linearmente independentes se e só se a matriz $A = \begin{pmatrix} \bar{\ell}_1 \\ \vdots \\ \bar{\ell}_n \end{pmatrix}$ *tem determinante não nulo*

Proposição

n vetores columna $\bar{c}_i$ com $i = 1, \ldots, n$ são linearmente independentes se e só se a matriz $A = \begin{pmatrix} \bar{c}_1 & \cdots & \bar{c}_n \end{pmatrix}$ *tem determinante não nulo.*

Matriz não singular

Definição

Uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *diz se não singular se tem n linhas (ou colunas) linearmente independentes.*

Proposição

Se uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *tem n linhas linearmente independentes então tem n colunas linearmente independentes (e vale o vice-versa também).*

Proposição

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *é não singular se e só se o determinante da matriz A é não nulo,* $\det(A) \neq 0$.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é não singular $\iff$
as n linhas (ou colunas) são lin. independentes $\iff$ $\det(A) \neq 0$

Sistemas lineares consistentes

Um sistema linear diz-se **consistente** se admite pelo menos uma solução.

Exemplo de sistemas consistentes

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x+4y & = & 6 \\ x-y & = & -1 \\ 2x+y & = & 2 \end{array}\right. \quad \textit{admite solução } (x,y) = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{4}{3}\right).$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x+4y & = & 1 \\ x-2y & = & 0 \end{array}\right. \quad \textit{admite solução } \left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}\right).$$

Exemplo de sistemas não consistentes

Os sistemas $\left\{\begin{array}{lcl} 2x+4y & = & 1 \\ x-y & = & -1 \\ 2x+y & = & 2 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{lcl} 2x+4y & = & 1 \\ x+2y & = & -2 \end{array}\right.$

não admitem solução, não são consistentes.

Posto de uma matriz

Denotamos com $(A|b)$ a matriz que se obtêm colocando o vetor b ao lado das colunas de A. Para saber se $Ax = b$ admite solução é necessário conhecer o posto (ou rank) das matrizes A e $(A|b)$

Definição

Chama se **posto** *(ou* **rank***) de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ o numero máximo de linhas linearmente independentes (ou equivalentemente de colunas lin. indep.) de A. É denotado com posto(A).*

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 5 \\ 6 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$ *tem no máximo 2 linhas linearmente independentes, posto$(A) = 2$, as duplas de linhas:*
$(1\ ,2\ ,3)$, $(3\ ,5\ ,5)$ *e* $(2\ ,4\ ,6)$, $(6\ ,10\ ,10)$ *são lin. independentes.*

Note que se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ então $posto(A) \leq \min\{m, n\}$.

Verificar se um sistema é consistente usando o posto

Proposição

O sistema $Ax = b$ é consistente (admite pelo menos uma solução) se e só se: $posto(A) = posto(A|b)$

Exemplo: $\left\{\begin{array}{lcl} 2x+4y & = & 6 \\ x-y & = & -1 \\ 2x+y & = & 2 \end{array}\right.$ tem $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ com posto 2, porque cada dupla de linhas é linearmente independente. Não tem 3 linhas lin. indep. Porque note que a $(2\ ,1) = 0.5(2\ ,4) + (1\ ,-1)$, por isso o máximo numero de linhas lin. indep. é dois.

Também a matriz $(A|b) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ tem posto 2, note que $(2,1,2) = 0.5(2,4,6) + (1,-1,-1)$.

Este sistema é então consistente, ouseja admite solução: $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{4}{3}$.

Solução de sistemas gerais ($m > n$)

$Ax = b$ com $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, incógnita $x \in \mathbb{R}^n$

Se $m > n$ O sistema tem **mais equações que incógnitas**, pode admitir solução somente se: tem pelo menos $m - n$ equações que podem ser deduzidas das outras.
Ou equivalentemente se tem no máximo n equações linearmente independentes, ou seja se $posto(A|b) \leq n$.

Depois temos sempre de verificar se $posto(A) = posto(A|b)$ **para ter a certeza de ter solução.**
Se $r := posto(A) = posto(A|b) < n$, teremos ∞^{n-r} soluções.
Se temos em vez $posto(A) = posto(A|b) = n$, temos uma única solução.

Solução de sistemas gerais ($m > n$), Exemplos

- $\left\{\begin{array}{lcl} 2x+4y & = & 1 \\ x-y & = & -1 \\ 2x+y & = & 2 \end{array}\right.$ tem $m=3$, $n=2$ não admite solução porque
  $(A|b) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ tem determinante não nulo, por isso $posto(A|b) = 3 > n$
  logo o sistema não pode admitir solução.

- $\left\{\begin{array}{lcl} 2x+4y & = & 6 \\ x-y & = & -1 \\ 2x+y & = & 2 \end{array}\right.$ admite uma única solução porque $posto(A|b) = posto(A) = 2$.
  A solução $(x, y) = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$.

- $\left\{\begin{array}{lcl} 2x+4y & = & 1 \\ x+2y & = & 0.5 \\ -x-2y & = & 2 \end{array}\right.$ tem $posto(A|b) = 2 = n$ mas este não me garante de ter solução, verificando
  temos $posto(A) = 1 \neq posto(A|b)$, por isso não temos soluções.

- $\left\{\begin{array}{lcl} 2x+4y & = & 1 \\ x+2y & = & 0.5 \\ -x-2y & = & -0.5 \end{array}\right.$ tem $posto(A|b) = 1 < n$ e sendo também que $posto(A) = 1$ então o
  sistema admite infinitas soluções ($\infty^{2-1} = \infty^{1}$ soluções),
  são todas aquelas do tipo $(-2y+0.5, y)$ para cada $y \in \mathbb{R}$.

Solução de sistemas gerais ($m < n$)

$Ax = b$, com $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, incógnita $x \in \mathbb{R}^n$

Se $m < n$ O sistema tem **mais incógnitas que equações**.
Se admitir solução (ou seja se $posto(A) = posto(A|b)$) admite infinitas soluções, em apricular admite ∞^{n-r} soluções onde $r = posto(A) = posto(A|b)$.

Isso porque r será sempre menor de n, sendo que vale (ver slide 15) $r \leq \min\{m, n\} = m < n$.

Notamos que se $posto(A) = m$ necessariamente também $posto(A|b) = m$ e por isso o sistema admitirá neste caso sempre ∞^{n-m} soluções.

Solução de sistemas gerais ($m < n$), Exemplos

- $\begin{cases} 2x - y + z & = & -2 \\ -3x + y + 2z & = & 1 \end{cases}$
  $m = 2, n = 3$, a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ tem posto $r = 2 = m$ e também $posto(A|b) = 2$ então o sistema é consistente e tem $\infty^{n-2} = \infty^1$ soluções do tipo $(1 + 3z, 4 + 7z, z)$ por cada $z \in \mathbb{R}$

- $\begin{cases} 2x - y + z & = & -2 \\ -4x + 2y - 2z & = & +4 \end{cases}$
  admite ∞^2 soluções porque $r = posto(A) = posto(A|b) = 1$. As soluções são do tipo $(x, y, -2 - 2x + y)$

- $\begin{cases} 2x - y + z & = & -2 \\ -4x + 2y - 2z & = & +3 \end{cases}$
  é inconsistente (não admite solução). Isso porque $posto(A) = 1$ e $posto(A|b) = 2$.

Sistemas lineares com $m = n$

$$Ax = b, \text{ com } A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ b, x \in \mathbb{R}^n$$

Se $m = n$ Sistema com n equações e n incógnitas

Teremos sempre $posto(A) \leq posto(A|b) \leq n$

- Se $\det(A) = 0$
  - Se $posto(A) < posto(A|b)$
    o sistema não admite solução (sistema inconsistente).
  - Se $r = posto(A) = posto(A|b)$
    o sistema admite ∞^{n-r} soluções onde $r := posto(A)$.
    Note que neste caso sendo $det(A) = 0$ temos necessariamente que $r < n$ porque não temos n linhas lin indep
- Se $\det(A) \neq 0$
  O sistema admite uma única solução e tem $posto(A) = n$.
  Note que $\det(A) \neq 0 \iff posto(A) = posto(A|b) = n$

Sistemas lineares com $m = n$, Exemplos

- $\begin{cases} x + 2y - 3z &= 1 \\ -2x - y + 2z &= 1 \\ -x + y - z &= 1 \end{cases}$ não admite solução.
  Note que $posto(A) = 2$, porque a última linha de A é obtida como soma das primeira duas.
  Em vez $posto(A|b) = 3$, porque $\det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$
- $\begin{cases} x & +2y - 3z &= 1 \\ -2x & +3y + 2z &= 2 \\ & 7y - 4z &= 4 \end{cases}$
  admite ∞^1 soluções.
  Porque $\det(A) = 0$ e $posto(A) = 2 = posto(A|b)$ porque a última equação é igual a soma 2*(eq.1)+(eq.2).

Sistemas lineares com $m = n$, Exemplos...

- $$\begin{cases} x + 2y - 3z & = & 1 \\ -2x + 3y + 2z & = & 2 \\ -x + y + z & = & 3 \end{cases}$$
  admite uma única solução porque $\det(A) = -4 \neq 0$

Métodos Diretos para a resolução de sistemas lineares

Chamamos **método direto** para a resolução de um sistema linear:

um método (ou regra) que num numero finito de passos permite de obter a solução exata do sistema linear.
Esta solução é exata na aritmética infinita (sem usar algum tipo de aproximação).

Um método direto é por exemplo a regra de Cramer.

Regra de Cramer

Dado o sistema $Ax = b$ com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$, com $det(A) \neq 0$ podemos achar a solução $x \in \mathbb{R}^n$ usando a seguinte regra (formula) chamada Regra de Cramer:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \text{por cada } j = 1 \ldots, n$$

onde $A_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz obtida de A substituindo a coluna j de A, $(a_{ij})_{i=1,\ldots,n}$, com o vetor b.

Exemplo: $\left\{ \begin{array}{c} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x - y - 2z = 2 \\ x + z = 0 \end{array} \right.$

Note que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, tem $\det(A) = -6$.

$b = (2\ 2\ 0)^t$ e o vetor das incógnitas é $\bar{x} = (x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3$. Aplicando Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-6}{-6} = 1; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-12}{-6} = 2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{6}{-6} = -1.$$

Note que usamos a notação $|B| := \det(B)$.

Se computassemos o determinante usando formulas diretas então a regra de Cramer será um método direto.

Regra de Laplace

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & \text{se } n = 1 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Onde $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$ é a matriz que se obtém eliminando a linha i e coluna j de A.

A regra de Laplace é direta portanto usando ela dentro a regra de Cramer obtemos um método direto.

Sistemas Triangulares

Seja $Ax = b$ um sistema linear de dimensão n
(ou seja com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$)

Definição

$Ax = b$ diz-se:

sistema triangular superior $\iff a_{ij} = 0, \ \forall i, j = 1, \ldots, n$ *com* $i > j$

sistema triangular inferior $\iff a_{ij} = 0, \ \forall i, j = 1, \ldots, n$ *com* $i < j$

As associadas matrizes se dizem respectivamente triangular superior ou triangular inferior.

Propriedades dos sistemas triangulares

- A transposta de uma matriz triangular superior é inferior, e vale também o vice-versa, a transposta de uma matriz triangular inferior é superior.
- As matrizes diagonais, ou seja tais que $a_{ij} = 0$ por cada $i \neq j$, são triangulares inferiores e superiores ao mesmo tempo.
- O determinante de matrizes triangulares é igual ao produto dos elementos diagonais

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} := a_{11} * a_{22} * \cdots * a_{nn}$$

Exemplos

- $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ \quad\ y - z = 1 \\ \qquad\ z = -2 \end{cases}$ é um sistema triangular superior

- $\begin{cases} x = 2 \\ 2x - y = 1 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$ é um sistema triangular inferior

- $\begin{cases} x + z = 2 \\ y + 4z = 1 \\ -3z = 2 \end{cases}$ é triangular superior, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

- $\begin{cases} x = 2 \\ x + 4y = 1 \\ -y = 2 \end{cases}$ é triangular inferior, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Resolução do sistema com matriz triangular superior não singular

$$\left\{\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 + & \cdots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\
 & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 + & \cdots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\
 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & a_{n-1n-1}x_{n-1} & + a_{n-1n}x_n & = b_{n-1} \\
 & & & & a_{nn}x_n & = b_n
\end{array}\right.$$

Para poder resolver o sistema precisamos que A seja não singular

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0.$$

Portanto precisamos que: $a_{ii} \neq 0$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

Método direto para sistema triangulares superiores

$$\left\{\begin{array}{cccccc}
a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 + & \cdots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\
 & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 + & \cdots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\
 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & a_{n-1n-1}x_{n-1} & + a_{n-1n}x_n & = b_{n-1} \\
 & & & & a_{nn}x_n & = b_n
\end{array}\right.$$

Começa obtendo x_n da última equação e depois x_{n-1} da penúltima, até chegar a obter x_1 :

Passo 1: $a_{nn}x_n = b_n \longrightarrow x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$, porque $a_{nn} \neq 0$;

Passo 2: Usamos a equação $n-1$ do sistema, e x_n do passo 1 para obter $x_{n-1} = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1n} \cdot x_n}{a_{n-1,n-1}}$;

Passo k: $x_{n-k+1} = \dfrac{b_{n-k+1} - \displaystyle\sum_{j=n-k+2}^{n} a_{n-k+1,j} \cdot x_j}{a_{n-k+1,n-k+1}}$

Passo n: Usando a primeira equação: $x_1 = \dfrac{b_1 - \displaystyle\sum_{j=2}^{n} a_{1j} \cdot x_j}{a_{11}}$

Algoritmo

Require: n, $A = (a_{ij})$, $b = (b_i)$

$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$ ▷ 1 divisão
$k = n$
for $k > 1$ **do** ▷ Ciclo termina quando $k = 1$, tem $n - 1$ iterações, este k é o k_{ciclo}
    $k \leftarrow k - 1$ ▷ atualização do indez é desconsiderada na conta das operações
    $soma = b_k$
    $j = k$
    for $j < n$ **do**
        ▷ Ciclo termina quando $j = n$, tem $n - k = n - (k_{ciclo} - 1) = n - k_{ciclo} + 1$ iterações
        $j \leftarrow j + 1$
        $soma = soma - a_{kj}x_j$ ▷ uma soma(subtração) e uma multiplicação
    end for
    $x_k = \frac{soma}{a_{kk}}$ ▷ $x_k = \dfrac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j}{a_{kk}}$ ▷ uma divisão
end for

Número de operações do algoritmo

Número de operações (flop) :

$\bullet n$ divisões

$$\bullet\sum_{k_{ciclo}=n}^{2} n-k_{ciclo}+1=\sum_{k=n-1}^{1} n-k=1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)=\sum_{j=1}^{n-1} j=\frac{n(n-1)}{2} \text{ adições}$$

$$\bullet 1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)=\sum_{j=1}^{n-1} j=\frac{n(n-1)}{2} \text{ multiplicações}$$

Numero total de operações: $n(n-1)+n=n^2$ operações.
Custo computacional é da ordem $O(n^2)$.

Usamos a regra de Gauss $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Qual é o algoritmo no caso de resolver um sistema triangular inferior?