

## Prova 2

**Pode usar a calculadora. Cada questão (1) ... (4) tem peso 2.5.**

- (1) Deseja se aproximar numericamente a solução de  $y(x)$  em  $x = 2$  solução do seguinte problema diferencial usando um método numérico de segunda ordem

$$\begin{cases} y'(x) = -y(x) + 2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

- Escrever a iteração genérica do método de segunda ordem escolhido e depois aplique as iterações para poder chegar a aproximação de  $y(2)$ , especificando o passo  $h$  escolhido.
  - Se usar o passo  $h/2$  porque pode esperar de ter uma aproximação melhor de  $y(2)$ ? Motive a sua resposta.
- (2) Dada a função  $\varphi(x) = 1 + x^2$  determine, usando um método dos quadrados mínimos, a melhor reta que aproxima a função  $\varphi(x)$  no intervalo  $[-2, 0]$ .
- (3) Dada a seguinte sequencia de pontos

x	-1	0	3	4	5
y	-2	1	-3	-8	-10

Determine o melhor polinômio interpolador de grau até 2 no intervalo  $[-1, 4]$ .

Qual é a estimativa do erro  $|p(x) - y(x)|$  obtida com este polinômio no ponto  $x = 1.5$ ?

Para responder a esta pergunta precisa:

- escrever o polinômio interpolador de grau 2 para dados nós de interpolação
  - conhecer a forma associada do erro de interpolação
  - escolher os melhores nós de interpolação que minimizam o erro de interpolação no intervalo  $[-1, 4]$
- (4) Aproxime a integral em  $[0; \pi]$  da função  $f(x) = x \sin(x)$  usando as seguintes formulas:
- Trapézio
  - Simpson
  - Retângulo centrado (regra do ponto médio)

Qual formula é esperada ser a mais acurada? Motive a sua resposta.

### Algumas Fórmulas

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x), \text{ onde } L_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad p_n(x) = \sum_{k=0}^n f[x_0, \dots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

$$\left| f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \prod_{j=0}^n (x - x_j) \right| \leq \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} M_{n+1}, \quad f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!},$$

onde  $x, \xi_x \in (x_0, x_n)$ .

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

$$I \approx \frac{h}{2} \{f(x_0) + 2[f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})] + f(x_n)\},$$

$$I \approx \frac{h}{3} \{f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\},$$

$$I \approx \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$$

$$I \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$

$$I \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i), \quad I \approx h \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad I \approx h \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right).$$

$$|E| \leq \frac{h^2}{2} M_1, \quad M_1 = \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

$$|E| \leq \frac{h^3}{12} M_2, \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

$$|E| \leq \frac{h^3}{24} M_2, \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

$$|E| \leq \frac{h^5}{90} M_4, \quad M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(IV)}(x)|, \quad h = \frac{b-a}{2}$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))],$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}), \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$$

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad y'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y'(x_i) \approx -\frac{3y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}}{2h}$$

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$