

Método da secante. Método do ponto fixo

MS211 – Cálculo Numérico

Giuseppe Romanazzi

Agosto 2024

Contéudo

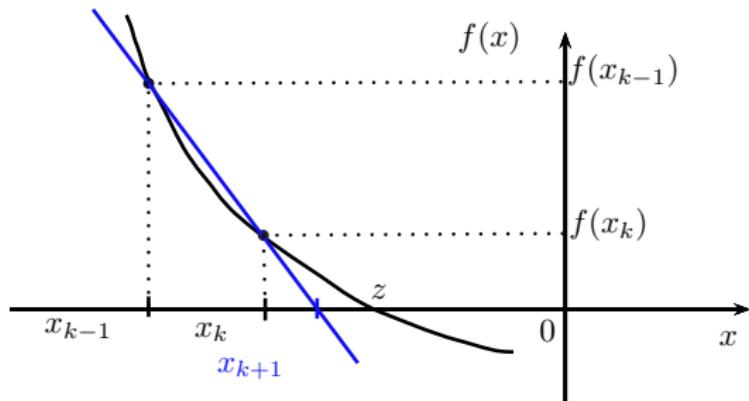
1 Método da Secante

2 Método do ponto fixo

- Achar um zero de f com o método do ponto fixo

Método da Secante

Este método usa duas aproximações x_{k-1} e x_k do zero de uma função f para poder achar uma aproximação melhor x_{k+1} . A aproximação é obtida através a interseção com o eixo das x da linha “secante” que passa pelos pontos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_k, f(x_k))$



Notamos que este método não usa, diferentemente da bisseção e falsa posição, os extremos do intervalo $[a, b]$ onde é procurado o zero.

Formula do Método da Secante

A iteração $k + 1$ do método da secante, ou seja x_{k+1} , é obtida portanto como a solução x do sistema

$$\begin{cases} \frac{y - f(x_{k-1})}{x - x_{k-1}} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} & \text{(equação reta secante)} \\ y = 0 & \text{(equação do eixo das } x\text{)} \end{cases} \rightarrow x_{k+1} = x$$

Temos quatro possíveis expressões de x_{k+1}

$$x_{k+1} = \frac{f(x_k)x_{k-1} - f(x_{k-1})x_k}{f(x_k) - f(x_{k-1})}; \quad x_{k+1} = \frac{f(x_{k-1})x_k - f(x_k)x_{k-1}}{f(x_{k-1}) - f(x_k)} \quad (1)$$

$$x_{k+1} = x_{k-1} - f(x_{k-1}) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad (2)$$

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad (3)$$

Observações

- Note como as formulas (1) do método da secante são similares aquela da falsa posição
- Onde evitar erros de cancelamento subtrativo que acontecem com estas formulas (1) quando $x_k \approx x_{k-1}$ preferem-se usar as formulas (2) ou (3).

Algoritmo e critérios de precisão (ou de paragem)

Inicialização	x_0, x_1 dados de input
Repetir	<ol style="list-style-type: none"> 1. $x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})};$ 2. $k = k + 1;$
Até	Verificar o critério de paragem

Dois critérios de paragem do algoritmo são possíveis:

i) $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$

ii) $|f(x_k)| < \varepsilon$

- O critério i) garante a saída do algoritmo quando duas iterações sucessivas são próximas a menos de ε , isso porem não garante que $|x_k - z| < \varepsilon$. Mas se for ε muito pequeno e temos garantia da convergência (ver teorema na página 9), é esperável que, satisfeito o critério i), o x_k seja próximo do zero.
- O critério ii) pode ser usado com o critério i). É também possível usar dois ε diferentes, por exemplo $|x_k - x_{k-1}| < 10^{-4}$ e $|f(x_k)| < 10^{-2}$

Exemplo

Procurar o zero de $f(x) = x \log x - 1$ em $[2, 3]$. Sabemos já que em $[2, 3]$ existe um único zero de f , escolhemos o $x_0 = 2$ e $x_1 = 3$, poderia também ter usado $x_0 = 2$ e $x_1 = 2.5$, porque a escolha é livre, porem no teorema a seguir vamos ver como é importante usar x_0, x_1 perto de zero.

Com $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, e usando como condição de paragem

($|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon_1$ e $|f(x_k)| < \varepsilon_2$) com $\varepsilon_1 = 10^{-4}$, $\varepsilon_2 = 10^{-6}$, obtemos sendo $f(x_0) = -0.39794$, $f(x_1) = 0.431367$ as seguintes iterações:

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \approx 2.504964 \quad \text{com } f(x_2) \approx -0.001016$$

$$x_3 = x_2 - f(x_2) \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \approx 2.506188 \quad \text{com } f(x_3) \approx 2.802 \cdot 10^{-6}$$

$$x_4 = x_3 - f(x_3) \frac{x_3 - x_2}{f(x_3) - f(x_2)} \approx 2.506184 \quad \text{com } f(x_4) \approx -3.555 \cdot 10^{-10}$$

x_4 satisfaz ambas as condições de paragem:

$$|x_4 - x_3| \approx 4 \cdot 10^{-6} < 10^{-4}; \quad |f(x_4)| < 10^{-6},$$

O algoritmo para esta quarta iteração.

Métodos Globais e Locais

- Os **métodos globais** convergem a um zero da função sempre que existir um único zero na região considerada. Os métodos da bisseção e da falsa posição são globais.
- Os **métodos locais** para convergir precisam usar iterações iniciais perto da raiz procurada e somente neste caso os métodos locais têm a garantia de convergir a raiz.
Os métodos da secante e de Newton-Raphson são locais.

Convergência

Teorema (Convergência do método da secante)

Seja f com pelo menos um zero z em $[a, b]$, e tal que $f'(x) \neq 0$ por cada $x \in [a, b]$, e tal que admite derivada segunda continua em $[a, b]$. Se os pontos x_0 e x_1 foram tomados bastante perto do zero z então o método da secante é convergente e tem ordem $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} (\approx 1.618)$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = 0 \quad , \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = C$$

Propriedades:

- Vale que o erro no passo $k + 1$ satisfaz

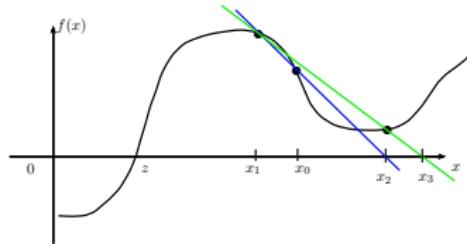
$$e_{k+1} \leq M \cdot e_k \cdot e_{k-1}$$

onde $M = \frac{M_2}{2M_1}$ com $M_1 \leq \inf_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ e $\sup_{x \in [a, b]} |f''(x)| \leq M_2$.

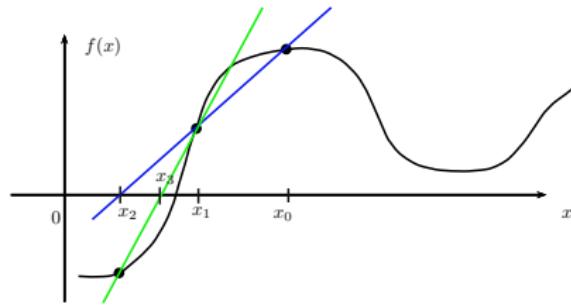
- x_0 e x_1 “**bastante pertos do zero**” significa neste método que:
 $|x_0 - z| \leq \frac{1}{M}$ e $|x_1 - z| < \frac{1}{M}$

Interpretação geométrica da escolha de x_0 , x_1

Mostramos graficamente a importância de tomar x_0 e x_1 perto da raiz z . Se x_0, x_1 foram distantes da raiz pode acontecer que $\{x_k\}$ não converge a z , e pode até ir ao infinito se não existem mais zeros além de z .



Se em vez x_0, x_1 foram perto do zero e tomados na região da curva com a mesma concavidade ou monotonocidade da região que contem o zero, teremos convergência



Ponto fixo de uma função φ

Definição (Ponto fixo)

Um ponto $\xi \in \mathbb{R}$ é chamado ponto fixo da função φ se: $\varphi(\xi) = \xi$

Para determinar os ponto fixos de φ é suficiente achar as interseções da função φ com a bissetriz $y = x$, ou seja resolver a equação

$$\varphi(x) = x.$$

Por exemplo $\varphi(x) = 2x$

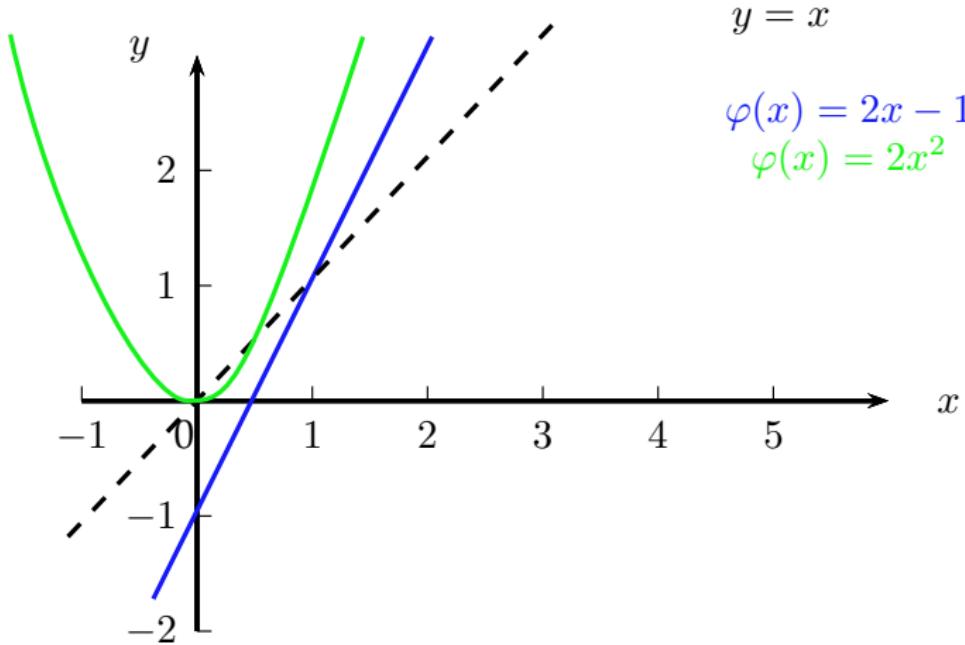
tem como ponto fixo $\xi = 0$, porque de $2x = x$ obtemos $x = 0$.

Em vez $\varphi(x) = 2x - 1$ tem como ponto fixo $\xi = 1$,

porque $2x - 1 = x$ implica que $x = 1$.

Não sempre o ponto fixo é único:

$\varphi(x) = 2x^2$ tem dois pontos fixos $\xi_1 = 0$ e $\xi_2 = \frac{1}{2}$.



Métodos do ponto fixo

Um método iterativo do tipo

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

é dito método do ponto fixo, ou também método iterativo simples.

O método de Newton-Raphson é do ponto fixo, em vez todos os métodos vistos até agora não são do ponto fixo.

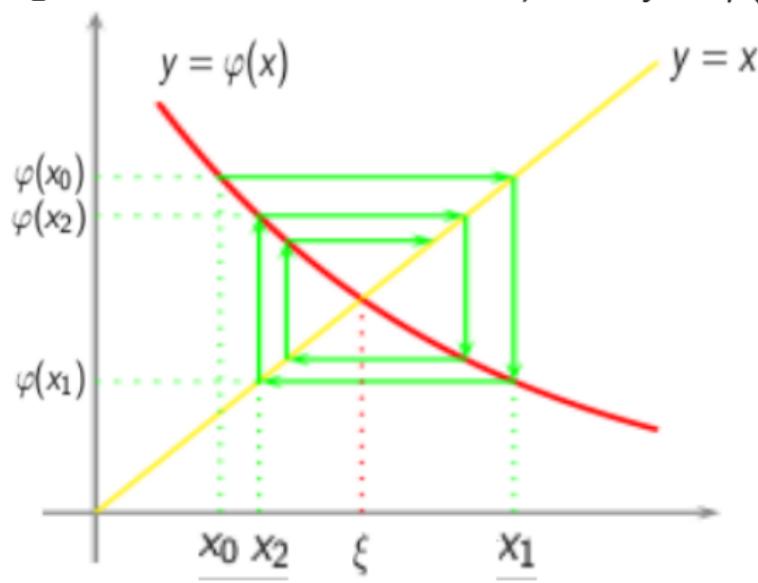
É fácil construir um método do ponto fixo,
dada uma qualquer função $\varphi(x)$ e um ponto x_0 :

$$x_1 = \varphi(x_0) \longrightarrow x_2 = \varphi(x_1) \longrightarrow \cdots x_k = \varphi(x_{k-1}) \longrightarrow x_{k+1} = \varphi(x_k) \longrightarrow \cdots$$

Porém pode não convergir...

Determinação gráfica dos métodos do ponto fixo

Dada x_0 e a função φ temos que $x_1 = \varphi(x_0)$, portanto x_1 é achada no eixo das x como a abscissa da interseção da reta $y = \varphi(x_0)$ com a bissetriz $y = x$. De x_1 computamos $\varphi(x_1)$ e determinamos x_2 como a abscissa da interseção de $y = \varphi(x_1)$ com a bissetriz ...



Métodos do ponto fixo, convergência

Não todos os métodos do ponto fixo convergem Por exemplo, considere $\varphi(x) = 2x + 1$ e toma $x_0 = 3$ tem $x_1 = \varphi(x_0) = 2 * 3 + 1 = 7, x_2 = \varphi(x_1) = 15, x_3 = 31$, a sucessão x_k diverge (vá ao infinito).

Mas, se um método do ponto fixo converge convergirá exatamente a um ponto fixo de $\varphi(x)$.

Se for $\varphi(x) = \frac{x}{3} + 2$ obtemos, dada a iteração inicial $x_0 = 5$:

$$x_1 = \frac{5}{3} + 2 = 3.667, x_2 = \frac{x_1}{3} + 2 = 3.222, x_3 = 3.0741, \\ x_4 = 3.0247, \dots x_8 = 3.0003, x_9 = 3.0001, x_{10} = 3.000003, \dots$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 3.$$

Então a sucessão $\{x_k\}$ converge a 3. Notamos que $x = 3$ é mesmo o ponto fixo de $\varphi(x) = \frac{x}{3} + 2$, porque $\varphi(3) = 3$. Este não acontece por caso ... vale o seguinte teorema

Convergência ao ponto fixo

Um método do ponto fixo, $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, se convergir, pode convergir somente ao ponto fixo de φ .

Teorema de Convergência ao ponto fixo

Seja φ uma função continua e $\{x_k\}$ a sucessão gerada do associado método do ponto fixo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$. Se existir $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = c, \text{ então } c \text{ é um ponto fixo de } \varphi.$$

Demonstração.

Se $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = c$ temos também que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = c$ mas sendo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_k) = c. \quad (4)$$

Sendo φ uma função contínua e por a hipótese de convergência ($\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = c$) temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_k) = \varphi\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k\right) = \varphi(c). \quad (5)$$

Por isso obtemos de (4) e (5), que $\varphi(c) = c$. O ponto c é portanto um ponto fixo de φ .



Teorema de convergência dos métodos do ponto fixo

Teorema

Seja I um intervalo que contém um ponto fixo ξ de φ . Se valem as seguintes condições:

- i) φ e a sua derivada φ' são funções continuas em I ;
- ii) $\exists M > 0$ tal que $|\varphi'(x)| \leq M < 1 \quad \forall x \in I$;
- iii) $x_0 \in I$;

então a sucessão $\{x_k\}$ gerada de φ (ou seja com $x_k = \varphi(x_{k-1})$) converge ao ponto fixo ξ ($\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$).

O intervalo I é chamado intervalo de contração.

Teorema de convergência dos métodos do ponto fixo

Demonstração.

Provamos o teorema em dois passos

- 1 Se $x_0 \in I$ então cada x_k estará em I , $\forall k > 0$ $x_k \in I$.
- 2 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$

Seja $x_k \in I$ usando a expansão em série de Taylor de φ obtemos:

$$x_{k+1} - \xi = \varphi(x_k) - \varphi(\xi) = \varphi'(c_k)(x_k - \xi) \text{ com}$$

$$c_k \in [\min(x_k, \xi), \max(x_k, \xi)] \subset I.$$

Portanto $|x_{k+1} - \xi| = |\varphi'(c_k)| |x_k - \xi|$, e por a hipótese ii) $|\varphi'(c_k)| < 1$, obtemos $|x_{k+1} - \xi| < |x_k - \xi|$ e então x_{k+1} é mais perto a ξ respeito a x_k e continuará portanto a estar no intervalo I , $x_{k+1} \in I$.

Provamos agora o ponto 2. Usando ii):

$$|x_1 - \xi| = |\varphi(x_0) - \varphi(\xi)| = |\varphi'(c_0)||x_0 - \xi| \leq M|x_0 - \xi|$$

$$|x_2 - \xi| = |\varphi'(c_1)||x_1 - \xi| \leq M|x_1 - \xi| \leq M^2|x_0 - \xi|$$

No passo k temos $|x_k - \xi| \leq M^k|x_0 - \xi|$. Agora sendo por hipótese que $0 < M < 1$ obtemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - \xi| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} M^k|x_0 - \xi| = 0$ e portanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi.$$



Estimativa do erro ao passo $k + 1$

Teorema da Estimativa do erro do método do ponto fixo

Com a hipóteses i) ii) iii) do teorema anterior vale que

$|x_k - \xi| < \frac{M}{1-M} |x_k - x_{k-1}|$ onde lembramos que no intervalo de contração I , $|\varphi'(x)| \leq M < 1$, $\forall x \in I$.

Demonstração.

Usando que $x_k = \varphi(x_{k-1})$ e que $\varphi(\xi) = \xi$ obtemos

$$|x_k - \xi| \leq |x_k - x_{k+1}| + |x_{k+1} - \xi| \leq M|x_k - x_{k-1}| + M|x_k - \xi|$$

Portanto $(1 - M)|x_k - \xi| \leq M|x_k - x_{k-1}|$ e sendo $1 - M > 0$ e dividindo por $1 - M$ temos a tese. □

Determinar x_k que satisfaz $|x_k - \xi| < \varepsilon$

Notamos que o critério de precisão

$$|x_k - \xi| < \varepsilon \quad (1)$$

será satisfeito se, usando a estimativa da slide anterior, temos

$$|x_k - \xi| < \frac{M}{1-M} |x_k - x_{k-1}| < \varepsilon \quad (2)$$

Por ter a relação $\frac{M}{1-M} |x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ satisfeita temos de verificar a seguinte condição

$$|x_k - x_{k-1}| < \frac{1-M}{M} \varepsilon \quad (3)$$

Então

$$(3) \rightarrow (2) \rightarrow (1)$$

Achar um zero de f usando o método do ponto fixo

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

Dada a função f cujo zero ξ é incógnito, é possível encontrar uma outra função φ tal que o método do ponto fixo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ converge ao zero ξ de f ?

Primeiro, podemos afirmar que é sempre possível encontrar uma função φ cujo ponto fixo é o zero de f . Por exemplo:

$\varphi(x) = x - f(x)$ é tal que

$$\varphi(x) = x \iff f(x) = 0 \quad (6)$$

Um ponto fixo desta φ é portanto sempre um zero de f e, vice-versa, cada zero de f é um ponto fixo de φ .

Existem na verdade infinitas funções φ que satisfazem (6), por exemplo todas aquelas do tipo $\varphi(x) = x - A(x)f(x)$, com $A(x)$ sempre não nula (ou seja com $A(x) \neq 0 \ \forall x$).

Mas, não todas as φ são tais que o método do ponto fixo associado $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ converge!