Gabarito Prova 1.

1 Gabarito da Prova 1

1. Considere as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = sen(x) + 1$

   - Quantas interseções existem entre estas duas funções?
   - Achar uma aproximação do ponto $\tilde{x}$ (ponto de interseção) menor possível tal que $f(x) = g(x)$ usando o método da bisseção:
     - Determine o intervalo inicial onde aplicar o método.
     - Implemente dois passos do método.
   - Considere agora o método de Newton para resolver o problema do item anterior:
     - Quais são as condições que garantem a convergência do método de Newton?
     - Verifique se existir um intervalo que contem o ponto $\tilde{x}$ onde estas condições são satisfeitas.
     - Implemente um passo do método de Newton para achar uma aproximação de $\tilde{x}$.

   Resposta: O gráfico das duas funções f e g é dado na Figura 4

   - Observando o gráfico note se que pode ter somente duas interseções, eles ficam no intervalo $[-2, 2]$.
   - A interseção menor $\tilde{x}$ é negativa é está no intervalo $[-1, 0]$. Note que a interseção das funções f e g satisfaz que $f(\tilde{x}) = g(\tilde{x})$ e então $f(\tilde{x}) - g(\tilde{x}) = (f - g)(\tilde{x}) = 0$. Apliqueremos então o método da bisseção a função $h = f - g$. Observamos que $h(-1) = f(-1) - g(-1) = 1 - \sin(-1) - 1 = -\sin(-1) = 0.8415 > 0$ (ou equivalentemente $f(-1) = 1 > g(-1) = \sin(-1) + 1 = 0.1585$) e $h(0) = f(0) - g(0) = 0 - \sin(0) - 1 < 0$ (ou equivalentemente $f(0) = 0 < g(0) = \sin(0) + 1 = 1$).
     Então sendo que h é continua com sinal oposto em $x = -1$ e $x = 0$ existe pelomenos um zero de h em $[-1, 0]$.
     Analizamos a derivada de h para verificar se tem um único zero em $[-1, 0]$.
     $$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 2x - \cos(x)$$
     Verificamos se ela tem sinal constante. $h'(0) = 0-1 = -1 < 0$, $h'(-1) = -2-\cos(-1) = -2,543 < 0$ Analizamos se h' for crescente em $[-1, 0]$, porque se acontece isso então $0 < h'(-1) < h'(x) < h'(0)$ para cada $x \in]-1, 0[$.
     $$h''(x) = 2 + sin(x) > 2 - 1 = 1 > 0$$
     Então é verdade que $h'(x)$ é crescente e então $h'(x) > 0$ é sempre positiva, portanto h é sempre crescente em $[-1, 0]$ e portanto existe um único zero $\tilde{x}$ de h em $[-1, 0]$.

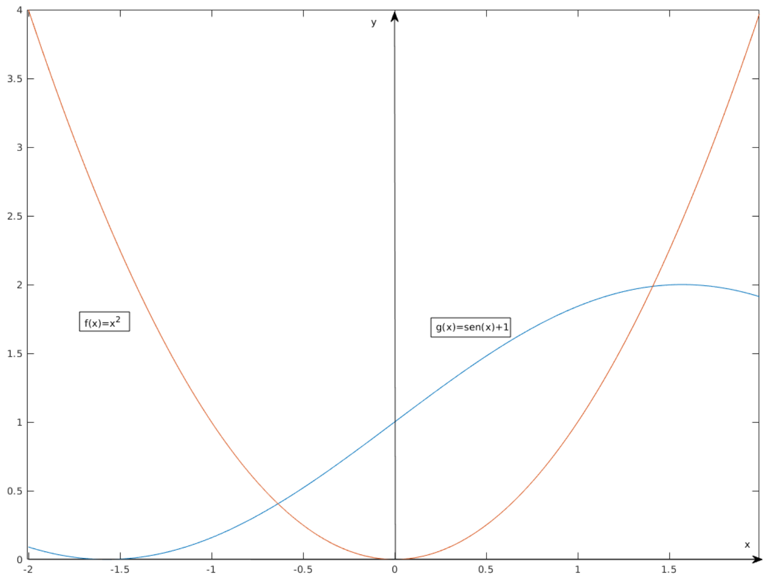

Figura 1: Questão 1, gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$

- Um bom intervalo onde aplicar o método da bisseção para achar $\tilde{x}$ é $[-1, 0]$.
- Primeiro passo: $a_0 = -1$, $b_0 = 0$, $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = -0.5$
  Observo que $h(x_0) = -0.2706 < 0$ tem o sinal oposto de $h(-1) > 0$ então o zero encontrerás no intervalo $[a_1, b_1] = [-1, -0.5]$
  Segundo passo: $a_1 = -1$, $b_1 = -0.5$, $x_1 = \frac{a_0+b_0}{2} = -0.75$

- As condições que guarantem a convergência do método de Newton para achar o zero $\tilde{x}$ de h são: que tem de exisitir um intervalo I que contém $\tilde{x}$ onde
  - h, h' , h'' são contínuas;
  - $h'(x) \neq 0$;
  - existe um M tal que $|\frac{hh''}{h'^2}| \leq M < 1$.
- Note que $h(x) = x^2 - sen(x) - 1$, $h'(x) = 2x - \cos(x)$, $h''(x) = 2 + sin(x)$ são sempre continuas.
  Note que
  $$h'(x) = 2x - \cos(x) \neq 0 \iff x \neq \cos(x)/2$$
  Notamos que se $\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$ então $cos(x)/2 \geq 0$ e $x < 0$
  Por isso no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ que contem o zero $\bar{x}$ sendo que $[-1, 0] \subset [-frac\pi 2, 0]$ temos sempre $h'(x) \neq 0$.
  Avaliamos agora se $|\frac{hh''}{h'^2}| < 1$ em $I = [-\frac{\pi}{2}, 0]$, ouseja se $-1 < \frac{hh''}{h'^2} < 1$.
  Provamos se $\frac{hh''}{h'^2} < 1$.

$$\frac{hh''}{h'^2} = \frac{2x^2 + x^2 \sin x - 3\sin x - \sin^2 x - 2}{4x^2 - 4x\cos x + \cos^2 x} < 1?$$

Observamos que sendo $-\sin^2 x = \cos^2 x - 1$ é suficiente analisar se

$$2x^2 + x^2 \sin x - 3\sin x - 3 < 4x^2 - 4x\cos x$$

ou seja se $x^2(2-\sin x) + 3(\sin x + 1) - 4x\cos(x) > 0$ Note que este acontece porque $2 - \sin x > 0$ $\sin x + 1 \geq 0$ e $-4x\cos x > 0$ se $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$.
Analogamente podemos provar que $\frac{hh''}{h'^2} > -1$.
Então um bom intervalo onde aplicar Newton para encontrar $\tilde{x}$ é $I = [-\frac{\pi}{2}, 0]$.

- Implmentamos Newton partindo de um ponto $x_0 \in I = [-\frac{\pi}{2}, 0]$ assim teremos certeza da convergencia. Se tomamos $x_0 = -\frac{\pi}{4}$ obteremos depois um passo

$$x_1 = x_0 - \frac{h(x_0)}{h'(x_0)} = -0.643218$$

que parece já uma boa aproximação do zero.

2. Resolver com a eliminação de Gauss com pivotamento total no sistema de aritmética finita $FP(10, 3, -9, 9)$ o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2.5x_1 + 2^{10}x_2 = 1 \\ 10^{-2}x_1 - 10^5 x_2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Qual é vantagem no usar o pivotamento total respeito o método de Eliminação de Gauss clássico para resolver este problema?

Resposta: Escrevendo o sistema (1) de forma matricialmente e resolvendo com pivotamento total com truncamento, segue que

$$\left(\begin{array}{ccc} 2.5 & 2^{10} & 0 \\ 10^{-2} & -10^5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} -10^5 & 10^{-2} & 0 \\ 2^{10} & 2.5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} -10^5 & 10^{-2} & 0 \\ 0 & 2.5 & 1 \end{array}\right) \tag{2}$$

onde, o único multiplicador é dado por

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{2^{10}}{-10^5} = -0.102 \times 10^{-1}.$$

Assim, temos o seguinte sistema a resolver.

$$2.5x_1 = 1 \rightarrow x_1 = 1/2.5 = 0.4$$
$$-10^5 x_2 + 10^{-2}x_1 = 0 \rightarrow x_2 = \left(10^{-2} \times 0.4\right)/10^{-5} = 0.4 \times 10^{-7}.$$

cuja solução é

$$\vec{x} = \left(\begin{array}{l} 0.4 \\ 0.4 \times 10^{-7} \end{array}\right) \tag{3}$$

Vantagem: O pivotamento permite de diminuir a possibilidade de dividir para números pequenos e assim teremos um método mais estável do método clássico de eliminação de Gauss. Neste caso especifico temos valores da matriz muito diferentes em modulo e este é um caso tipico onde o pivotamento permite de reduzir o crescimento dos erros passo depois passo quando trabalhamos em aritmetica finita , conseguindo transformar a matriz numa matriz quase equivalente no passo seguinte.

3. Dado o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 4x - 3y + z = 3 \\ x + y = 2 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

- Verifique se o método de Jacobi pode convergir a solução deste sistema linear. - Implemente um passo do método de Jacobi partindo de $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t$.

Resposta: A matriz do sistema é

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para verificar se o método de Jacobi converge, temos que ver se: é dominante por linhas ou se é fracamente dominante e todos seu elementos são nulos, caso não satisfaça o anterior não podemos concluir nada.

Vejamos se satisfaz o critério das linhas dominante, isto é,

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|.$$

Para $i = 1$, segue

$4 = |a_{11}| = |-3|+|1|= 4.$

Como a primeira linha não satisfaz o critério, dizemos que a matriz A não é dominante por linhas.

Agora, vejamos se pelo menos uma linha é dominante e as outras são iguais, isto é

Para $i = 2, 3$.

$1 = |a_{22}| = |1|+|0|= 1,$

$2 = |a_{33}| > |0|+|1|= 1.$

Vemos que A satisfaz o critério das linhas fracamente, porém a matriz A tem elementos nulos. Logo, não podemos dizer que o método converge.
Mas se pode mostrar que para esta matriz (não reducivel) o critério das linhas fraco guarante a convergência.

Segue agora a implementação de um passo, lembremos o método de Jacobi

$$x_i^{(1)} = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{3} a_{ij} x_j^{(0)}}{a_{ii}} \tag{4}$$

com $i = 1, 2, 3$. Aplicando o método segue que

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{3 - (-3 \times 1 + 1 \times 1)}{4} = \frac{3+2}{4} = \frac{5}{4}, \\ x_2^{(1)} &= \frac{2 - (1+0)}{1} = \frac{2-1}{1} = 1, \\ x_3^{(i)} &= \frac{0 - (1+0)}{(-2)} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Portanto, a solução do sistema dada por um passo pelo método de Jacobi é:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

4.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x = y - 2 \end{cases}$$

- Quantas soluções tem este sistema?
- Implemente um passo do método de Newton para achar uma solução do sistema:
  - Determine uma região onde o método de Newton possa convergir a esta solução.
  - Escolha um ponto (x_0, y_0) nessa região e computa um passo de Newton.

Resposta:

- A equação $x^2 - y^2 = 1$ descreve uma hiperbole com focos no eixos das x que interseca o eixo das x nos pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$, e não interseca o eixo y, porque não tem nenhum ponto real $(0, y)$que pode satisfazer a equaçõ $0 - y^2 = 1$.
  A segunda equação $x = y - 2$ descreve uma reta do tipo $y = x + 2$ com coeficiente angular positivo (é uma função y=y(x) crescente) e interseca o eixo das x no ponto $x = -2$ e o eixo das y no ponto $y = 2$. Portanto obteremos os gráficos dados na Figura 2.
  Note que podemos ter somente uma interseção.
  Uma outra maneira para ver que temos somente uma interseção é de resolver diretamente o sistema: Substituimos $x = y - 2$ na equação $x^2 - y^2 = 1$ e obtemos

  $$(y-2)^2 - y^2 = 1 \rightarrow y^2 - 4y + 4 - y^2 = 1 \rightarrow -4y = -3 \rightarrow y = \frac{3}{4}$$

  e sendo $x = y - 2 = \frac{3}{4} - 2 = -\frac{5}{4}$ obteremos o único ponto de interseção que é $(-\frac{5}{4}, \frac{3}{4})$.
- Por poder implementar o método de Newton para achar a única solução do sistema não linear dado $F(x, y) = 0$, com

  $$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 - 1 \\ x - y + 2 \end{pmatrix}$$

  , precisamos encontrar uma região Ω que contem o zero de F e onde:
  (a) a função $F(x, y)$ é derivavel com derivadas contínuas

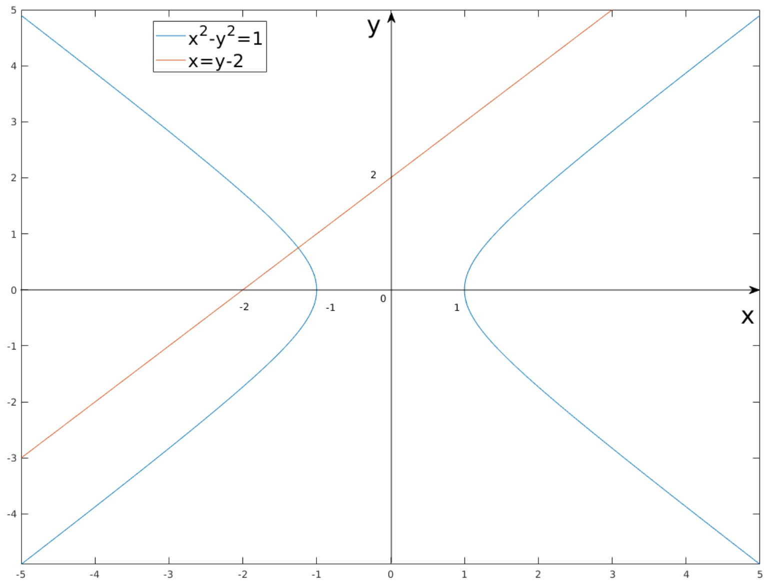

Figura 2: Questão 4, gráficos dos pontos (x, y) que satisfazem as equações $x^2 - y^2 = 1$ e $x = y - 2$.

(b) $\det(J_F(\bar{x})) \neq 0$, $\forall x \in \Omega$

(c) A matriz Jacobiana $J_F(\bar{x})$ satisfaz a condição de Lipschitz : existe $L > 0$ tal que $\forall y, z \in \Omega$ $\|J_F(\bar{y}) - J_F(\bar{z})\| \leq L\|\bar{y} - \bar{z}\|$ numa qualquer norma continua.

O item (a) é sempre satisfeito em cada ponto em $\mathbb{R}^2$.
Notamos que a matriz Jacobiana de F no ponto (x, y) é

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

então o seu determinante é $\det(J_F(x, y)) = -2x + 2y$ que será diferene de zero em todos os pontos que não ficam na bissetriz $x = y$. Então Ω_0 não pode conter a bissetriz, que passa no primeiro no terceiro quadrante.
Para provar o item (c), notamos que por cada $\bar{y} = (y_1, y_2)$, $\bar{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\|J_F(\bar{y}) - J_F(\bar{z})\|_\infty = \|\begin{pmatrix} 2(y_1 - z_1) & -2(y_2 - z_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\|_\infty = \max\{|2(y_1 - z_1)| + |2(y_2 - z_2)|, 0\}$$

Então

$$\|J_F(\bar{y}) - J_F(\bar{z})\|_\infty = |2(y_1 - z_1)| + |2(y_2 - z_2)| \leq 4 \max_{i=1,2} |y_i - z_i| = 4\| \begin{matrix} y_1 - z_1 \\ y_2 - z_2 \end{matrix} \|_\infty = 4\|\bar{y} - \bar{z}\|_\infty$$

Portanto a condição de Lipschitz para os Jacobianos é satisfeita em todo o plano $\mathbb{R}^2$ com $L = 4$; Podemos então asserir que podemos usar com Ω o segundo quadrante

$$\Omega = \{(x, y) | x <= 0, y >= 0\}$$

- Escolhemos $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ e aplicamos um passo de Newton como segue em dois micro-passos:

  (1) Resolvemos o sistema $J_F(x_0, y_0)\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = -F(x_0, y_0)$

  (2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$

  O sistema $J_F(x_0, y_0)\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = -F(x_0, y_0)$ é $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ e tem como solução $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

  Portanto
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$