

Método iterativos para a resolução de sistemas lineares. Método de Jacobi

MS211 – Cálculo Numérico

Giuseppe Romanazzi

Setembro 2024

Introdução

Nesta aula apresentaremos os métodos iterativos para a resolução de sistemas lineares $Ax = b$.

Estes métodos são similares aos métodos do ponto fixo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ para achar os zeros de uma função f discutidos anteriormente. Os métodos de pontos fixo podem ser chamados também métodos iterativos de um passo porque tem uma iteração definida somente a partir do x_k anterior. Agora, na resolução de $Ax = b$ é como se quiséssemos encontrar a solução do problema do zero $f(x) = Ax - b = 0$, resolvendo um problema do ponto fixo equivalente $x = \varphi(x)$.

Os métodos iterativos para a resolução de sistemas lineares são métodos globais, ou seja se o método converge ele convergirá para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ inicial escolhido. A convergência ou menos destes métodos dependerá somente da matriz A , não dependendo do vetor b .

Na segunda parte da aula vamos apresentar um particular método iterativo chamado método de Jacobi, ou de Gauss-Jacobi. A convergência e aplicação do método de Jacobi será analisada.

Conteúdo

- 1 Métodos iterativos para a resolução de sistemas lineares
- 2 Método iterativo de Jacobi
 - Convergência do método de Jacobi

Métodos iterativos

A ideia na construção dos métodos iterativos para a resolução do sistema linear $Ax = b$ de dimensão n é de gerar uma sucessão de vetores $\{x^{(k)}\}$ com $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, que converge a solução do sistema. Esta sucessão é definida a partir de uma função $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e é tal que:

- transforma um vetor $x^{(k)}$ de n elementos num vetor $x^{(k+1)}$ de n elementos: $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$.
- a solução $x \in \mathbb{R}^n$ do sistema $Ax = b$ é tal que $\varphi(x) = x$, ou seja a solução x é ponto (ou melhor vetor) fixo de φ .

Métodos iterativos $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$

Os métodos iterativos que trataremos usam como função de iteração

$$\varphi(y) = Gy + c$$

onde $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é chamada **matriz de iteração**, e $c \in \mathbb{R}^n$ é um vetor.

G e c são os mesmos em cada iteração.

Dado o vetor inicial $x^{(0)}$ obtemos

$$x^{(1)} = Gx^{(0)} + c$$

$$x^{(2)} = Gx^{(1)} + c$$

...

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$$

Convergência, um resumo

Na aula dos métodos do ponto fixo vimos que se um método $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ cria uma sucessão convergente então ela convergirá necessariamente ao ponto fixo de φ .

Os métodos iterativos satisfazem a mesma propriedade: se existir o $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \bar{y}$ então \bar{y} é ponto fixo de $\varphi(y) = Gy + c$ ou seja $\varphi(\bar{y}) = \bar{y}$ ou equivalentemente $G\bar{y} + c = \bar{y}$.

Definição

Um método iterativo para a resolução de $Ax = b$ (com solução x) é convergente se $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$ ou equivalentemente se dada a sucessão $e^{(k)} := x - x^{(k)}$ onde $e^{(k)}$ é o vetor erro da iterada k , temos $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k)} = 0$

Note que $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k)} = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \|e^{(k)}\| = 0$

Escolha do método iterativo

Fica claro que um bom método iterativo tem de ser:

- 1 convergente
- 2 tem de ter como ponto fixo a solução x do sistema linear, portanto temos sempre escolher G e c tais que:

$$Gx + c = x \iff Ax = b$$

Critério de precisão (paragem) dos métodos iterativos

Há quatro possíveis critérios de precisão:

- ter distância pequena entre duas iterações consecutivas :
 $\|d^{(k)}\| = \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < \epsilon$, onde **como norma usaremos a norma do máximo** $\|d^{(k)}\| := \max_{i=1,2,\dots,n} |d_i^{(k)}|$ e onde $d_i^{(k)}$ é a componente i do vetor $d^{(k)} = x^{(k)} - x^{(k-1)}$.
- ter distância relativa pequena entre duas iterações :
 $\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k)}\|} < \epsilon$ ou $\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k+1)}\|} < \epsilon$
- ter resíduo da iteração k pequeno. Ou seja o vetor resíduo $r^{(k)} := b - Ax^{(k)}$ tem de satisfazer $\|r^{(k)}\| < \epsilon$
- uso de ambos os critérios anteriores: $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < \epsilon_1$ e (ou) $\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k)}\|} < \epsilon_2$ e (ou) $\|b - Ax^{(k)}\| < \epsilon_3$

Formas equivalentes de métodos iterativos

Existem duas formas equivalentes dos métodos iterativos para resolver $Ax = b$ com A não singular:

- $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$ (forma clássica)
- $x^{(k+1)} = x^{(k)} + (I - G)A^{-1}r^{(k)}$ (forma com resíduo),
onde $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$

Deduzimos a segunda forma da primeira:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - x^{(k)} + Gx^{(k)} + c = x^{(k)} + (G - I)x^{(k)} + c = x^{(k)} - (I - G)x^{(k)} + c. \quad (1)$$

Agora sabendo que a solução x do sistema satisfaz $x = A^{-1}b$ e $x = Gx + c$ temos que $c = (I - G)x = (I - G)A^{-1}b$, substituindo esta expressão de c na equação (1), temos

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - (I - G)x^{(k)} + (I - G)A^{-1}b = x^{(k)} - (I - G)A^{-1}Ax^{(k)} + (I - G)A^{-1}b = x^{(k)} + (I - G)A^{-1}r^{(k)}$$

Forma do método iterativo com o resíduo

Esta última forma permite de ver como o erro entre duas iterações consecutivas $d^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$ depende da matriz A , da matriz de iteração G e do resíduo $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ da iterada anterior $x^{(k)}$.

Graficamente num plano em \mathbb{R}^n o vetor distancia $d^{(k)} = (I - G)A^{-1}r^{(k)}$ é aquele que se pode somar a $x^{(k)}$ para chegar a $x^{(k+1)}$.

Esta forma do método com o resíduo $r^{(k)}$ é muito usada nos algoritmos porque muitos deles usam como critério de paragem $\|b - Ax^{(k)}\| < \epsilon$ e portanto necessitam de computar sempre o resíduo $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$

Teorema de convergência dos métodos iterativos

Teorema 1

Dado um qualquer $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ inicial, o método iterativo $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$ converge se e só se $\lim_{k \rightarrow \infty} \|G^k\| = 0$ para uma qualquer norma de matrizes $\|\cdot\|$

Definimos a seguir uma classe de normas de matrizes

Normas induzidas de normas vetoriais

A **norma de matriz** induzida de uma norma vetorial é

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Exemplo de normas de matrizes:

$$\|A\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

onde $\|x\|_{\infty} = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$.

$$\|A\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

onde $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

Teorema 1 de convergência dos métodos iterativo, Demonstração

Demonstração.

Usando a definição do vetor erro $e^{(k)} = x - x^{(k)}$;
 $e^{(k+1)} = x - x^{(k+1)} = x - Gx^{(k)} - c = Gx + c - Gx^{(k)} - c =$
 $G(x - x^{(k)}) = Ge^{(k)}$. portanto obtemos

$$e^{(k+1)} = Ge^{(k)}$$

ou seja a matriz de iteração contrai o erro do passo anterior. Desta última equação obtemos

$$e^{(k+1)} = Ge^{(k)} = G^2e^{(k-1)} = \dots = G^{k+1}e^{(0)}$$

e então $e^{(k)} = G^k e^{(0)}$. Por isso temos convergência por um dado $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ qualquer se $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k)} = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} G^k e^{(0)} = 0$ por cada $e^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ e este acontece somente se $\lim_{k \rightarrow \infty} \|G^k\| = 0$. □

Condição suficiente para convergência dos mét. iterativos

Uma condição suficiente para que o método $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$ converja é que a norma da matriz de iteração é menor de 1,

$$\|G\| < 1$$

Esta condição é similar ao que acontece com os métodos do ponto fixo onde uma condição suficiente para ter convergência era de encontrar um intervalo onde $|\varphi'(x)| < 1$.

Proposição (Condição suficiente para convergência)

Se $\|G\| < 1$ então o método $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$ converge

Demonstração.

Note que para as propriedades das normas temos

$\|G^k\| \leq \|G\| \|G\| \cdots \|G\| = \|G\|^k$. Note que se $\|G\| < 1$ para as propriedades dos limites de exponenciais com base menor de 1 (pense ao

$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 0$) temos $\lim_{k \rightarrow \infty} \|G\|^k = 0$ e sendo $0 \leq \|G^k\| \leq \|G\|^k$ então

$\lim_{k \rightarrow \infty} \|G^k\| = 0$ que para o Teorema 1 leva a convergência do método \square

Splitting da matriz A , método de Jacobi

O método de Jacobi como a maioria dos métodos iterativos usam um splitting da matriz A , ou seja consideram A como soma de duas matrizes, para poder obter a matriz G e o vetor c tais que

$$Ax = b \iff x = Gx + c.$$

Neste caso seja D a matriz diagonal de A ,

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Usaremos o splitting $A = D + (A - D)$,

supondo que D seja invertível ($a_{ii} \neq 0 \forall i = 1, \dots, n$) obtemos de $Ax = b$:

$$Dx + (A - D)x = b \iff Dx = (D - A)x + b \iff$$

$$x = D^{-1}(D - A)x + D^{-1}b = (I - D^{-1}A)x + D^{-1}b$$

Portanto no método de Jacobi:

$$G = I - D^{-1}A, \quad c = D^{-1}b$$

Método de Jacobi na forma vetorial

O método de Jacobi, também chamado método de Gauss-Jacobi, tem a iteração definida por

$$x^{(k+1)} = G_J x^{(k)} + c_J, \quad (\text{forma vetorial})$$

onde $G_J = I - D^{-1}A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $c_J = D^{-1}b \in \mathbb{R}^n$.

Se pode definir o método também linha por linha:

$$x_i^{(k+1)} = (G_J x^{(k)} + c_J)_i, \quad i = 1, \dots, n$$

onde usamos a notação v_i para denotar a componente i do vetor v , com $i = 1, \dots, n$.

Note que $D^{-1}A = \left(\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right)_{ij}$, $D^{-1}b = \left(\frac{b_i}{a_{ii}}\right)_i$ portanto temos

$$G_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \dots & \dots & -\frac{a_{nn-1}}{a_{nn}} & 0 \end{pmatrix}; \quad c_J = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Método de Jacobi na forma escalar

A expressão do método linha por linha pode ser escrita como $x_i^{(k+1)} = (c_J)_i + (G_J x^{(k)})_i = (D^{-1}b)_i + ((I - D^{-1}A)x^{(k)})_i$ ou seja na forma escalar explícita

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

para cada $i = 1, \dots, n$.

Esta última forma é mais fácil para ser implementada num algoritmo.

Forma alternativa vetorial e escalar

Sabemos que um método iterativo, $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$ pode sempre ser escrito como $x^{(k+1)} = x^{(k)} + (I - G)A^{-1}r^{(k)}$ onde foi usado o resíduo $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$.

Portanto sendo $G_J = I - D^{-1}A \implies I - G_J = D^{-1}A$ teremos a seguinte forma alternativa vetorial **simples** do método de Jacobi:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + (I - G_J)A^{-1}r^{(k)} = x^{(k)} + D^{-1}r^{(k)}$$

No caso escalar temos:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}r_i^{(k)}, \quad \text{para cada } i = 1, \dots, n$$

onde por definição $r_i^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^{(k)}$, com $i = 1, \dots, n$.

Matriz com diagonal estritamente dominante por linhas (critério das linhas)

Definição

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diz-se com diagonal estritamente dominante por linhas (ou que satisfaz o critério das linhas) se e só se $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$ por cada $i = 1, \dots, n$

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \\ -2 & -1 & -4.5 \end{pmatrix} \text{ satisfaz o critério das linhas}$$

Condição suficiente para a convergência

Proposição (1ª condição suficiente para a convergência)

Se a matriz A for com diagonal estritamente dominante por linhas (ou equivalentemente se satisfazer o critério das linhas) então o método de Jacobi converge.

Demonstração.

Provamos que se A for com diagonal estritamente dominante então $\|G_J\|_\infty < 1$ e este pela propriedade dos métodos iterativos (pag. 14) garante a convergência do método. Sendo que $G_J = (g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ com $g_{ii} = 0$ e $g_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, i \neq j$, então

$$\|G_J\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |g_{ij}| = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1, j \neq i}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| = \max_{i=1,\dots,n} \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$$

Note que usamos a hipótese que a matriz A satisfaz o critério das linhas

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|. \quad \square$$

Portanto se A for com diagonal estritamente dominante por linhas

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_J^{(k)} = x$$

onde com $x_J^{(k)}$ indicamos o valor obtido do método de Jacobi após k iterações.

Exemplo

Queremos achar uma aproximação $x^{(k)}$ da solução do seguinte sistema linear a menos de um erro relativo entre duas aproximações sucessivas de $\varepsilon = 0.05$, ou seja paramos o método iterativo quando

$$d_r^{(k)} := \frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty}{\|x^{(k)}\|_\infty} < \varepsilon$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

Notamos que A é não singular ($\det(A) = 447 \neq 0$), então existe uma única solução do sistema. Para poder aplicar o método de Jacobi observamos que os a_{ii} são diferentes de zeros, e que é satisfeito o critério

$$\begin{aligned} & |a_{11}| = 10 > |a_{12}| + |a_{13}| = 2 + 1 = 3 \\ \text{das linhas: } & |a_{22}| = 5 > |a_{21}| + |a_{23}| = 1 + 1 = 2 \quad . \\ & |a_{33}| = 10 > |a_{31}| + |a_{32}| = 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

Portanto podemos aplicar o método de Jacobi com a certeza que convergirá (teoricamente) independentemente do $x^{(0)}$ escolhido.

Usamos o formato escalar por linhas. $x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$.

Pegamos como $x^{(0)}$ o vetor $x^{(0)} = (0.7, -1.6, 0.6)^t$.

O método de Jacobi gera na iteração $k+1$: $x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}(7 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)})$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}(-8 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(6 - 2x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)}).$$

A primeira iteração será:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{10}(7 + 2 \cdot 1.6 - 0.6) = 0.96$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{5}(-8 - 0.7 - 0.6) = -1.86$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{10}(6 - 2 \cdot 0.7 + 3 \cdot 1.6) = 0.94.$$

Notamos que $\max_i |x_i^{(1)}| = 1.86$ e

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 0.26; \quad |x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0.26; \quad |x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = 0.34.$$

Portanto

$$d_r^{(1)} = \frac{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty}{\|x^{(1)}\|_\infty} = \frac{\max_i |x_i^{(1)} - x_i^{(0)}|}{\max_i |x_i^{(1)}|} = \frac{\max\{0.26, 0.34\}}{1.86} = \frac{0.34}{1.86} = 0.1828 > 0.05 = \varepsilon.$$

Proseguimos até chegar a iteração k que satisfaz a condição de saída. Obteremos $x^{(2)} = (0.978, -1.98, 0.966)^t$ que tem

$$d_r^{(2)} = \frac{\max\{|0.018|, |-0.12|, |0.026|\}}{|1.98|} = \frac{0.12}{1.98} = 0.0606 > \varepsilon;$$

Então continuamos com o método, a terceira iteração de Jacobi obtem $x^{(3)} = (0.9994, -1.9888, 0.9984)^t$ que tem

$$d_r^{(3)} = \frac{\max\{|0.0214|, |-0.0088|, |0.0324|\}}{|-1.9888|} = \frac{0.0324}{1.9888} = 0.0163 < \varepsilon$$

Portanto a aproximação achada do método a menos de erro relativo menor de $\varepsilon = 0.05$ de duas iterações sucessivas é

$$x_1 = 0.9994, x_2 = -1.9888, x_3 = 0.9984$$

Exemplos com o critério das linhas não satisfeito

No caso que o sistema linear não satisfaz o critério das linhas, pode ser que trocando as equações o critério seja satisfeito e portanto o método de Jacobi convergirá após a troca. Exemplo:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ +6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$$

Notamos logo na primeira linha que $|a_{11}| = 1 \not> |a_{12}| + |a_{13}| = 3 + 1 = 4$. Portanto o critério das linhas não é satisfeito (a diagonal não é estritamente dominante por linhas). Mas se trocamos a primeira linha com a segunda linha obtemos

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ +6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$$

temos por cada $i = 1, 2, 3$ que $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$. Portanto o método de Jacobi convergirá a solução deste sistema. Observamos também que A é não singular e tem $a_{ii} \neq 0$ e por isso se podia aplicar Jacobi.