MS211, Cálculo Numérico, Turma A
Segundo Semestre de 2021, UNICAMP

Resolução Atividade 2

Entrega dos exercícios SOMENTE por Google Classroom até Sexta-Feira 08/10/2021, h.12:00 (meio dia).

Escreva o seu nome e o RA com destaque na primeira página.
Começa cada questão numa nova página.
A atividade tem de ser redigida a mão escrevendo com caneta preta ou azul sobre folhas brancas com ou sem pauta.
Os códigos e tabelas e os gráfico utilizado para responder as questões podem ser fornecidas digitalmente em ficheiro separados.
Escreva os resultados com até 5 dígitos significativos.

(1) Considere o sistema linear

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 10 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 5x_1 - 6x_2 = 0 \end{cases}$$

- Verifique se este sistema admite solução. Motive a sua resposta.
- Em caso de resposta afirmativa encontre a sua solução usando o método de eliminação de Gauss e resolvendo o sistema triangular resultante da eliminação usando o método dado na aula. Escreva todas as passagens e contas a mão.

Resolução (1):

Para provar que o sistema admite solução, basta provar que $posto(A) = posto(A|b)$, com $n = 3$ que é o mesmo número das incógnitas do problema. Com efeito,

Sejam,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{Ex0.0a}$$

Então,

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 10 \\ -1 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{Ex0.0b}$$

$$\sim \quad L_2 + \frac{1}{3}L_1 \to L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 10 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} & \frac{25}{3} \\ 4 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{Ex0.0c}$$

$$\sim \quad L_3 - \frac{4}{3}L_1 \to L_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 10 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} & \frac{25}{3} \\ 0 & \frac{11}{3} & \frac{-13}{3} & \frac{-43}{3} \\ 5 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{Ex0.0d}$$

$$\sim \quad L_4 - \frac{5}{3}L_1 \to L_4 \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 10 \\ 0 & \left(\frac{4}{3}\right) & \frac{10}{3} & \frac{25}{3} \\ 0 & \frac{11}{3} & \frac{-13}{3} & \frac{-43}{3} \\ 0 & \frac{-8}{3} & \frac{-20}{3} & \frac{-50}{3} \end{array}\right) \tag{Ex0.0e}$$

$$\sim \quad L_3 - \frac{11}{4}L_2 \to L_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 10 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} & \frac{25}{3} \\ 0 & 0 & \frac{-27}{2} & \frac{-149}{4} \\ 0 & \frac{-8}{3} & \frac{-20}{3} & \frac{-50}{3} \end{array}\right) \tag{Ex0.0f}$$

$$\sim \quad L_4 + 2L_2 \to L_4 \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 10 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} & \frac{25}{3} \\ 0 & 0 & \frac{-27}{2} & \frac{-149}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{Ex0.0g}$$

Então, o $posto(\mathrm{A} \mid b) = 3$.

E, como a linha 4 de A é igual à linha $1-2$ vezes a linha 2 ($L_4 = L_1 - 2L_2$), temos que, o $posto(A) = 3$. Portanto,

$$posto(A) = posto(A|b).$$

E, a solução de (Ex0.0g), é dada por

$$\begin{cases} x_3 = 2,75926 \\ x_2 = -0,64814 \\ x_1 = -0,77778 \end{cases} \tag{Ex0.0h}$$

e como $(A \mid b) \Leftrightarrow (A)$ então, temos que (Ex0.0h) é solução do sistema original (**??**).

(2) Considere a matriz $A_4 = (a_{ij})$ de Hankel de ordem 4 que tem como coeficientes

$$a_{i,4+k-i} = \begin{cases} 2^k & \text{se } k > 0 \\ 2^{\frac{1}{2-k}} & \text{se } k \leq 0 \end{cases}$$

para cada $i = 1, \ldots, 4$; $k = i-3, \ldots, i$.

Q2a Determine analiticamente o vetor $\bar{b}$ tal que $A_4 x = \bar{b}$ tem como solução $\bar{x} = [1, \ldots, 1]^t$.

Q2b Escreva os códigos do método de Eliminação de Gauss com pivotamento e aquele sem pivotamento para a resolução de sistemas lineares do tipo $A_4 x = \bar{b}$

Q2c Resolve o sistema $A_4 x = \bar{b}$ usando o método de Eliminação de Gauss com e sem pivotamento, pode usar os códigos do item anterior ou resolver a mão.

Q2d Determine o erro relativo em norma euclideana $e_r = \frac{\|\bar{x}-x\|_2}{\|x\|_2}$ associados aos dois métodos.

Q2e Considere a matriz de Hankel A_{10} de ordem 10

$$a_{i,10+k-i} = \begin{cases} 2^k & \text{se } k > 0 \\ 2^{\frac{1}{2-k}} & \text{se } k \leq 0 \end{cases}$$

para cada $i = 1, \ldots, 10$; $k = i-9, \ldots, i$. Repete os itens anteriores para o sistema $A_{10}x = \bar{b}$ tal que $\bar{x} = [1, \ldots, 1]^t$ seja solução, e verifique se o método de eliminação de Gauss de pivotamento dá um erro relativo bem menor daquele sem pivotamento. Porque acontece isso?

Resolução (2):

Q2a Observamos que de $a_{i,j} = a_{i,4+k-i}$ encontramos a relação $k = i + j - 4$. então

$$a_{i,j} = a_{i,4+k-i} = \begin{cases} 2^{i+j-4} & \text{se } i+j > 4 \\ 2^{\frac{1}{6-(i+j)}} & \text{se } i+j \leq 4 \end{cases}$$

e portanto

$$A_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{1/4} & 2^{1/3} & 2^{1/2} & 2 \\ 2^{1/3} & 2^{1/2} & 2 & 2^2 \\ 2^{1/2} & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.1892 & 1.2599 & 1.4142 & 2.0000 \\ 1.2599 & 1.4142 & 2.0000 & 4.0000 \\ 1.4142 & 2.0000 & 4.0000 & 8.0000 \\ 2.0000 & 4.0000 & 8.0000 & 16.0000 \end{bmatrix}$$

Agora para determinar $\bar{b}$ tal que $A_4 \left[1, \ldots, 1\right] = \bar{b}$ é suficiente computar o produto $A_4 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ portanto

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 2^{1/4} + 2^{1/3} + 2^{1/2} + 2 \\ 2^{1/3} + 2^{1/2} + 2 + 2^2 \\ 2^{1/2} + 2 + 2^2 + 2^3 \\ 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 5.8633 \\ 8.6741 \\ 15.414 \\ 30.000 \end{bmatrix}$$

Q2b Código em Matlab da Eliminação de Gauss sem pivotamento

```
function x=eliminacaogauss(A,b)

  n= length(b);

  for k=1:n-1
     for i=k+1:n
```

```
      %m=aik/akk , multplicador de Lagrange
      A(i,k)= A(i,k)/A(k,k);
      b(i)= b(i) - A(i,k)*b(k);

      for j=k+1:n
        A(i,j)= A(i,j) - A(i,k)*A(k,j);
      end
    end
  end
  %aqui A=[L\U], b= L^{-1}b = b^{(n-1)}
  %resolvemos o sistema Ux=L^{-1}b que  é A^{(n-1)}x= b^{(n-1)}
  A
  b

 x(n)= b(n)/A(n,n);

  for k=n-1:-1:1
     x(k)= b(k);
     for j=k+1:n
        x(k)= x(k)- A(k,j)*x(j);
     end
     x(k)= x(k)/A(k,k);
  end

end

function x=eliminacaogausspivot(A,b,dsign)

  n= length(b);
  %pause
  for k=1:n-1
     [mk,imk]=max(abs(A(k:n,k)));
     imk=imk+k-1;
     if imk~=k
        auxA=A(k,:);
        auxb=b(k);
        A(k,:)= A(imk,:);
        A(imk,:)= auxA;
        b(k)= b(imk);
        b(imk)=auxb;
     end
     for i=k+1:n
       %m=aik/akk , multplicador de Lagrange
       A(i,k)= A(i,k)/A(k,k);
```

```
        b(i)= b(i) - A(i,k)*b(k);

        for j=k+1:n
          A(i,j)= A(i,j) - A(i,k)*A(k,j);
        end
      end
   end
   %aqui A=[L\U], b= L^{-1}b = b^{(n-1)}
   %resolvemos o sistema Ux=L^{-1}b que  é A^{(n-1)}x= b^{(n-1)}
   A
   b
   pause
  x(n)= b(n)/A(n,n);

   for k=n-1:-1:1
      x(k)= b(k);
      for j=k+1:n
         x(k)= x(k)- A(k,j)*x(j);
      end
      x(k)= x(k)/A(k,k);
   end

end
```

Q2c Resolvendo o sistema $A_4x = b$ com eliminação de Gauss com ou sem pivotamento obtemos com arredondamento final $x = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$. Se plotamos todos os dígitos obtidos do código sem arredondar:

sem pivotamento obtemos $x = \begin{bmatrix}0.999999999999998\\1.000000000000003\\0.999999999999999\\1.000000000000000\end{bmatrix}$

com pivotamento obtemos $x = \begin{bmatrix}1.000000000000004\\0.999999999999995\\1.000000000000002\\1.000000000000000\end{bmatrix}$

Q2d Computando o erro relativo usando a norma 2 com o valor não arredondando obtemos erro nulo! Mas se computamos o erro relativo usando a norma 2

$$err = \frac{\|\bar{x} - x\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(1 - x_i)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4} x_i^2}}$$

obtemos

sem pivotamento obtemos $err = 1.9109 \cdot 10^{-15}$

com pivotamento obtemos $err = 2.9899 \cdot 10^{-15}$

Q2e

$$A_1 0 = \begin{bmatrix} 2^{1/10} & 2^{1/9} & \dots & 2^{1/2} & 2 \\ 2^{1/9} & 2^{1/8} & \dots & 2 & 2^2 \\ \dots & & & & \\ 2^{1/2} & 2 & \dots & 2^8 & 2^9 \\ 2 & 2^2 & \dots & 2^9 & 2^{10} \end{bmatrix}$$

Com 5 dígitos significativos obtemos $b = A_{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} 12.481 \\ 15.409 \\ 22.329 \\ 37.239 \\ 68.135 \\ 131.01 \\ 257.86 \\ 512.67 \\ 1023.4 \\ 2046 \end{bmatrix}$

A solução do sistema $A_{10}x = b$ é com 5 digitos $x = [1, \dots, 1]^t$. Mas se considerássemos mais dígitos

sem pivotamento obtemos $x = \begin{bmatrix} 1.000000000010021 \\ 0.999999999981370 \\ 1.000000000011719 \\ 0.999999999996180 \\ 1.000000000000951 \\ 0.999999999999757 \\ 1.000000000000032 \\ 0.999999999999987 \\ 1.000000000000007 \\ 1.000000000000001 \end{bmatrix}$

com pivotamento $x = \begin{bmatrix} 1.000000000000284 \\ 0.999999999999714 \\ 1.000000000000197 \\ 0.999999999999921 \\ 1.000000000000211 \\ 0.999999999999432 \\ 1.000000000000463 \\ 0.999999999999619 \\ 1.000000000000202 \\ 0.999999999999966 \end{bmatrix}$

Se computamos o erro relativo usando a norma 2

$$err = \frac{\|\bar{x} - x\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{10} (1 - x_i)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}}$$

sem pivotamento $err = 7.7485 \cdot 10^{-12}$

com pivotamento $err = 3.1239 \cdot 10^{-13}$

Ao aumentar da dimensão n aparece mais claro que o método de eliminação de Gauss sem pivotamento é instável. Isso acontece porque temos em A_n com n grande mais diferença no tamanho dos seus elementos, e este leva erros de arredondamento elevados na estrategia sem pivotamento devido ao facto que neste caso o multiplicador será muito grande que vai transformar apos os arredondamento as matrizes dos passos seguintes não mais equivalentes a aquela original. Note que isso aconteceu se bem considerei 19 dígitos significativos.

(3) Considere o sistema geral $A_4 x = b$, com b qualquer e A_4 a matriz de Hankel de ordem 4.

Q3a Verifique se pode resolver com Jacobi e com Gauss-Seidel o sistema da questão anterior $A_4 x = b$. Motive a sua resposta.

Q3b Escreva um código para resolver o sistema $Ax = b$ onde vai dar a possibilidade ao usuário de inserir o vetor b e matriz A de ordem 4.

Q3c Sabendo que os coeficientes de uma matriz $\tilde{A}_4$ de ordem 4 pode ter somente coeficientes que são potencias de 2, ou seja $a_{ij} = 2^k$ com k que varia (ou não) dependendo de i e j. Consegue construir uma matriz $\tilde{A}_4$ para que Gauss-Seidel possa convergir?

Q3d Se sim, implemente o código de Gauss-Seidel e resolva o sistema $\tilde{A}_4 x = [1, \ldots, 1]^t$ achando uma aproximação $x^{(k)}$ tal que o seu resíduo $r^{(k)}$ seja menor de $\varepsilon = 0.01$ em norma infinito (norma do máximo).

Resolução (3):

Q3a A matriz

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2^{1/4} & 2^{1/3} & 2^{1/2} & 2 \\ 2^{1/3} & 2^{1/2} & 2 & 2^2 \\ 2^{1/2} & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \end{bmatrix}$$

é simétrica e não satisfaz os critérios das linhas (fraco e forte) porque existem linhas onde

$$|a_{kk}| < \sum_{j=1, j \neq k}^{4} |a_{kj}|$$

por exemplo na primeira linha

$$2^{1/4} < 2^{1/3} + 2^{1/2} + 2.$$

Sendo que a matriz é simétrica nem será satisfeito os critérios das colunas (fraco e forte), existem colunas k tais que

$$|a_{kk}| < \sum_{i=1, i\neq k}^{4} |a_{ik}|$$

. Não se consegue trocando as linhas de obter uma matriz que satisfaz o critérios das linhas, e nem trocando as colunas obtemos que é satisfeito algum critério das colunas. Portanto não podemos saber se Jacobi converge. Para verificar se Gauss-Seidel convergir analisamos o critério de Sassenfeld:

Sejam $\beta_1 = \sum_{j=2}^{n} \frac{|a_{1j}|}{|a_{11}|}$, $\beta_i = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|\beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|}$, $i = 2, \ldots, n$ então temos de verificar se $|\beta_i| < 1$, para cada $i = 1, \ldots, n$.
Notamos logo que $\beta_1 = \frac{2^{1/3}+2^{1/2}+2}{2^{1/4}} > 1$ portanto o critério de Sassenfeld não é satisfeito.
Portanto não podemos saber nem se Gauss-Seidel convergir.

Q3b Sendo que no item sucessivo usaremos Gauss-Seidel apresentamos aqui o código em Matlab de Gauss-Seidel

```
disp('Insira a matriz de dimensão 4')
A(1,:)=input(['Insira os elementos  da primeira linha na forma ',...
              '[a11 a12 a13 a14] separados de um espaço',...
       'no fim digite return','\n'])

A(2,:)=input(['Insira os elementos  da segunda linha na forma ',...
              '[a21 a22 a23 a24] separados de um espaço',...
              'no fim digite return','\n'])

A(3,:)=input(['Insira os elementos  da terceira linha na forma ',...
              '[a31 a32 a33 a34] separados de um espaço',...
              'no fim digite return','\n'])

A(4,:)=input(['Insira os elementos  da quarta linha na forma ',...
              '[a41 a42 a43 a44] separados de um espaço',...
              'no fim digite return','\n'])

b= input(['Insira os elementos  da vetor b na forma ',...
          '[b1 b2 b3 b4] separados de um espaço',...
       'no fim digite return','\n'])

x0= input(['Insira os elementos  do vetor x^{(0)} na forma ',...
```

```
        '[x1 x2 x3 x4] separados de um espaço',...
      'no fim digite return','\n'])



eps= input(['Insira a tolerância eps entre duas iterações sucessivas ',...
       'que é usada como paragem do método junta a outra condição ',...
       'se ||b-Ax^{(k)}||_{inf}<eps','\n'])


gausseidel(A,b',x0',eps)

function x=gausseidel(A,b,x0,eps)

  x=x0;
  k=0;
  n=length(b);
  resk=eps;

  while resk>=eps

     y=x
     k=k+1;

     for i=1:n
       x(i)=b(i);
       for j=1:i-1
        x(i)= x(i)- A(i,j)*x(j);
       end

       for j=i+1:n
         x(i)= x(i) - A(i,j)*x(j);
       end
       x(i)=x(i)/A(i,i);
     end
     resk=max(abs(b-A*x));
     y=x;
  end

end
```

Q3c Se considero a matriz

$$\tilde{A}_4 = \begin{bmatrix} 2^4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2^4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2^4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2^4 \end{bmatrix}$$

temos que é satisfeito o critério das linhas forte porque $2^4 = 16 > 2 + 2 + 2 = 6$. Então podemos aplicar Gauss-Seidel, porque ele vai convergir independentemente da iteração inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^4$

Q3d Usando o código do item Q3b com $\epsilon = 0.01$; $x_0 = [0, 0, 0, 0]^t$ obtemos que depois 3 iterações de Gauss-Seidel o vetor

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.045349840074778 \\ 0.045397195499390 \\ 0.045471801480744 \\ 0.045472645368136 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 4.5350 \cdot 10^{-2} \\ 4.5397 \cdot 10^{-2} \\ 4.5472 \cdot 10^{-2} \\ 4.5473 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}$$

que tem resíduo

$$r^{(3)} = \|b - Ax^{(3)}\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,4} |1 - \sum_{j=1}^{4} \tilde{a}_{ij} x_j^{(3)}| = 0.001719274107018 < 0.01$$