

Zeros de Funções.  
Algoritmos iterativos.  
Método de Bisseção.

MS211 – Cálculo Numérico – Turma C

Giuseppe Romanazzi

Agosto 2024

# Contéudo

## 1 Zeros

- Definição
- Zeros de polinômios

## 2 Procedimento para achar os zeros

- Passo 1, Localização dos zeros
  - Teorema 1
- Passo 2, Aplicação de Métodos numéricos
  - Critérios de precisão na aproximação dos zeros
- Algoritmos Iterativos

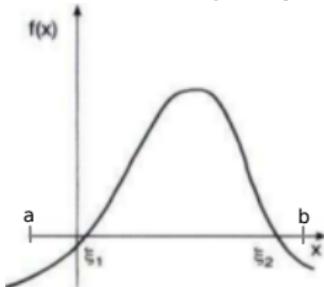
## 3 Método de Bisseção

# Definição de zero de uma função real

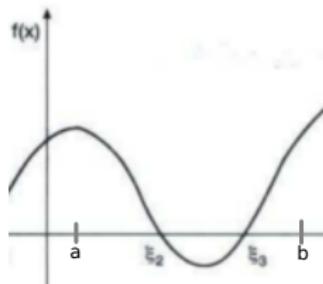
Um valor  $\xi \in \mathbb{R}$  é dito zero da função real  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se

$$f(\xi) = 0$$

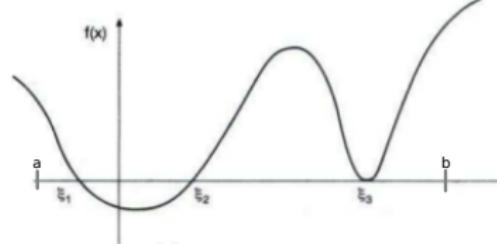
Uma função pode ter 0, 1, ou mais zeros. Exemplos:



Dois zeros  $\xi_1, \xi_2$  em  $[a, b]$ .



Dois zeros em  $[a, b]$



Três zeros em  $[a, b]$   
Dois zeros em  $[0, b]$

Não há zeros em  $[a, 0]$

# Problemas dos zeros: Encontrar $x$ tal que $f(x) = 0$

Donde vem o problema de achar os zeros de uma função?

- Equações não lineares:

$$\sin(x) + \cos(x) - e^x = 0; \quad \ln x + \sin x = -3;$$

$$x^2 + x - \tan x = x \cos(x)$$

Todos estes problemas são do tipo  $f(x) = 0$ .

No último caso  $f(x) = x^2 + x - \tan x - x \cos(x)$ .

- Interseção de duas curvas (funções):  $\Psi(x) = \Phi(x)$ .

Neste caso a função  $f$  é  $f = \Psi - \Phi$ . O problema de achar os zeros de  $f$  é equivalente ao encontrar os  $x$  tais que  $\Psi(x) - \Phi(x) = 0$ .

- Determinar os  $x$  tais que uma função chega a um dado nível

Exemplos:

Determinar os  $x$  tais que  $g(x) = \ell$  com  $\ell \in \mathbb{R}$ ;

Resolver  $x^2 = 3$ ;  $\ln(x) + \sin(x) = 2$ ; etc.

Nestes casos as soluções são os zeros de  $f(x) = g(x) - \ell$ .

# Zeros de polinômios de grau 1 (retas)

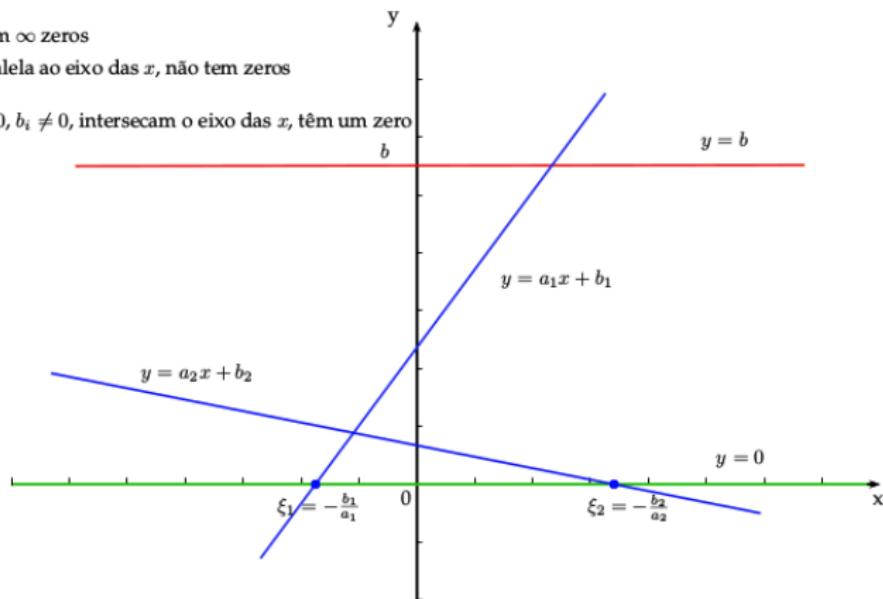
As Retas no plano  $xy$  de equação  $y = ax + b$  representam os gráficos de polinômios de grau 1:  $f(x) = ax + b$ .

Três casos são possíveis:

- $a = 0, b \neq 0$ . A função  $f$  é constante  $f(x) = b$ .  
Não há zeros, o seu gráfico é uma reta que não interseca o eixo das  $x$
- $a \neq 0$ . Existe um só zero  $\xi = -\frac{b}{a}$ .  
 $f(x) = ax + b$  tem como gráfico uma reta incidente com o eixo das  $x$ .
- $a = 0, b = 0$ . Tem infinitos zeros, ou seja a função é  $f(x) = 0$  (função nula). O gráfico da  $f$  coincide com o eixo das  $x$ .

# Zeros de polinômios de grau 1 (retas)

- $y = 0$  é o eixo das  $x$ , tem  $\infty$  zeros
- $y = b$ , com  $b \neq 0$ , é paralela ao eixo das  $x$ , não tem zeros
- $y = a_i x + b_i$ , com  $a_i \neq 0, b_i \neq 0$ , interseca o eixo das  $x$ , têm um zero



## Zeros de polinômios de segundo grau (parábolas)

$f(x) = ax^2 + bx + c$  pode ter até dois zeros porque esta função tem como gráfico a parábola  $y = ax^2 + bx + c$  que interseca o eixo das  $x$  até duas vezes.

Os zeros se encontram resolvendo a equação  $ax^2 + bx + c = 0$  ou equivalentemente determinando as interseções da parábola com o eixo das  $x$   $\begin{cases} y = 0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$

Três situações são possíveis, que dependem do discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$ :

- se  $\Delta > 0$  temos dois zeros:

$$\xi_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \xi_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

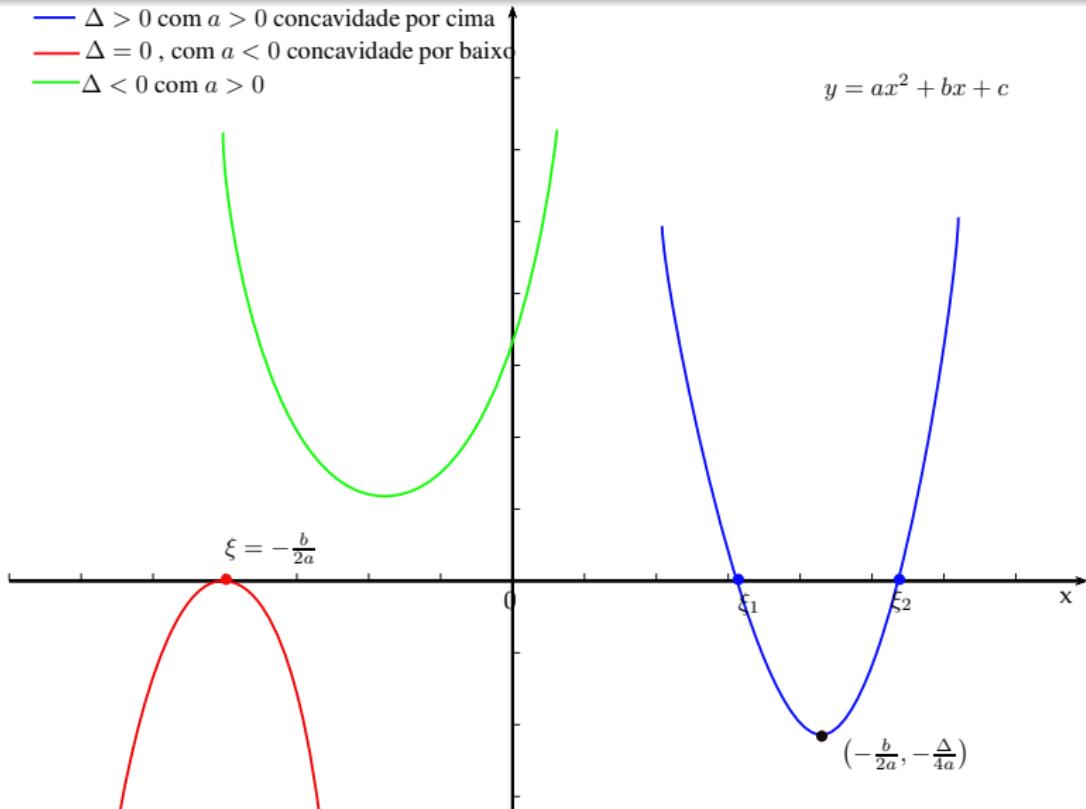
- se  $\Delta = 0$  temos um zeros  $\xi = -\frac{b}{2a}$  a abscissa do vértex da parábola

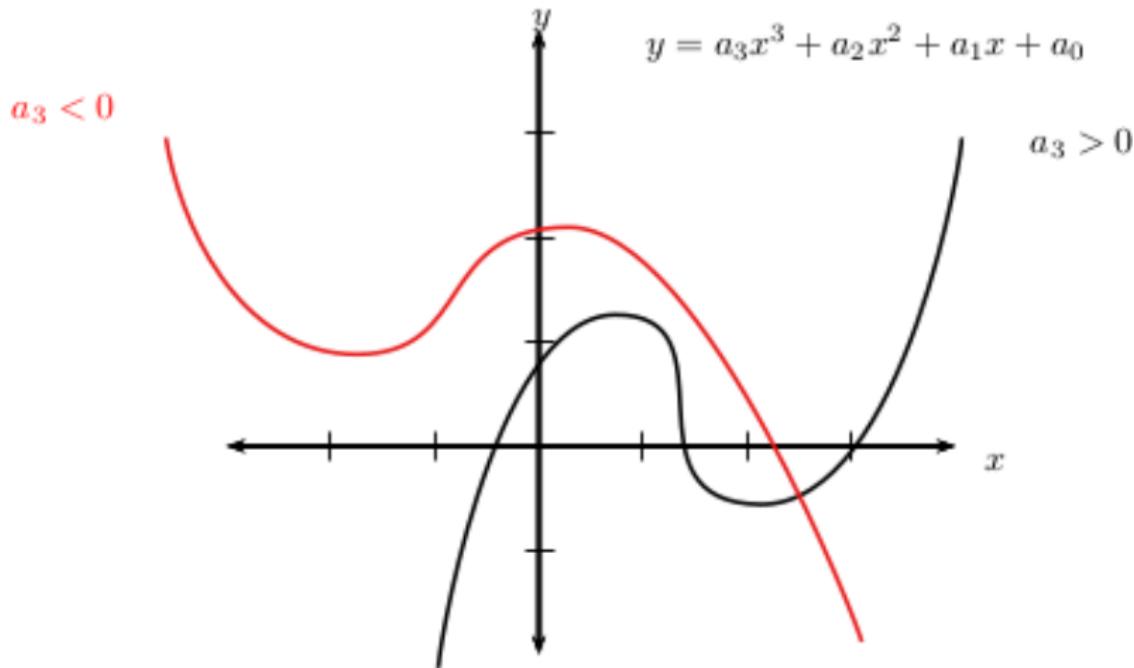
- se  $\Delta < 0$  não existe algum zero (real).

# Zeros de polinômios de segundo grau (parábolas)

- $\Delta > 0$  com  $a > 0$  concavidade por cima
- $\Delta = 0$ , com  $a < 0$  concavidade por baixo
- $\Delta < 0$  com  $a > 0$

$$y = ax^2 + bx + c$$



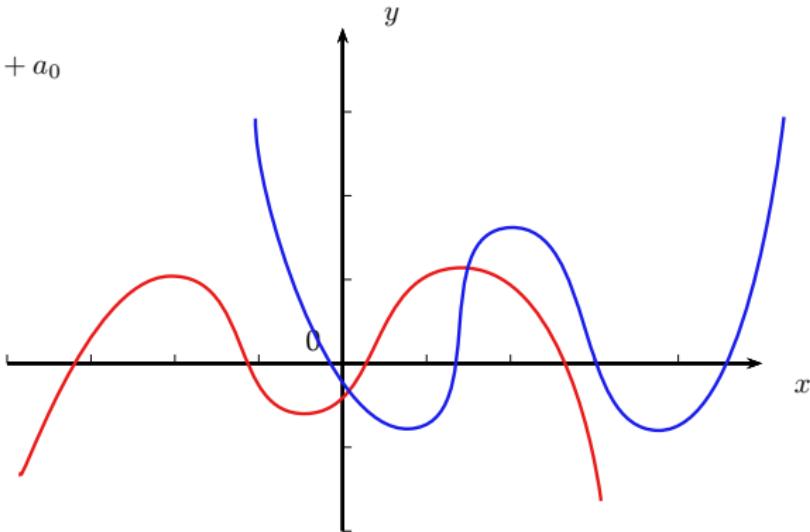
Polinômios de grau superior,  $n = 3$ 

# Polinômios de grau superior, $n = 4$

$$y = a_4x^4 + a_3x^3 + \dots + a_0$$

—  $a_4 > 0$

—  $a_4 < 0$



Polinomios de grau  $n$  par podem ter de 0 até  $n$  zeros reais.

Polinomios de grau  $n$  ímpar ( $n > 1$ ) podem ter de 1 até  $n$  zeros reais.

# Zeros de polinômios de grau $n$

Um polinômio de grau  $n$ ,  $p_n(x)$ , é uma função do tipo  $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  e pode ter até  $n$  zeros reais, mas tem sempre  $n$  zeros complexos  $\xi = \xi_{re} + i\xi_{im}$ . O polinômio  $p_n(x)$  pode ser escrito como

$$p_n(x) = a_n(x - \xi_1) \cdots (x - \xi_n)$$

onde  $\xi_j$  são os zeros do polinômio  $p_n$ .

- Encontrar os zeros de polinômios de grau  $n$  (grande) e de funções genéricas resulta ser difícil analiticamente, por isso vamos usar métodos numéricos para aproximar os zeros.

# Procedimento para achar os zeros

O Procedimento divide-se em dois passos

**Passo 1** Localização ou isolamento das regiões que contêm os zeros

**Passo 2** Aplicação de um método numérico para refinar tais regiões e achar assim com mais precisão os zeros

O sucesso do Passo 1 na localização de regiões restritas no entorno de um zero permite de resolver a Passo 2 mais rapidamente.

## Teorema 1 (Localização dos zeros)

Seja  $f(x)$  uma função continua em  $[a, b]$  tal que  $f(a) \cdot f(b) < 0$ .

Vale o seguinte:

- existe pelo menos um zero  $\xi \in ]a, b[$ , ou seja existe  $\xi \in [a, b]$  tal que  $f(\xi) = 0$ .
- se  $f$  for também estritamente monótona em  $[a, b]$  (ou seja com  $f'$  constante em sinal) então  $f$  tem somente um zero em  $]a, b[$ .

# Teorema 1. Interpretação Gráfica

Fig. 1

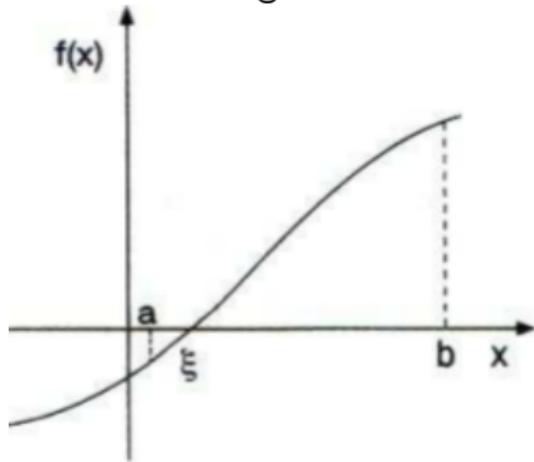
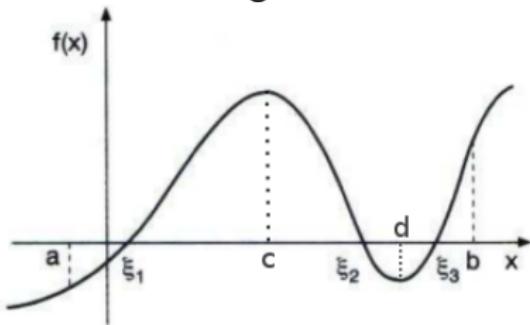


Fig. 2

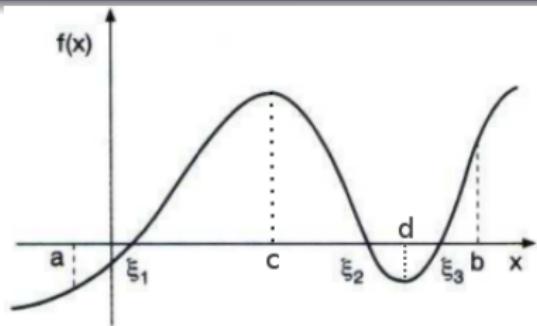


Em ambos os casos entre  $a$  e  $b$  temos pelo menos um zero porque  $f(a)$  e  $f(b)$  tem sinais opostos e  $f$  é contínua.

Na Figura 1, temos exatamente um zero  $\xi$  porque  $f$  é monótona crescente. Na Figura 2 temos três zeros  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$ , porque a função muda a monotonocidade três vezes.

É possível ter um número par de zeros quando  $f(a)f(b) < 0$ ?

# O que significa o Teorema 1. Interpretação Gráfica



- Somente conhecendo o sinal de  $f(a), f(b), f(c), f(d)$  e a monotonocidade da função (ou seja onde ela é crescente ou decrescente) é possível determinar regiões mais acuradas que contêm os zeros.
- Em  $[a, c]$  é esperado só um zero porque a função é crescente e  $f(a) \cdot f(c) < 0$ . As regiões que contêm os outros zeros são  $[c, d]$  e  $[d, b]$  porque em estes intervalos  $f$  é monótona (decrescente em  $[c, d]$  e crescente em  $[d, b]$ ) e os extremos dos intervalos tem sinal oposto.

## Aplicação do Teorema 1: Determinar regiões que contêm os zeros

Considere  $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$  no intervalo  $[0, 3]$ .

- $f(0) = -5 < 0$  e  $f(3) = 1.4831 > 0$  existe pelo menos um zero em  $(0, 3)$ .
- Analisando a derivada podemos verificar se existem mais zeros:  
 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5e^{-x} > 0$ , então  $f$  é estritamente crescente porque temos  $f' > 0$  em todo  $\mathbb{R}$ , **portanto existe um único zero em  $(0, 3)$** .
- Estudando o sinal da  $f$  computada em pontos (random ou equidistantes) de  $[1, 3]$  podemos localizar melhor o zero. Por exemplo usando pontos equidistantes:

x	0	1	2	3
$f(x)$	-5	-0.8394	0.7375	1.4831

O zero está no intervalo  $[1, 2]$  que é mais restrito de  $[0, 3]$ .

Se quissemos ser mais acurados...

analisando  $f$  nos pontos  $1.d$  com  $1 \leq d \leq 9$  observaremos que  $f(1.4) < 0$  e  $f(1.5) > 0$ . Portanto o zero está localizado em  $[1.4, 1.5]$ .

Uma análise mais cuidadosa usando por exemplo o método das bissecções leva a ter  $\xi \approx 1.4304$ .

## Aplicação do Teorema 1: Determinar regiões que contêm os zeros

Seja  $f(x) = x^3 - 9x + 3$ ,  
analisando o sinal da  $f$  em  $-5, -1, 0, 1, 2, 3$  temos

x	-5	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-	+	+	-	-	+

Portanto temos pelo menos três intervalos onde varia o sinal  $[-5, -1], [0, 1], [2, 3]$ : temos pelo menos três zeros!

Sendo que  $f$  é um polinômio de grau 3 temos exatamente três zeros (reais), cada um num intervalo:

$$\xi_1 \in [-5, -1], \xi_2 \in [0, 1], \xi_3 \in [2, 3]$$

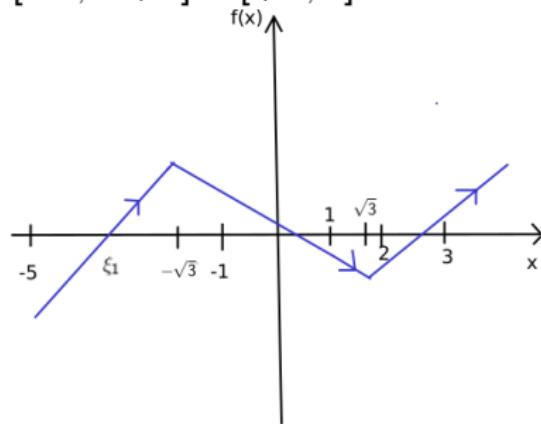
Podemos refinar os intervalos sem avaliar a  $f$  em outros pontos? ...

## Aplicação do Teorema 1: Determinar regiões mais limitadas usando a derivada

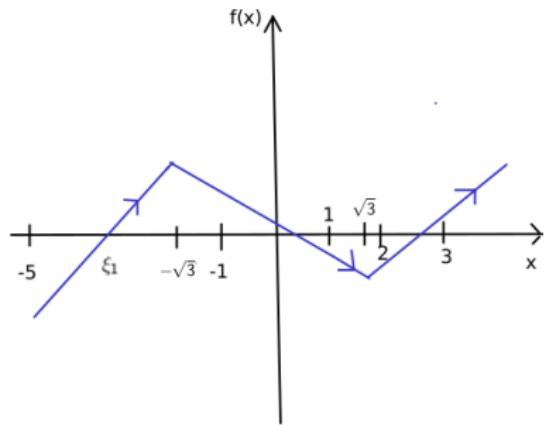
...Vamos determinar as regiões onde muda o sinal da derivada assim conhiceremos onde  $f$  é crescente ( $f' > 0$ ) e onde é decrescente ( $f' < 0$ ).

$$f'(x) = 3x^2 - 9 > 0 \iff x^2 > 3 \iff x < -\sqrt{3} \text{ ou } x > \sqrt{3}$$

Sendo que  $\sqrt{3} \approx 1.732$ , a função é crescente em  $[-5, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 3]$  e é decrescente em  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ .



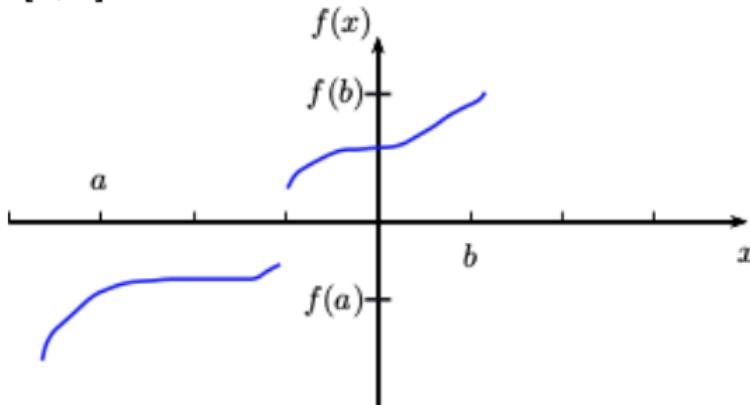
## Aplicação do Teorema 1: Determinar regiões mais limitadas usando a derivada



Sabemos que sendo  $f$  crescente em  $[-5, -\sqrt{3}]$  e decrescente em  $[-\sqrt{3}, -1]$ , o máximo em  $[-5, -1]$  é obtido por  $x = -\sqrt{3}$ , portanto temos  $f(-\sqrt{3}) > 0$  e para o Teorema 1 o zero  $\xi_1$  estará em  $[-5, -\sqrt{3}]$ . O mínimo de  $f$  em  $[0, 3]$  é obtido por  $x = \sqrt{3}$  portanto  $f(\sqrt{3}) < 0$ , mas sendo que  $1 < \sqrt{3} < 2$  este não ajuda a refinar o intervalo  $[0, 1]$  e nem  $[2, 3]$  onde estão respetivamente os zeros  $\xi_2$  e  $\xi_3$ .

# Funções não contínuas (descontínuas)

O Teorema 1 não vale para funções descontínuas. Porque se  $f(a) \cdot f(b) < 0$  com  $f$  descontínua não temos garantia que existe um zero em  $[a, b]$ .



# Procedimento para achar os zeros

O Procedimento divide-se em duas fases:

- ① Passo 1: Localização ou isolamento das regiões que contêm os zeros
  - Aplicação do Teorema 1
- ② **Passo 2:** Aplicação de métodos numéricos para refinar tais regiões e achar assim com mais precisão os zeros

# Critérios de precisão na aproximação do zero

Quando podemos dizer de estar perto do zero procurado?

Seja  $\bar{x}$  uma aproximação da raiz  $\xi$  obtida de um método. Dizemos de achar (ou aproximar) o zero a menos de uma tolerância  $\varepsilon > 0$  se

i)  $|\bar{x} - \xi| < \varepsilon$

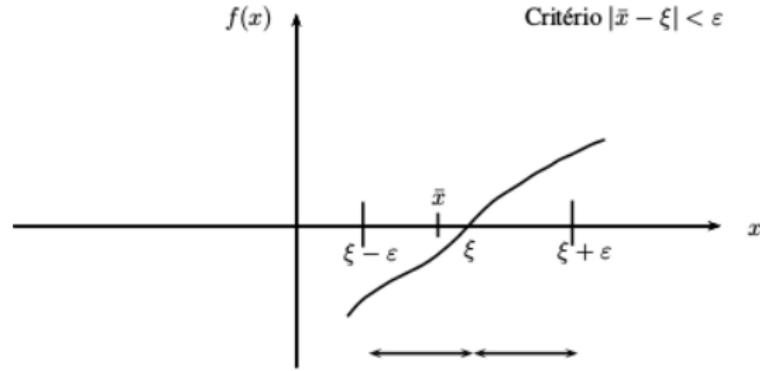
ou

ii)  $|f(\bar{x})| < \varepsilon.$

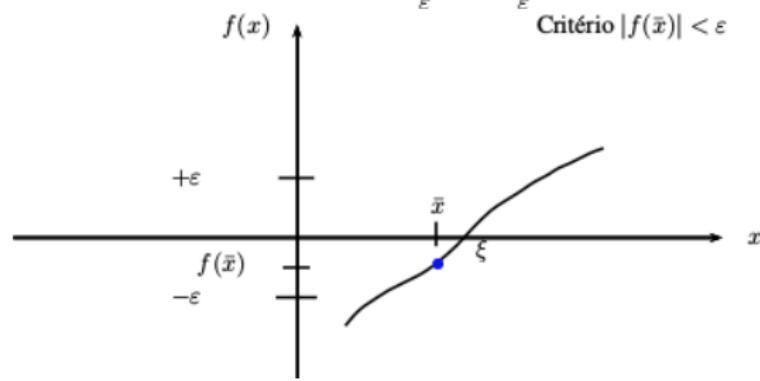
Em qualquer método iterativo podemos escolher o critério de precisão baseando-se numa destas condições ou em ambas.

# Critérios de precisão, vistos graficamente

Critério i)  
 $|\bar{x} - \xi| < \varepsilon$

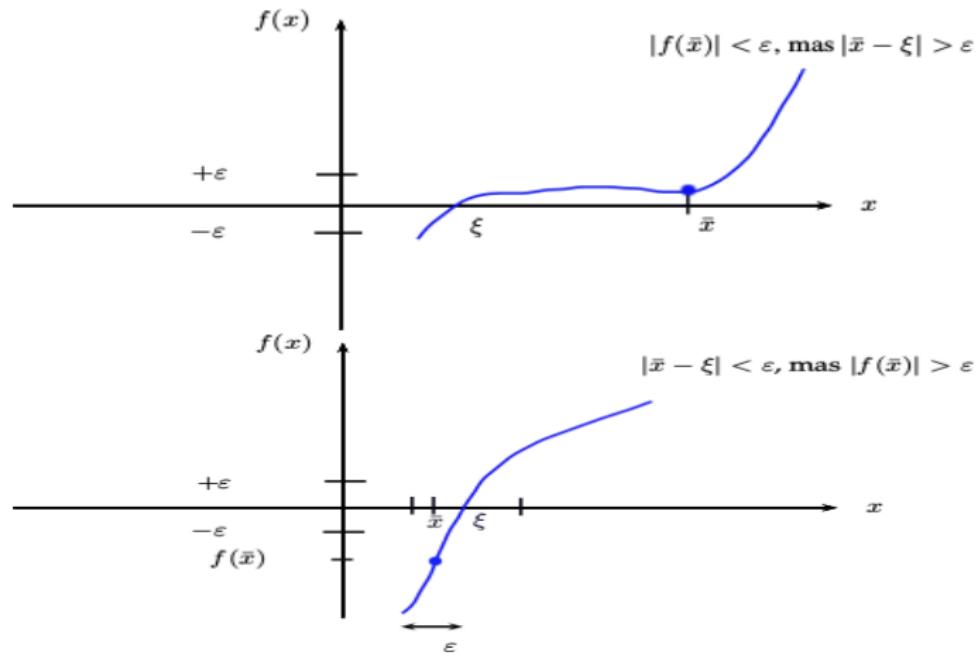


Critério ii)  
 $|f(\bar{x})| < \varepsilon$



# Critérios de precisão

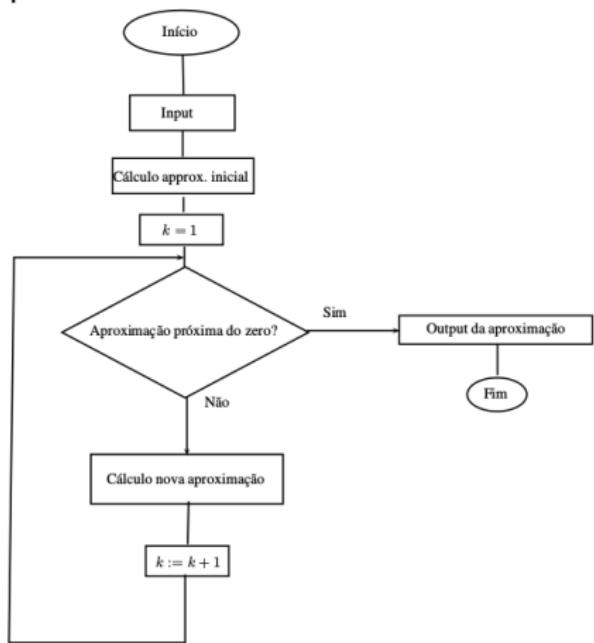
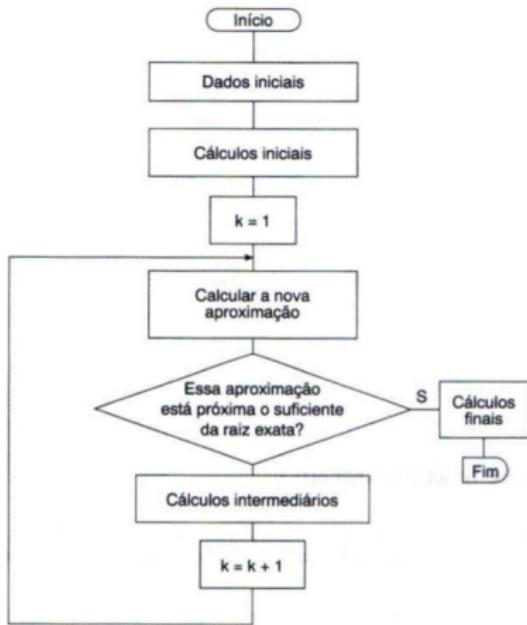
Não sempre as condições i) e ii) são satisfeitas simultaneamente, isso depende da  $f$  analisada



# Algoritmos associados aos métodos iterativos

Usaremos métodos com iterações para aproximar os zeros.

Em cada iteração (conjunto de operações que se repetem) aproximaremos sempre melhor o zero. Dois algoritmos possíveis do mesmo método:



# Algoritmos Iterativos

- Os critérios de precisão vistos antes são suficientes para ter uma boa aproximação, portanto são também chamados **critérios de paragem** dos algoritmos.
- Sendo que  $\xi$  é desconhecido (por isso é procurada!) não é possível aplicar diretamente o critério  $|\bar{x} - \xi| < \varepsilon$ .  
Este critério é substituído do critério  $|b_k - a_k| < \varepsilon$  onde  $[a_k, b_k]$  é o intervalo, que contém o zero  $\xi$ , obtido na iteração  $k$  do método, junto a aproximação  $x_k$  do zero com  $x_k \in (a_k, b_k)$ .

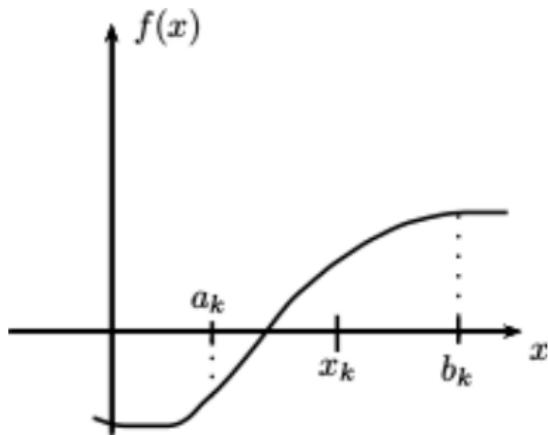
Portanto se verificamos  $|b_k - a_k| < \varepsilon$  então vale com certeza  $|x_k - \xi| < \varepsilon$ .

- Note que a seguir os algoritmos usados podem usar  $k = 0$  ou  $k = 1$  para indicar a primeira iteração.

# Método de Bisseção

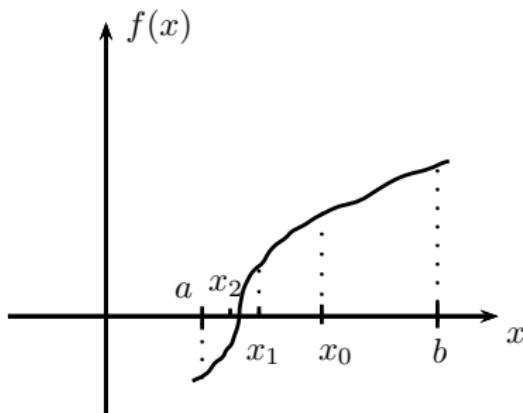
## Descrição do método

Aplica-se num intervalo  $[a, b]$  tal que a função tem sinais opostos nos seus extremos. Divide-se o intervalo a meio, escolhe-se o subintervalo onde a função tem sinais opostos nos extremos e assim sucessivamente. Em cada iteração o aproximante do zero, é o ponto médio do intervalo analisado  $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ .



## Método da Bisseção: Algoritmo

Inicialização	$[a_0, b_0] = [a, b]$
Repetir	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>x_k = \frac{a_k+b_k}{2};</math></li> <li>2. Se <math>f(x_k)f(a_k) &lt; 0</math> Então <math>a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x_k</math> Senão <math>a_{k+1} = x_k, b_{k+1} = b_k</math></li> <li>3. <math>k=k+1</math></li> </ol>
Até	Verificar o critério de paragem escolhido



## Exemplo de aplicação do método da bisseção

$$f(x) = x \log x - 1 \text{ onde } \log \equiv \log_{10}.$$

Achar o zero a menos de um erro (tolerância)  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

Observamos que:

- $f(2) \approx -0.3979 < 0$  e  $f(3) \approx 0.4314 > 0$  portanto existe um zero em  $[2, 3]$ .
- O zero é único em  $[2, 3]$ ? Sim, porque
$$f'(x) = \log x + x(\log x)' = \log x + x\left(\frac{\ln x}{\ln 10}\right)' = \log x + \frac{1}{\ln 10} = \frac{\ln(x)+1}{\ln 10} > 0, \text{ se } x > 1.$$
- Usamos o critério de paragem  $|b_k - a_k| < \varepsilon$ , com  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

## Exemplo de aplicação do método da bisseção

$[a_0, b_0] = [2, 3]$  com  $f(a_0)f(b_0) < 0$ ,  $|b_0 - a_0| = 1 > \varepsilon$

$$x_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = 2.5 \quad \left\{ \begin{array}{ll} f(x_0) = -5.15 \cdot 10^{-3} < 0 & z \in (x_0, b_0) \\ f(a_0) = -0.3979 < 0 & a_1 = x_0 = 2.5 \\ f(b_0) = 0.4314 > 0 & b_1 = b_0 = 3 \\ \end{array} \right. \rightarrow |b_1 - a_1| > \varepsilon \dots alg.\text{ continua}$$

$$x_1 = \frac{a_1+b_1}{2} = 2.75 \quad \left\{ \begin{array}{ll} f(x_1) = 0.2082 > 0 & z \in (a_1, x_1) \\ f(a_1) = -5.15 \cdot 10^{-3} < 0 & a_2 = a_1 = 2.5 \\ f(b_1) = 0.4314 > 0 & b_2 = x_1 = 2.75 \\ \end{array} \right. \rightarrow |b_2 - a_2| > \varepsilon \dots alg.\text{ continua}$$

$$x_2 = \frac{a_2+b_2}{2} = 2.625 \dots$$

Se for  $\varepsilon = 0.3$  o método obtém o aproximante  $x_2 = 2.625$ .

Se for  $\varepsilon = 10^{-4}$  obtemos em vez a aproximação  $x_{14} \approx 2.506195$ , obtida depois 14 iterações. Note que o zero exato é  $z \approx 2.506184 \dots$

# Observações

- No fim de cada iteração  $k$  toma-se como aproximante do zero o valor  $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ .
- O método consegue localizar bem o zero com a precisão requerida.  
Isso era esperado porque refinemos sempre mais o intervalo inicial determinando em cada iteração um intervalo menor que contem o zero.
- Sempre que necessitaremos uma precisão maior (ou tolerância menor) o método numérico requererá mais iterações.