MS211, Cálculo Numérico, Turma C
Segundo Semestre de 2023, UNICAMP

Resoluçao da Prova 1

Pode usar a calculadora. Aproxime os resultados com até 4 dígitos significativos. Responda a pelomenos duas das três questões. Cada questão $(1), (2), (3)$ **tem peso 50%.**

(1) Se deseja resolver a seguinte equação não linear $x^3 + x^2 - 1 = 0$ quando $x > 0$

- Prove que existe uma unica solução z da equação.
- Aproxime z usando o método da bisseção, implementando um só passo do método.
- Quando o método de Newton pode convergir a z?
- Aproxime z usando o método de Newton, implementando um só passo do método.

(2)
- Dado o sistema linear $Ax = b$ deduzir o método de Jacobi

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

- Verifique se o sistema linear $Ax = b$, com

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 1 & 8 & -7 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

e $b = (-1\ 3\ 4)^t$ pode ser resolvido com sucesso com o método de Jacobi.
- Implemente um passo do método de Jacobi aplicado ao sistema anterior.
- Quais são as vantagens do método de Jacobi com respeito ao método de eliminação de Gauss no resolver um sistema linear $Ax = b$ de dimensão $n \times n$ com n grande e com matriz A esparsa(ousseja com muitos zeros) ?

(3)
- Escreva um algoritmo do método de Newton para resolver sistemas não lineares do tipo

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

- Dado o sistema não linear

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y = 2 \\ -xy + 1 = 0 \end{cases}$$

Implemente dois passos do método de Newton para poder aproximar a solução (x, y) do sistema.

Gabarito Questão (1)

• Seja $f(x) = x^3 + x^2 - 1$. Vamos determinar o sinal da função para alguns valores de $x \geq 0$, como mostra a Tabela 1 a seguir.

x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Tabela 1: Valores de f para $x \geq 0$.

Além disso, $f'(x) = 3x^2 + 2x$, para $x > 0$, é sempre positiva. Portanto, sendo que $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1 > 0$, existe um único zero z de f, que está no intervalo $(0, 1)$.

• Como f é uma função contínua em $[0, 1]$, com $f(0)f(1) < 0$, e tem uma única solução z neste intervalo, podemos aplicar o método da Bisseção.

Uma iteração do método da Bisseção, nesse caso, equivale a calcular o primeiro ponto médio do intervalo inicial $[0, 1]$. Isto é,

$$x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, utilizando um passo do método, a aproximação do zero z de f é $x_1 = \dfrac{1}{2}$.

Se quisessemos aplicar mais um passo notamos que

$$f(x_1) = (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^2 - 1 = \frac{3}{8} - 1 = -\frac{5}{8} = -0.625 < 0$$

Então sendo $f(b)f(x_1) < 0$ o zero encontra se em $[\frac{1}{2}, 1]$ e a proxima iteração da bisseção é $x_2 = \frac{b+x_1}{2} = \frac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4} = 0.75$.

• O método de Newton pode convergir a z se

1) f, f' e f'' são contínuas no intervalo I que contém o zero z.

De fato, seja $I = [0, 1]$. Vimos no item anterior que o único zero de f está isolado em I. Assim, $f(x) = x^3 + x^2 - 1$, $f'(x) = 3x^2 + 2x$ e $f''(x) = 6x + 2$ são funções polinomiais e, portanto, contínuas em $I = [0, 1]$.

2) $f'(z) \neq 0$, sendo $z \in I$ e $z \neq 0$.

De fato, aqui consideramos $I = (0, 1]$. Logo, $f'(x) = 3x^2 + 2x$ é sempre positiva para todo $x \in I$. Logo, f' não se anula.

3) Existe M tal que $\left| \dfrac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| \leq M < 1$.

Nesse sentido, queremos que $\left| \dfrac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| < 1$. Assim,

$$\left|\frac{(x^3+x^2-1)(6x+2)}{(3x^2+2x)^2}\right| < 1 \Longrightarrow |x^3+x^2-1|(6x+2) < 9x^4+12x^3+4x^2.$$

Vamos analisar o caso positivo. Isto é,

$$6x^4+8x^3+2x^2-6x-2 < 9x^4+12x^3+4x^2 \Longrightarrow -3x^4-4x^3-2x^2-6x-2 < 0,$$

se $x \in (0,1)$. Portanto, existe M que satisfaz a condição 3).

Agora, temos que analisar o caso negativo, ou seja,

$$(1-(x^3+x^2))(6x+2) < 6x+2 < 9x^4+12x^3+4x^2 \Longrightarrow -9x^4-12x^3-4x^2 < -2-6x.$$

Dessa desigualdade, temos que $\max\limits_{x\in[0,1]} -9x^4-12x^3-4x^2 = 0$ e $\min\limits_{x\in[0,1]} -2-6x = -8$, para $x \in [0,1]$. Isto é, a desigualdade não é válida. Portanto, não é verdade que o método de Newton converge partindo de um qualquer x_0 em $[0,1]$.

- Uma iteração do método de Newton é dada como se segue, com chute inicial $z_0 = \dfrac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
z_1 &= z_0 - \frac{f(z_0)}{f'(z_0)} \\
&= z_0 - \frac{z_0^3+z_0^2-1}{3z_0^2+2z_0} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1}{\frac{3}{4}+1} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{-\frac{5}{8}}{\frac{7}{4}} \\
&= \frac{6}{7}
\end{aligned}$$

Portanto, utilizando um passo do método, a aproximação do zero z de f é $z_1 = \dfrac{6}{7}$.

Gabarito Questão (2)

- O método de Jacobi como a maioria dos métodos iterativos usam um *splitting* da matriz A, ou seja, consideram A como soma de duas matrizes, para poder obter a matriz G e o vetor c tais que

$$Ax = b \Longleftrightarrow x = Gx + c.$$

Neste caso, seja D a matriz diagonal de A tal que

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Usaremos o *splitting* $A = D + (A - D)$, supondo que D seja invertível, isto é, $a_{ii} \neq 0$. Assim, obtemos de $Ax = b$ que

$$Dx + (A - D)x = b \Longleftrightarrow Dx = (D - A)x + b \Longleftrightarrow x = D^{-1}(D - A)x + D^{-1}b = (I - D^{-1}A)x + D^{-1}b,$$

em que no método de Jacobi considera-se $G = I - D^{-1}A$ e $c = D^{-1}b$, donde segue que a expressão explicita do método pode ser determinada como

$$x_i^{(k+1)} = (D^{-1}b)_i + ((I - D^{-1}A)x^{(k)})_i,$$

isto é, na forma escalar explícita,

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad \text{para cada } \ i = 1, \dots, n,$$

como queríamos demonstrar.

• Para determinar se o sistema linear pode ser resolvido com sucesso utilizando o método de Jacobi, precisamos verificar se o critério das linhas é satisfeito

$$\begin{aligned} |a_{11}| = 7 \quad &> \quad |a_{12}| + |a_{13}| = 5 + 1 = 6 \\ |a_{22}| = 8 \quad &= \quad |a_{21}| + |a_{23}| = 1 + 7 = 8 \\ |a_{33}| = 2 \quad &= \quad |a_{31}| + |a_{32}| = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Portanto, o critério das linhas (forte) não é satisfeito. Mas é satisfeito o criterio das linhas fraco porque $|a_{ii}| \geq \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$ em cada linha e na primeira linha $|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}|$. Observando também que a matriz tem todos elementos não nulos então será satisfeita uma condição necessaria pela convergência do método : criterios fraco das linha e matriz com elementos diferentes de zero.

• Considerando $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, temos que uma iteração do método de Jacobi é dada por

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{7}(-1 - (-5x_2^{(0)} + x_3^{(0)})) \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{8}(3 - (x_1^{(0)} - 7x_3^{(0)})) \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{2}(4 - (x_1^{(0)} - x_2^{(0)})) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{7}(-1 - (-5 \times 0 + 0)) \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{8}(3 - (0 - 7 \times 0)) \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{2}(4 - (0 - 0)) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = -\frac{1}{7} \\ x_2^{(1)} = \frac{3}{8} \\ x_3^{(1)} = 2 \end{cases}$$

Portanto, a primeira iteração do método é dada por $x^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{8} \\ 2 \end{bmatrix}$.

• A vantagem do método de Jacobi é que sua utilização não necessita de mais memória, isto é, não há *fill-in*, ao contrário do método de Gauss, em que pode necessitar de todas as locações de memória da estrutura da matriz inicial, precisando de muito mais operações. Além disso, o método de Jacobi é um método mais estável do que o método da eliminação Gaussiana.

Ainda, no caso em que deseja-se resolver um sistema linear de dimensão grande em que a matriz é esparsa, o método de Jacobi tem custo computacional bem mais baixo quando comparado com um método direto como o método de Gauss.

Gabarito Questão (3)

• Note que o sistema não linear

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases}$$

pode ser escrito simplesmente como $F(x) = 0$, em que $x \in \mathbb{R}^2$ é um vetor de dimensão 2 que tem como elementos os x_i incógnitas: $x = (x_1, x_2)^t$, tal que

$$F(x) = (f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2))^t.$$

Assim, um algoritmo do método de Newton para resolver sistemas não lineares pode ser dado como se segue, com J a matriz Jacobiana de F,

Método de Newton

Dados $x^{(0)}$, $k = 0$

Passo 1. Avalia $F(x^{(k)})$ e $J(x^{(k)})$.
Passo 2. Resolve o sistema $J(x^{(k)})d^{(k)} = -F(x^{(k)})$.
Passo 3. Atualiza $x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)}$.
Passo 4. Checa a condição $\|d^{(k)}\|_\infty < \varepsilon$

- se for satisfeita, faz $x \approx x^{(k+1)}$;
- caso contrário, faz $k = k + 1$ e retorna ao **Passo 1**.

Antes de aplicar este método seria bom checar se o método pode convergir: controlar se det $J_F(x^{(k)})) \neq 0$, e que $x^{(k)}$ encontra se na região onde $\|J_F(y) - J_F(z)\|_\infty \leq \gamma \|F(y) - F(z)\|_\infty$.

• Considerando o sistema não linear

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y = 2 \\ -xy + 1 = 0 \end{cases},$$

temos que $f_1(x,y) = 3x^2 + 2y - 2$ e $f_2(x,y) = -xy + 1$ e, portanto, $F(x) = \begin{bmatrix} 3x^2 + 2y - 2 \\ -xy + 1 \end{bmatrix}$, cuja Jacobiana é dada por

$$J(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 2 \\ -y & -x \end{bmatrix}.$$

Dado $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, temos que

$$F(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 3 \times 1^2 + 2 \times 1 - 2 \\ -1 \times 1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } J(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema $J(x^{(0)})d^{(0)} = -F(x^{(0)})$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^{(0)} \\ d_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 6d_1^{(0)} + 2d_2^{(0)} = -3 \\ -d_1^{(0)} - d_2^{(0)} = 0 \end{cases} \Longrightarrow d_1^{(0)} = -d_2^{(0)} \text{ e } d_2^{(0)} = \frac{3}{4}.$$

Logo, $d^{(0)} = \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{3}{4} \end{bmatrix}$ e

$$x^{(1)} = x^{(0)} + d^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{7}{4} \end{bmatrix}$$

é a primeira aproximação da primeira iteração do método de Newton.

Fazendo o segundo passo do método, temos que

$$F(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 3 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + 2 \times \dfrac{1}{4} - 2 \\ -\dfrac{1}{4} \times \dfrac{7}{4} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{21}{16} \\ \dfrac{9}{16} \end{bmatrix} \text{ e } J(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 6 \times \dfrac{1}{4} & 2 \\ -\dfrac{7}{4} & -\dfrac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{2} & 2 \\ -\dfrac{7}{4} & -\dfrac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema $J(x^{(1)})d^{(1)} = -F(x^{(1)})$, segue que

$$\begin{bmatrix} \dfrac{3}{2} & 2 \\ -\dfrac{7}{4} & -\dfrac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^{(1)} \\ d_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{21}{16} \\ \dfrac{9}{16} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2}d_1^{(1)} + 2d_2^{(1)} = -\dfrac{21}{16} \\ -\dfrac{7}{4}d_1^{(1)} - \dfrac{1}{4}d_2^{(1)} = \dfrac{9}{16} \end{cases} \Longrightarrow d_2^{(1)} = -\frac{21}{32} - \frac{3}{4}d_1^{(1)} \text{ e}$$

$$-\frac{7}{4}d_1^{(1)} - \frac{1}{4}\left(-\frac{21}{32} - \frac{3}{4}d_1^{(1)}\right) = \frac{9}{16} \Longrightarrow d_1^{(1)} = -\frac{93 \cdot 8}{128 \cdot 11} = -0.5284 \text{ e } d_2^{(1)} = -1,460.$$

Logo, $d^{(1)} = \begin{bmatrix} -0,5284 \\ -1,460 \end{bmatrix}$ e

$$x^{(2)} = x^{(1)} + d^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,5284 \\ -1,460 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,2784 \\ 0,29 \end{bmatrix}$$

é a segunda aproximação da solução (x, y) do sistema, proveniente da segunda iteração do método de Newton.