MS211, Cálculo Numérico, Turma C
Segundo Semestre de 2023, UNICAMP

Prova 2

Pode usar a calculadora. Cada questão $(1)\ldots(4)$ **tem peso** 2.5**.**

(1) Deseja se aproximar numericamente a solução de $y(x)$ em $x = 2.5$ solução do seguinte problema diferencial usando um método numérico de segunda ordem

$$\begin{cases} y'(x) = -y''(x) + 2y(x) \\ y(1) = 0 \\ y(4) = 10 \end{cases}$$

- Escrever a equação genérica do método para achar a aproximação de $y(x_i)$.
- Determine e resolve as equações para poder chegar a aproximação de $y(2.5)$, especificando o passo h escolhido.
- Se usar o passo $h/2$ porque pode esperar de ter uma aproximação melhor de $y(2.5)$? Motive a sua resposta.

(2) Dada a sequência de pontos

x_i	-2	0	1	3	4	5
y_i	-7	-1	-1	-8	-14	-20

Determine a melhor parábola dos quadrados mínimos que passa próxima deste pontos.

(3) Dada a seguinte sequencia de pontos

x	-1	0	2	3	4	5
y	-2	1	3	-8	-9	-10

Determine o melhor polinômio interpolador de grau até 2 no intervalo $[0, 5]$.
Qual é a estimativa do erro $|p(x) - y(x)|$ obtida com este polinômio no ponto $x = 2.5$?

Para responder a esta pergunta precisa:

- escrever o polinômio interpolador de grau 2 associado aos nós escolhidos de interpolação
- escrever a forma associada do erro de interpolação
- escolher os melhores nós de interpolação que minimizam o erro de interpolação no intervalo $[0, 5]$

(4) Aproxime a integral em $[-\pi/2, \pi/2]$ da função $f(x) = x\cos(x)$ usando as seguintes formulas:

- Trapézio
- Simpson
- Retângulo a direita

Qual formula é esperada ser a mais acurada? Motive a sua resposta.

Algumas Fórmulas

$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$, onde $L_k(x) = \prod_{j=0,\ j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$, $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$

$\left| f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \right| \leq \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} M_{n+1}, \quad f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$, onde $x, \xi_x \in (x_0, x_n)$.

$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$.

$I \approx \frac{h}{2}\{f(x_0) + 2[f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})] + f(x_n)\}$,

$I \approx \frac{h}{3}\{f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\}$,

$I \approx \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$

$I \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$

$I \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i), \quad I \approx h \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ , \quad I \approx h \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$.

$|E| \leq \frac{h^2}{2} M_1, \quad M_1 = \max_{x \in [a,b]}\ |f'(x)|$

$|E| \leq \frac{h^3}{12} M_2, \ M_2 = \max_{x \in [a,b]}\ |f''(x)|$

$|E| \leq \frac{h^3}{24} M_2, \ M_2 = \max_{x \in [a,b]}\ |f''(x)|$

$|E| \leq \frac{h^5}{90} M_4, \ M_4 = \max_{x \in [a,b]}\ |f^{(IV)}(x)|, \ h = \frac{b-a}{2}$

$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))]$,

$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}), \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$

$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad y'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y'(x_i) \approx -\frac{3y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}}{2h}$

$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$.