Métodos do ponto fixo, Método de Newton-Raphson

MS211 – Cálculo Numérico – turma C

Giuseppe Romanazzi

Agosto 2024

Conteúdo

Métodos do ponto fixo

Um método iterativo do tipo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ é chamado método do ponto fixo, ou também método iterativo simples. O método de Newton é um método ponto fixo. É fácil construir um método do ponto fixo, dada uma qualquer função $\varphi(x)$ e um ponto x_0 pode sempre construir o método :

$$x_1 = \varphi(x_0) \longrightarrow x_2 = \varphi(x_1) \longrightarrow \cdots x_k = \varphi(x_{k-1}) \longrightarrow x_{k+1} = \varphi(x_k) \longrightarrow \cdots$$

Porém pode não convergir...

Teorema de convergência dos métodos do ponto fixo

Teorema

Seja $I = [\xi - c, \xi + c]$ um intervalo centrado num ponto fixo ξ de φ. Se valem as seguintes condições:

i) φ *e a sua derivada* φ' *são funções continuas em* I;

ii) $\exists M > 0$ *tal que* $|\varphi'(x)| \leq M < 1 \ \forall x \in I$;

iii) $x_0 \in I$;

então a sucessão $\{x_k\}$ *gerada de* φ *(ou seja com* $x_k = \varphi(x_{k-1})$*) converge ao ponto fixo* ξ *(*$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \xi$*).*

O intervalo I é chamado intervalo de contração.

Teorema de convergência dos métodos do ponto fixo

Demonstração.

Provamos o teorema em dois passos

1. Se $x_0 \in I$ então cada x_k continua a estar em I, $\forall k > 0$ $x_k \in I$.
2. $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$

Seja $x_k \in I$ usando a expansão em serie de Taylor de φ obtemos:
$x_{k+1} - \xi = \varphi(x_k) - \varphi(\xi) = \varphi'(c_k)(x_k - \xi)$ com
$c_k \in [\min(x_k, \xi), \max(x_k, \xi)] \subset I$.
Portanto $|x_{k+1} - \xi| = |\varphi'(c_k)||x_k - \xi|$, e por a hipótese ii) $|\varphi'(c_k)| < 1$, obtemos $|x_{k+1} - \xi| < |x_k - \xi|$ e então x_{k+1} é mais perto a ξ respeito a x_k e continuará portanto a estar no intervalo I, $x_{k+1} \in I$.
Provamos agora o ponto 2. Usando ii):
$|x_1 - \xi| = |\varphi(x_0) - \varphi(\xi)| = |\varphi'(c_0)||x_0 - \xi| \leq M|x_0 - \xi|$
$|x_2 - \xi| = |\varphi'(c_1)||x_1 - \xi| \leq M|x_1 - \xi| \leq M^2|x_0 - \xi|$
No passo k temos $|x_k - \xi| \leq M^k|x_0 - \xi|$. Agora sendo por hipótese que $0 < M < 1$ obtemos que $\lim_{k\to\infty} |x_k - \xi| \leq \lim_{k\to\infty} M^k|x_0 - \xi| = 0$ e portanto $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$. □

Estimativa do erro ao passo $k+1$

Teorema da Estimativa do erro do método do ponto fixo

Com a hipoteses i) ii) iii) do teorema anterior vale que $|x_k - \xi| < \dfrac{M}{1-M}|x_k - x_{k-1}|$ *onde lembramos que no intervalo de contração* I, $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \forall x \in I$.

Demonstração.

Usando que $x_k = \varphi(x_{k-1})$ e que $\varphi(\xi) = \xi$ obtemos
$|x_k - \xi| \leq |x_k - x_{k+1}| + |x_{k+1} - \xi| \leq M|x_k - x_{k-1}| + M|x_k - \xi|$
Portanto $(1-M)|x_k - \xi| \leq M|x_k - x_{k-1}|$ e sendo $1 - M > 0$ e dividindo por $1 - M$ temos a tese. $\square$

Determinar x_k que satisfaz $|x_k - \xi| < \varepsilon$

Notamos que o critério de precisão

$$|x_k - \xi| < \varepsilon \tag{1}$$

será satisfeito se, usando a estimativa da slide anterior, temos

$$|x_k - \xi| < \frac{M}{1-M}|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon \tag{2}$$

Por ter a relação $\frac{M}{1-M}|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ satisfeita temos de verificar a seguinte condição

$$|x_k - x_{k-1}| < \frac{1-M}{M}\varepsilon \tag{3}$$

Então

$$(3) \to (2) \to (1)$$

Achar um zero de f usando o método do ponto fixo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$

Dada a função f cujo zero ξ é incógnito, é possível encontrar uma outra função φ tal que o método do ponto fixo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ converge ao zero ξ de f?

Primeiro, podemos afirmar que é sempre possível encontrar uma função φ cujo ponto fixo é o zero de f. Por exemplo:

$\varphi(x) = x - f(x)$ é tal que

$$\varphi(x) = x \iff f(x) = 0 \tag{1}$$

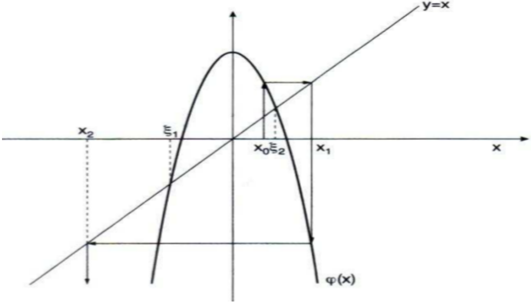
Um ponto fixo desta φ é portanto sempre um zero de f e, vice-versa, cada zero de f é um ponto fixo de φ.

Existem na verdade infinitas funções φ que satisfazem (1), por exemplo todas aquelas do tipo $\varphi(x) = x - A(x)f(x)$, com $A(x)$ não nula (ou seja com $A(x) \neq 0 \ \forall x$).

Mas, não todas as φ são tais que o método do ponto fixo associado $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ converge!

Procurar o zero de f com o método do ponto fixo

Não sempre $\varphi(x) = x - f(x)$ é a escolha melhor para construir o método. Porque uma φ útil tem de ser tal que o método do ponto fixo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ converge, além de satisfazer que $\varphi(x) = x \iff f(x) = 0$.
Por exemplo, $f(x) = x^2 + x - 6$, tem dois zeros $\xi_1 = -3$ e $\xi_2 = 2$.
Se usássemos a $\varphi_1(x) = x - f(x) = 6 - x^2$, tem como ponto fixos ξ_1, ξ_2, mas se aplicamos o método do ponto fixo a sucessão $\{x_k\}$ com $x_0 = 1$ diverge: $x_1 = \varphi_1(x_0) = 6 - 1 = 5$, $x_2 = \varphi_1(x_1) = -19$, $x_3 = -355, \ldots$



Escolha da função φ do método do ponto fixo, por achar os zeros de $f(x) = x^2 + x - 6$

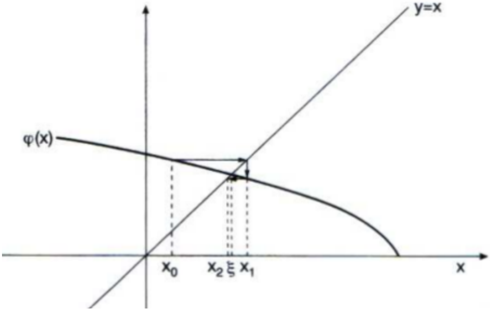
Pelo teorema anterior temos de encontrar um intervalo I centrado no ponto fixo e tal que $|\varphi'(x)| < 1, \forall x \in I$ e depois podemos pegar um qualquer $x_0 \in I$.
Analisando a derivada de $\varphi_1(x) = 6 - x^2$, obtemos $\varphi_1'(x) = -2x$.
Portanto $|\varphi'(x)| < 1 \iff |2x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.
Então com $\varphi_1(x)$ não podemos chegar a nenhum zero, porque o seu intervalo de contração é $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, mas não contem algum zero de f.

Escolha da função φ por achar o zero positivo de $f(x) = x^2 + x - 6$

Consideramos agora $\varphi_2(x) = \sqrt{6-x}$, que é definida por $x \leq 6$.
Esta função satisfaz a condição (por $x > 0$): $\varphi(x) = x \iff f(x) = 0$.
Isso porque se $\varphi_2(x) = \sqrt{6-x} = x$ então $x \geq 0$ e vale $\varphi_2(x) = x \iff$
$6 - x = x^2, x \geq 0 \iff x^2 + x - 6 = 0, x \geq 0 \iff f(x) = 0, x \geq 0$
ou seja φ_2 é uma candidata função para um método do ponto fixo para procurar o zero positivo $\xi_2 = 2$ de f.
Verificamos se ξ_2 está num intervalo onde $|\varphi_2'(x)| < 1$:

$$|\varphi_2'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{6-x}} < 1 \iff \sqrt{6-x} > \tfrac{1}{2} \iff$$
$$6 - x > \tfrac{1}{4} \iff x < \tfrac{23}{4} = 5.75$$

Então o intervalo de contração de φ_2 é $I = [0, 5.75]$ que por sorte contem o zero $\xi_2 = 2$, por isso se pegamos um $x_0 \in I$ podemos ter a convergência do método do ponto fixo $x_{k+1} = \sqrt{6 - x_k}$ ao zero $\xi_2 = 2$ de $f(x) = x^2 + x - 6$.



$$x_0 = 1.5, \ x_1 = \varphi_2(x_0) = \sqrt{6 - 1.5} \approx 2.12132$$

$$x_2 = \sqrt{6 - x_1} \approx 1.96944, \ x_3 = \sqrt{6 - x_2} \approx 2.00763,$$

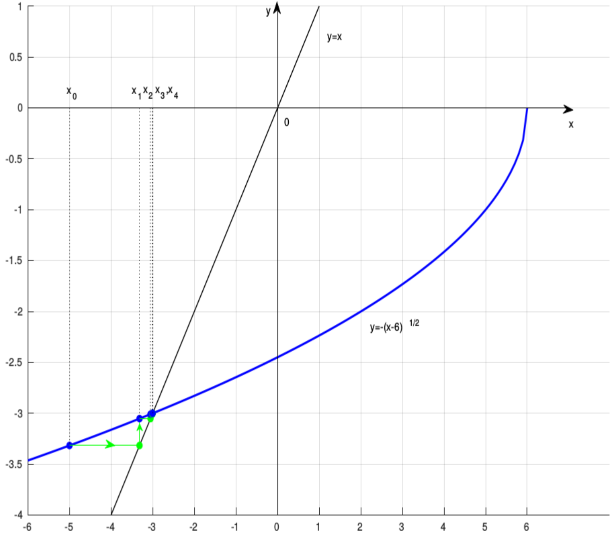
$$\ldots, \ x_7 \approx 2.00003, \ \ldots \lim_{k\to\infty} x_k = 2.$$

Escolha da função φ por achar o zero negativo de $f(x) = x^2 + x - 6$

Qual é a φ para achar o zero negativo $\xi_1 = -3$?
Notamos que $\varphi_3(x) = -\sqrt{6-x}$ é definida por $x \leq 6$, e toma sempre valor negativo por isso $x_k = \varphi_3(x_{k-1})$ será sempre negativo.
φ_3 será uma candidata funçaõ que define o método do ponto fixo para achar o zero negativo de f se existir um intervalo I que satisfaz $|\varphi_3'(x)| < 1$.

Esta última condição ($|\varphi_3'(x)| < 1$) é satisfeita por $x < 5.75$ (por aquele visto na slide 11), portanto podemos considerar um qualquer $I \subset]-\infty, 0[$. Por exemplo $I = [-10, -4]$.

Com $x_0 = -5$, obtemos $x_1 = -\sqrt{6+5} = -\sqrt{11} = -3.3166$,
$x_2 = -\sqrt{6-x_1} = -3.0523$, $x_3 = -3.0087$, $x_4 = -3.0015$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = -3$



Algoritmo do método do ponto fixo para procurar um zero de f

Inicialização	x_0 com controle que está num intervalo de contração
Repetir	1. $x_{k+1} = \varphi(x_k)$; 2. $k = k + 1$;
Até	Verificar o critério de paragem

Dois critérios de paragem do algoritmo são possíveis:

i) $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon_1$

ii) $|f(x_k)| < \varepsilon_2$

Note que pelo Teorema da estimativa do erro (slide 7),

- se queremos $|x_k - \xi| < \varepsilon$ e conhecemos $M < 1$ tal que $|\varphi'(x)| \leq M$ no intervalo de contração que contem x_0 e ξ é suficiente parar quando $\dfrac{M}{1-M}|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, ousseja usar

$$|x_k - x_{k-1}| < \frac{1-M}{M}\varepsilon$$

Ordem de Convergência dos métodos do ponto fixo

Teorema

Seja $\{x_k\}$ a sucessão obtida pelo método do ponto fixo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ suposto convergente (ao ponto fixo ξ) e seja $e_k = |x_k - \xi|$ o erro ao passo k do método respeito o ponto fixo ξ então vale que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = |\varphi'(\xi)|$$

Demonstração.

Por cada k existe um valor $c_k \in (\min(x_k, \xi), \max(x_k, \xi))$ tal que $e_{k+1} = |x_{k+1} - \xi| = |\varphi(x_k) - \varphi(\xi)| = |\varphi'(c_k)||x_k - \xi| = |\varphi'(c_k)|e_k$. Por isso $\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = \lim_{k\to\infty} |\varphi'(c_k)| = |\varphi'(\xi)|$. □

Métodos do ponto fixo, lineares e mais que lineares

- Os métodos do ponto fixo convergentes se satisfazem $|\varphi'(\xi)| < 1$ são pelo menos lineares, ou seja tem ordem de convergência ≥ 1
- O método do ponto fixo será linear se $0 < |\varphi'(\xi)| < 1$ e será mais que linear se $\varphi'(\xi) = 0$.
- Ter $\varphi'(\xi) = 0$ significa que obtemos $e_{k+1} \approx 0 \cdot e_k$ por k suficientemente grande. Isso porque pelo teorema anterior se o método convergir então $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{e_{k+1}}{e_k} = |\varphi'(\xi)| = 0$.
- Um tal método (com $\varphi'(\xi) = 0$) converge mais rapidamente dos métodos lineares. Isso porque os métodos lineares satisfazem $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{e_{k+1}}{e_k} = C$ com $0 < C < 1$, e têm então $e_{k+1} \approx Ce_k$.
- Os métodos de ponto fixo convergentes mais rápidos são então aqueles que tem $\varphi'(\xi) = 0$, com ξ um ponto fixo de φ.
- O método de Newton satisfaz $\varphi'(\xi) = 0$.

Método de Newton (ou de Newton-Raphson)

Dada uma função f com zero em ξ e tal que $f'(\xi) \neq 0$

- O método de Newton para procurar um zero ξ da função f é um método do ponto fixo associado a uma φ do tipo $\varphi(x) = x + A(x)f(x)$ tal que $\varphi'(\xi) = 0$.
- Deduzimos o método do Newton, determinando uma $A(x)$ para que $\varphi'(\xi) = 0$

Sendo que $f(\xi) = 0$ temos que $\varphi'(\xi) = 1 + A'(\xi)f(\xi) + A(\xi)f'(\xi) = 1 + A(\xi)f'(\xi)$ por isso se $\varphi'(\xi) = 0$ então necessariamente $A(\xi) = -\frac{1}{f'(\xi)}$. O método de Newton usa $A(x) = -\dfrac{1}{f'(x)}$, ousseja é associado a $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.
Portanto o método de Newton é

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Interpretação geométrica do método de Newton

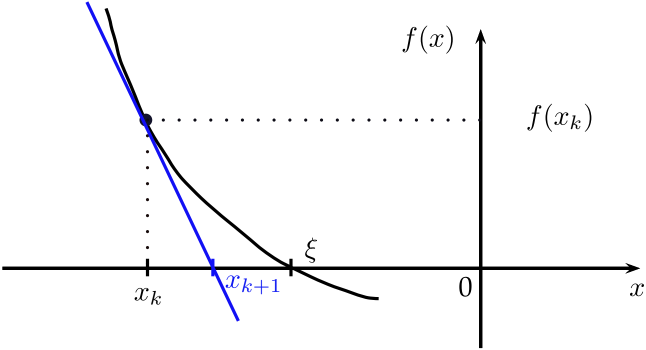
De $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ obtemos que $\dfrac{0 - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = f'(x_k)$
portanto x_{k+1} é a abscissa do ponto de interseção com o eixo das x ($y = 0$) da reta passante por $(x_k, f(x_k))$ com inclinação $f'(x_k)$, ou seja é a solução x do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{y - f(x_k)}{x - x_k} = f'(x_k) & \text{(equação da reta por } (x_k, f(x_k)) \text{ com inclinação } f'(x_k)\text{)} \\[2ex] y = 0 & \text{(equação do eixo das x)} \end{cases}$$

$$\longrightarrow x_{k+1} = x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Interpretação geométrica do método de Newton

x_{k+1} é a interseção com o eixo das x da reta tangente a $f(x)$ no ponto x_k.



Convergência do Método de Newton ao zero de f

Teorema de Convergência

Sejam f, f', f'' continuas num intervalo I centrado no zero ξ de f, e **se**

1. $f'(\xi) \neq 0$,
2. $\exists\ 0 < M < 1$ *tal que* $\forall x \in I$: $\left|\dfrac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\right| = |\varphi'(x)| \leq M < 1$,
3. $x_0 \in I$

então *o método de Newton* $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

- **converge** *ao zero* ξ, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \xi$
- *Se* $f''(\xi) \neq 0$ **tem ordem 2** *(ordem quadrática), ou seja vale que* $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{e_{k+1}}{e_k^2} = C > 0$.
- *Se* $f''(\xi) = 0$ *o método tem ordem superior a 2,* $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{e_{k+1}}{e_k^2} = 0$

Exemplo: Determinar um intervalo de contração

Seja $f(x) = x^3 - 9x + 3$,
Qual intervalo de contração contem um zero de f?
Sendo que $f(2)f(3) < 0$ e $f'(x) = 3x^2 - 9 > 0$ por $x > \sqrt{3} \approx 1.732$ então existe um único zero ξ de f em $[2, 3]$. Notamos que $f'(x)$, $f''(x) = 6x$ são continuas. Agora sendo $\xi \in [2, 3]$ e $f'(x) > 0$ em $[2, 3]$ obtemos $f'(\xi) \neq 0$.

Verificamos se em $[2, 3]$ temos $|\varphi'_{Newton}(x)| = \left| \dfrac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| < 1$:

$$\frac{|(x^3 - 9x + 3)6x|}{(3x^2 - 9)^2} < 1 \iff |6x^4 - 54x^2 + 18x| < 9x^4 - 54x^2 + 81.$$

Notamos que $6x^4 + 18x < 9x^4 + 81$ por todos os valores $x \in [2, 3]$ porque sempre teremos $6x^4 < 9x^4$ e $18x < 81$ em $[2, 3]$.
Então temos $6x^4 - 54x^2 + 18x < 9x^4 - 54x^2 + 81$ em $[2, 3]$.

Mas $6x^4 - 54x^2 + 18x > -9x^4 + 54x^2 - 81$ não vale sempre em $[2, 3]$.
Por exemplo por $x = 2$ obtemos $6x^4 - 54x^2 + 18x = -84$ e
$-9x^4 + 54x^2 - 81 = -9$.
Em vez em $[2.5, 3]$ teremos sempre que
$6x^4 - 54x^2 + 18x > -9x^4 + 54x^2 - 81$.
Isso pode ser verificado, se provamos que

$$g(x) = 15x^4 - 108x^2 + 18x + 81 > 0 \text{ por cada } x \in [2.5, 3]. \qquad (2)$$

Note que $g(2.5) > 0$ e $g(3) > 0$ mas isso não me garante que g seja positiva em $[2.5, 3]$.
Mas se for $g'(x) > 0$ em $[2.5, 3]$ (ou seja g é crescente) então satisfazeremos (2).
Analisamos $g'(x) = 60x^3 - 216x + 18$, se for sempre positiva então g será crescente. Analisamos $g''(x) = 180x^2 - 216$ notamos que é uma parábola que toma valor nulo em $x = \pm 216/180 = \pm 1.2$, e que será positiva para $x > 1.2$ e então $g''(x) > 0$ em $[2.5, 3]$.

$$g''_{|_{[2.5,3]}}(x) > 0 \to g'_{|_{[2.5,3]}} \text{ é crescente} \to g'_{|_{[2.5,3]}}(x) > g'(2.5) = 415.5 > 0 \to$$
$$\to g_{|_{[2.5,3]}} \text{ é crescente} \to g_{|_{[2.5,3]}}(x) > g(2.5) = 36.9375 > 0 \to g_{|_{[2.5,3]}} > 0.$$

Por isso se escolhemos $x_0 \in I = [2.5, 3]$ o método de Newton satisfaz as condições 1,2,3 e por isso convergirá e terá ordem 2.

Exemplo: aplicação do método de Newton

Usando $x_0 = 2.5$, e critério de saída $|f(x_k)| < 10^{-4}$ obtemos com $f(x) = x^3 - 9x + 3$, $f'(x) = 3x^2 - 9$:

$$x_1 = 2.5 - \frac{f(2.5)}{f'(2.5)} \approx 2.897,\ f(x_1) = 1.2477$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 2.82036,\ f(x_2) = 0.051175$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approx 2.81692,\ f(x_3) = 1.0024 \cdot 10^{-4}$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \approx 2.81691,\ f(x_4) = 3.8756 \cdot 10^{-10}$$

Exemplo: aplicação gráfica do método de Newton