Zeros de Funções. Algoritmos iterativos. Método de Bisseção.

MS211 – Cálculo Numérico – Turma C

Giuseppe Romanazzi

Agosto 2023

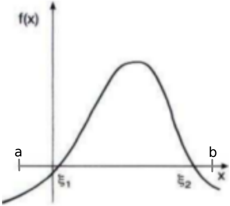
Conteúdo

Definição de zero de uma função real

Um valor $\xi \in \mathbb{R}$ é dito zero da função real $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se

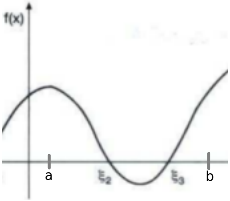
$$f(\xi) = 0$$

Uma função pode ter 0, 1, ou mais zeros. Exemplos:

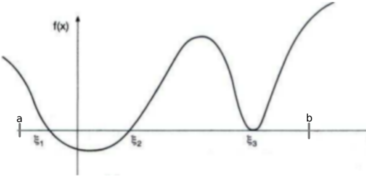


Dois zeros ξ_1,ξ_2 em $[a, b]$.

Não há zeros em $[a, 0]$



Dois zeros em $[a, b]$



Três zeros em $[a, b]$
Dois zeros em $[0, b]$

Problemas dos zeros: Encontrar x tal que $f(x) = 0$

Donde vem o problema de achar os zeros de uma função?

- Equações não lineares:
  $\sin(x) + \cos(x) - e^x = 0$; $\ln x + \sin x = -3$;
  $x^2 + x - \tan x = x\cos(x)$
  Todos estes problemas são do tipo $f(x) = 0$.
  No último caso $f(x) = x^2 + x - \tan x - x\cos(x)$.

- Interseção de duas curvas (funções): $\Psi(x) = \Phi(x)$.
  Neste caso a função f é $f = \Psi - \Phi$. O problema de achar os zeros de f é equivalente ao encontrar os x tais que $\Psi(x) - \Phi(x) = 0$.

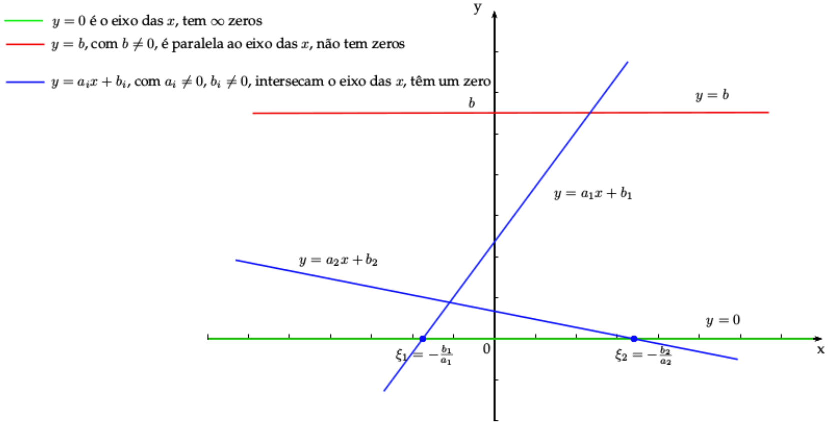
- Determinar os x tais que uma função chega a um dado nível
  Exemplos:
  Determinar os x tais que $g(x) = \ell$ com $\ell \in \mathbb{R}$;
  Resolver $x^2 = 3$; $ln(x) + \sin(x) = 2$; etc.
  Nestes casos as soluções são os zeros de $f(x) = g(x) - \ell$.

Zeros de polinômios de grau 1 (retas)

As Retas no plano xy de equação $y = ax + b$ representam os graficos de funções polinomios de grau 1: $f(x) = ax + b$.
Três casos são possíveis:

- $a = 0, b \neq 0$. A função f é constante $f(x) = b$.
  Não há zeros, o seu gráfico é uma reta que não interseca o eixo das x
- $a \neq 0$. Existe um só zero $\xi = -\frac{b}{a}$.
  $f(x) = ax + b$ tem como gráfico uma reta incidente com o eixo das x.
- $a = 0, b = 0$. Tem infinitos zeros, ou seja a função é $f(x) = 0$ (função nula). O gráfico da f coincide com o eixo das x.

Zeros de polinômios de grau 1 (retas)



Zeros de polinômios de segundo grau (parábolas)

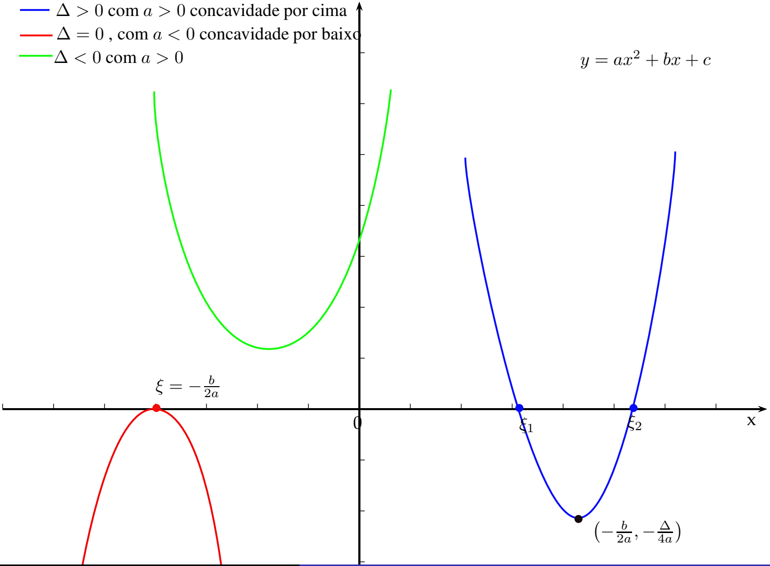
$f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ter até dois zeros porque esta função tem como gráfico a parábola $y = ax^2 + bx + c$ que interseca o eixo das x até duas vezes.

Os zeros se encontram resolvendo a equação $ax^2 + bx + c = 0$ ou equivalentemente determinando as interseções da parábola com o eixo das x $\begin{cases} y = 0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$

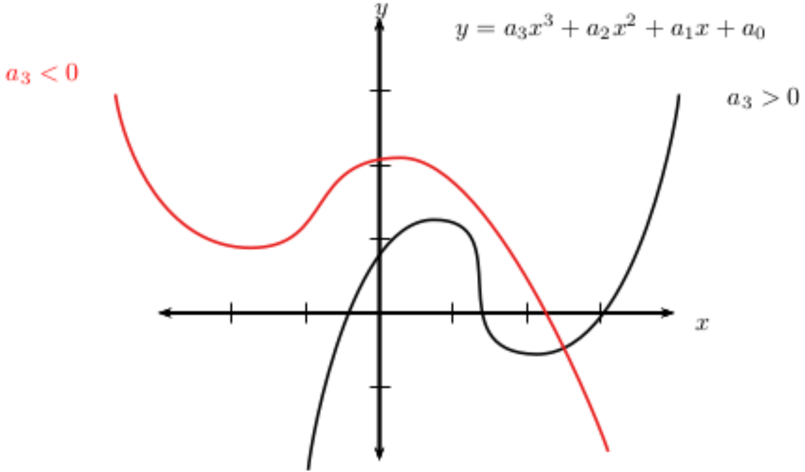
Três situações são possíveis, que dependem do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$:

- se $\Delta > 0$ temos dois zeros: $\xi_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $\xi_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- se $\Delta = 0$ temos um zeros $\xi = -\frac{b}{2a}$ a abscissa do vértex da parábola
- se $\Delta < 0$ não temos algum zero (real).

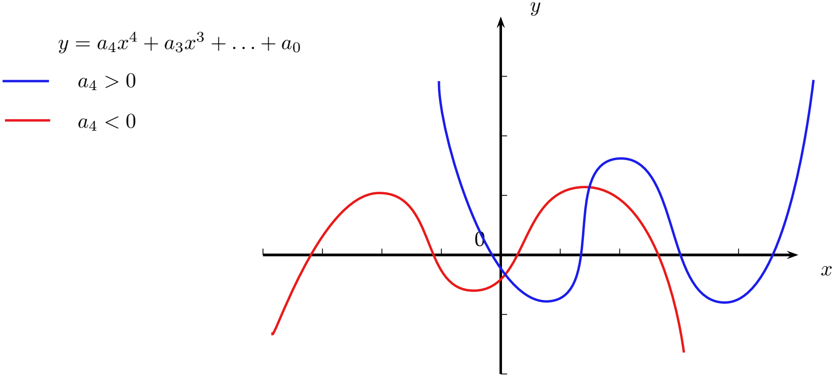
Zeros de polinômios de segundo grau (parábolas)



Polinômios de grau superior, $n = 3$



Polinômios de grau superior, $n = 4$



Polinomios de grau n par podem ter de 0 até n zeros reais.
Polinomios de grau n impar ($n > 1$) podem ter de 1 até n zeros reais.

Zeros de polinômios de grau n

Um polinômio de grau n, $p_n(x)$, é uma função do tipo $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ e pode ter até n zeros reais, mas tem sempre n zeros complexos $\xi = \xi_{re} + i\xi_{im}$.
O polinômio $p_n(x)$ pode ser escrito como

$$p_n(x) = a_n(x - \xi_1) \cdots (x - \xi_n)$$

onde ξ_j são os zeros do polinômio p_n.

- Encontrar os zeros de polinômios de grau n (com n grande) e de funções genericas resulta ser difícil analiticamente, por isso vamos usar métodos numéricos para aproximar os zeros.

Procedimento para achar os zeros

O Procedimento divide-se em dois passos

Passo 1 Localização ou isolamento das regiões que contêm os zeros

Passo 2 Aplicação de um método numérico para refinar tais regiões e achar assim com mais precisão os zeros

O sucesso do Passo 1 na localização de regiões restritas no entorno de um zero permite de resolver a Passo 2 mais rapidamente.

Teorema 1 (Localização dos zeros)

Seja $f(x)$ uma função continua em $[a, b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Vale o seguinte:

- *existe pelo menos um zero $\xi \in [a, b]$, ou seja existe $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = 0$.*
- *se f for também estritamente monótona em $[a, b]$ (ousseja com f' constante em sinal) então f tem somente um zero em $[a, b]$.*

Teorema 1. Interpretação Gráfica

Fig. 1

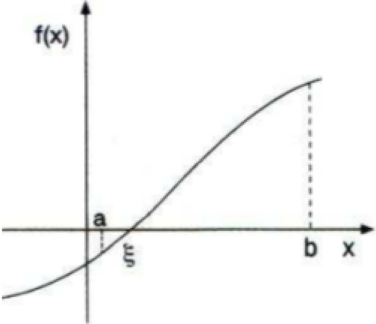
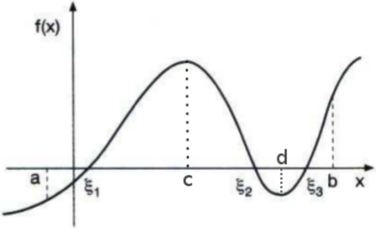


Fig. 2

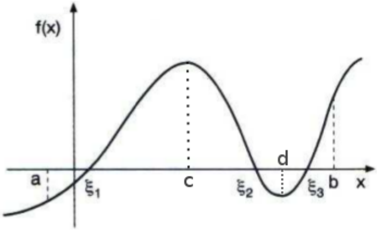


Em ambos os casos entre a e b temos pelo menos um zero porque $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos e f é continua.

Na Figura 1, temoms exatamente um zero ξ porque f é monótona crescente.

Na Figura 2 temos três zeros ξ_1, ξ_2, ξ_3, porque a função muda a monotonocidade três vezes.

O que significa o Teorema 1. Interpretação Gráfica



- Somente conhecendo o sinal de $f(a), f(b), f(c), f(d)$ e a monotonocidade da função (ou seja onde ela é crescente ou decrescente) é possível determinar regiões mais acuradas que contêm os zeros.
- Em $[a, c]$ é esperado só um zero porque a função é crescente e $f(a) \cdot f(c) < 0$. As regiões que contêm os outros zeros são $[c, d]$ e $[d, b]$ porque em estes intervalos f é monótona (decrescente em $[c, d]$ e crescente em $[d, b]$) e os extremos dos intervalos tem sinal oposto.

Aplicação do Teorema 1: Determinar regiões que contêm os zeros

Considere $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$ no intervalo $[0, 3]$.

- $f(0) = -5 < 0$ e $f(3) = \ 1.4092 > 0$ existe pelo menos um zero em $[0, 3]$.
- Analisando a derivada podemos verificar se existem mais zeros: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5e^{-x} > 0$, então f é estritamente crescente porque temos sempre $f' > 0$ em todo $\mathbb{R}$, **portanto existe um único zero em $[0, 3]$.**
- Estudando o sinal da f computada em pontos (random ou equidistantes) em $[1, 3]$ podemos localizar melhor o zero. Por exemplo usando pontos equidistantes:

x	0	1	2	3
f(x)	-5	-0.8394	0.7375	1.4831

O zero está no intervalo $[1, 2]$ que é mais restrito de $[0, 3]$.

Se quissemos ser mais acurados...
analisando f nos pontos $1.d$ com $1 \leq d \leq 9$ observaremos que $f(1.4) < 0$ e $f(1.5) > 0$. Portanto o zero está localizado em $[1.4, 1.5]$.

Uma análise mais cuidadosa usando por exemplo o método das bisseções leva a ter $\xi \approx 1.4304$.

Aplicação do Teorema 1: Determinar regiões que contêm os zeros

Seja $f(x) = x^3 - 9x + 3$,
analizando o sinal da f em $-5, -1, 0, 1, 2, 3$ temos

x	-5	-1	0	1	2	3
f(x)	-	+	+	-	-	+

Portanto temos pelo menos três intervalos onde varia o sinal $[-5, -1]$, $[0, 1]$, $[2, 3]$: temos pelo menos três zeros!
Sendo que f é um polinômio de grau 3 temos exatamente três zeros (reais), cada um num intervalo:

$$\xi_1 \in [-5, -1], \xi_2 \in [0, 1], \xi_3 \in [2, 3]$$

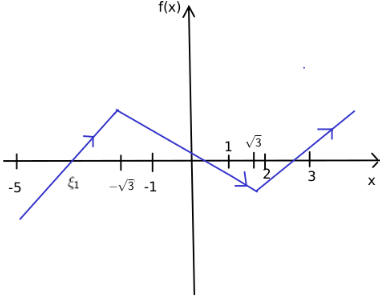
Podemos refinar os intervalos sem avaliar a f em outros pontos? ...

Aplicação do Teorema 1: Determinar regiões mais limitadas usando a derivada

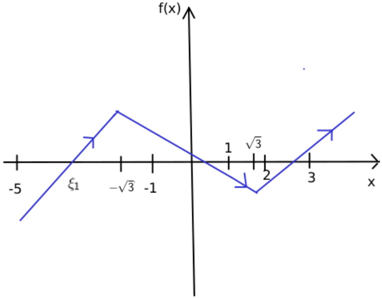
...Vamos determinar as regiões onde muda o sinal da derivada assim conheceremos onde f é crescente ($f' > 0$) e onde é decrescente ($f' < 0$).

$$f'(x) = 3x^2 - 9 > 0 \iff x^2 > 3 \iff x < -\sqrt{3} \text{ ou } x > \sqrt{3}$$

Sendo que $\sqrt{3} \approx 1.732$, em $[-5, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 3]$ a função é crescente e é decrescente em $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.



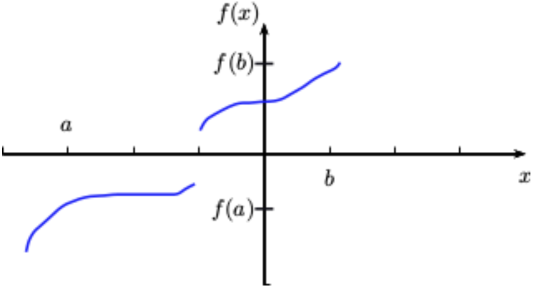
Aplicação do Teorema 1: Determinar regiões mais limitadas usando a derivada



Sabemos que sendo f crescente em $[-5, -\sqrt{3}]$ e decrescente em $[-\sqrt{3}, -1]$, o máximo em $[-5, -1]$ é obtido por $x = -\sqrt{3}$, portanto temos $f(-\sqrt{3}) > 0$ e para o Teorema 1 o zero ξ_1 estará em $[-5, -\sqrt{3}]$. O mínimo de f em $[0, 3]$ é obtido por $x = \sqrt{3}$ portanto $f(\sqrt{3}) < 0$, mas sendo que $1 < \sqrt{3} < 2$ este não ajuda a refinar o intervalo $[0, 1]$ e nem $[2, 3]$ onde estão respetivamente os zeros ξ_2 e ξ_3.

Funções não continuas (descontinuas)

O Teorema 1 não vale para funções descontinuas. Porque se $f(a) \cdot f(b) < 0$ com f descontinua não temos garantia que existe um zero em $[a, b]$.



Procedimento para achar os zeros

O Procedimento divide-se em duas fases:

1. Passo 1: Localização ou isolamento das regiões que contêm os zeros
    - Aplicação do Teorema 1
2. **Passo 2**: Aplicação de métodos numéricos para refinar tais regiões e achar assim com mais precisão os zeros

Critérios de precisão na aproximação do zero

Quando podemos dizer de estar perto do zero procurado?

Seja $\bar{x}$ uma aproximação da raiz ξ obtida de um método e $\varepsilon > 0$ a precisão requerida do problema, podemos dizer de achar (ou aproximar) o zero a menos de uma tolerância ε se

i) $|\bar{x} - \xi| < \varepsilon$

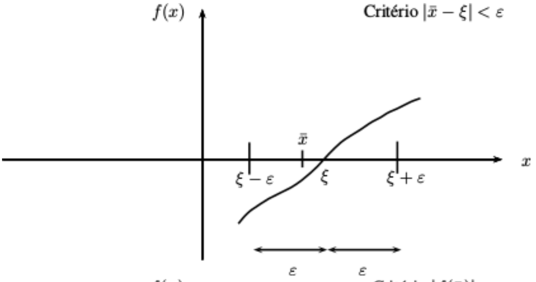
ou

ii) $|f(\bar{x})| < \varepsilon$.

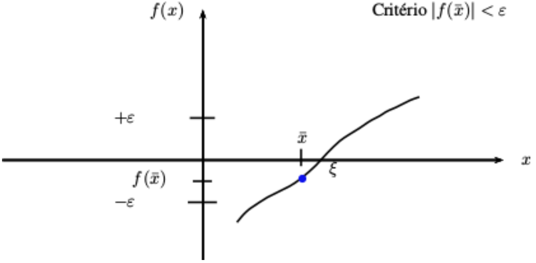
Em qualquer método iterativo podemos escolher o critério do precisão baseando-se numa destas condições ou em ambas.

Critérios de precisão, vistos graficamente

Critério i)
$|\bar{x} - \xi| < \varepsilon$

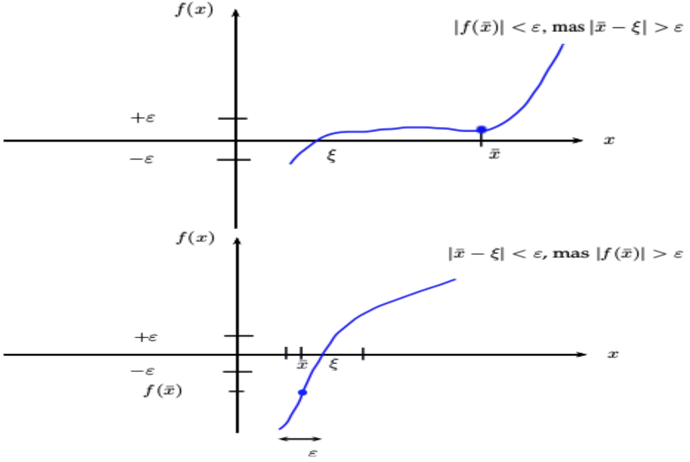


Critério ii)
$|f(\bar{x})| < \varepsilon$



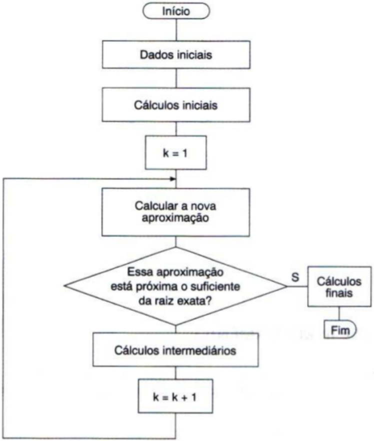
Critérios de precisão

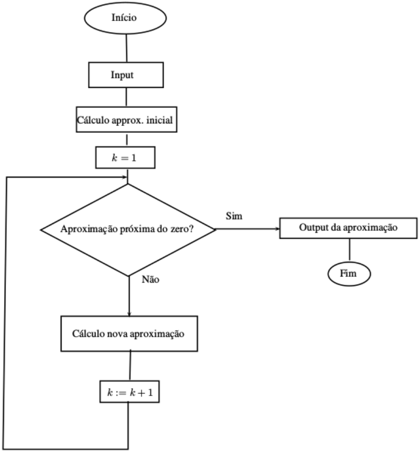
Não sempre as condições i) e ii) são satisfeitas simultaneamente, isso depende da f analisada



Algoritmos associados aos métodos iterativos

Usaremos métodos com iterações para aproximar os zeros.
Em cada iteração (conjunto de operações que se repetem) aproximaremos sempre melhor o zero. Dois algoritmos possíveis do mesmo método:





Algoritmos Iterativos

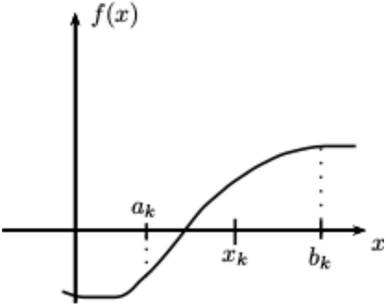
- Os critérios de precisão vistos antes são suficientes para ter uma boa aproximação, portanto são também chamados **critérios de paragem** dos algoritmos.
- Sendo que ξ é desconhecido (por isso é procurada!) não é possível aplicar diretamente o critério $|\bar{x} - \xi| < \varepsilon$.
  Este critério é substituído do critério $|b_k - a_k| < \varepsilon$ onde $[a_k, b_k]$ é o intervalo que contem o zero ξ e que é obtido na iteração k do método, junto a aproximação x_k do zero com $x_k \in (a_k, b_k)$.

  Portanto se verificamos $|b_k - a_k| < \varepsilon$ então vale com certeza $|x_k - \xi| < \varepsilon$.
- Note que a seguir os algoritmos usados podem usar $k = 0$ ou $k = 1$ para indicar a primeira iteração.

Método de Bissecção

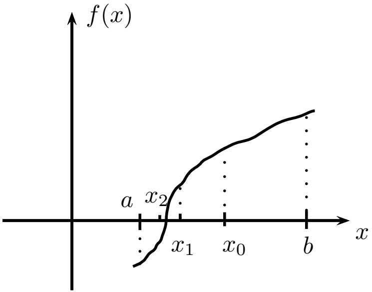
Descrição do método

Aplica-se num intervalo $[a, b]$ tal que a função tem sinais opostos nos seus extremos. Divide-se o intervalo a meio, escolhe-se o subintervalo onde a função tem sinais opostos nos extremos e assim sucessivamente. Em cada iteração o aproximante do zero, é o ponto médio do intervalo analisado $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$.



Método da Bissecção: Algoritmo

Inicialização	$[a_0, b_0] = [a, b]$
Repetir	1. $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$; 2. Se $f(x_k)f(a_k) < 0$ Então $a_{k+1} = a_k,\ b_{k+1} = x_k$ Senão $a_{k+1} = x_k,\ b_{k+1} = b_k$ 3. $k=k+1$
Até	Verificar o critério de paragem escolhido



Exemplo de aplicação do método da bissecção

$f(x) = x \log x - 1$ onde $\log \equiv \log_{10}$.
Achar o zero a menos de um erro (tolerância) $\varepsilon = 10^{-4}$.
Observamos que:

- $f(2) \approx -0.3979 < 0$ e $f(3) \approx 0.4314 > 0$ portanto existe um zero em $[2, 3]$.
- O zero é único em $[2, 3]$? Sim, porque $f'(x) = \log x + x(\log x)' = \log x + x(\frac{\ln x}{\ln 10})' = \log x + \frac{1}{\ln 10} = \frac{\ln(x)+1}{\ln 10} > 0$, se $x > 1$.
- Usamos o critério de paragem $|b_k - a_k| < \varepsilon$, com $\varepsilon = 10^{-4}$.

Exemplo de aplicação do método da bissecção

$[a_0, b_0] = [2, 3]$ com $f(a_0)f(b_0) < 0$, $|b_0 - a_0| = 1 > \varepsilon$

$$x_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = 2.5 \; \begin{cases} f(x_0) = -5.15 \cdot 10^{-3} < 0 \\ f(a_0) = -0.3979 < 0 \\ f(b_0) = 0.4314 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} z \in (x_0, b_0) \\ a_1 = x_0 = 2.5 \\ b_1 = b_0 = 3 \\ |b_1 - a_1| > \varepsilon ... alg.continua \end{array}$$

$$x_1 = \frac{a_1+b_1}{2} = 2.75 \; \begin{cases} f(x_1) = 0.2082 > 0 \\ f(a_1) = -5.15 \cdot 10^{-3} < 0 \\ f(b_1) = 0.4314 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} z \in (a_1, x_1) \\ a_2 = a_1 = 2.5 \\ b_2 = x_1 = 2.75 \\ |b_2 - a_2| > \varepsilon ... alg.continua \end{array}$$

$x_2 = \frac{a_2+b_2}{2} = 2.625 \dots$

Se for $\varepsilon = 0.3$ o método obtêm o aproximante $x_2 = 2.625$.
Se $\varepsilon = 10^{-4}$ obtemos em vez como aproximante $x_{14} \approx 2.506195$, que for obtido depois 14 iterações. Note que o zero real é $z \approx 2.506184$.

Observações

- No fim de cada iteração k toma-se como aproximante do zero o valor x_k.
- O método consigue localizar bem o zero na precisão requerida. Isso era esperado porque refinemos sempre mais o intervalo inicial determinando em cada iteração um intervalo menor que contem o zero.
- Sempre que necessitaremos uma precisão maior (ou tolerância menor) o método numérico requererá mais iterações.