Método de eliminação de Gauss e Pivoteamento

MS211 – Cálculo Numérico

Giuseppe Romanazzi

15 Outubro 2020

Conteúdo

1. Método de Eliminação de Gauss
   - Algoritmos
   - Custo Computacional
   - Exemplo
2. Método de eliminação de Gauss com pivotamento

Passo geral k do método de eliminação de Gauss

Depois $k-1$ passos

$$A^{(k-1)}x = b^{(k-1)}$$

onde $A^{(k-1)}$ tem elementos nulos por baixo da diagonal nas primeiras $k-1$ colunas, e para transforma-lo num sistema com elementos nulos também na coluna k por baixo da diagonal, **no passo** k temos de:
subtrair às linhas $i = k+1, \ldots, n$ a linha k de $A^{(k-1)}$ multiplicada por $m_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$ respectivamente e assim obteremos o sistema equivalente

$$A^{(k)}x = b^{(k)} \qquad \text{(sk)}$$

com ...

Passo geral k do método

$$
(A^{(k)}|b^{(k)}) = \left(\begin{array}{cccccc|c}
a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\
0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \vdots & a_{k+1\ k+1}^{(k)} & \cdots & a_{k+1 n}^{(k)} & b_{k+1}^{(k)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \vdots & a_{n\ k+1}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)}
\end{array} \right)
$$

Note que temos anulado k colunas por baixo da diagonal depois k passos.

Passo geral k do método

Os coeficientes da matriz $A^{(k)}$ e do vetor independentes $b^{(k)}$ são, por $j = 1, \ldots, n$

$$
\begin{array}{lll}
a_{\ell j}^{(k)} = a_{\ell j}^{(k-1)}, & b_{\ell}^{(k)} = b_{\ell}^{(k-1)} & \ell = 1, \ldots, k \\[2ex]
a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik} a_{kj}^{(k-1)}, & b_{i}^{(k)} = b_{i}^{(k-1)} - m_{ik} b_{k}^{(k-1)} & i = k+1, \ldots, n.
\end{array}
\tag{1}
$$

onde $m_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$.

Passo final $n-1$ do método

Sendo que em cada passo eliminamos os elementos de uma coluna, para eliminar todos aqueles por baixo da diagonal precisamos fazer $n-1$ passos com operações do tipo (1) (veja slide anterior). Assim **depois $n-1$ passos obtemos um sistema triangular superior equivalente ao sistema inicial** $Ax = b$ que é

$$A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}$$

com

$$(A^{(n-1)}|b^{(n-1)}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k-1)} & \cdots & a_{kn}^{(k-1)} & b_k^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right)$$

Algoritmo do método de eliminação de Gauss

Require: $n,\ A = (a_{ij}),\ b = (b_i)$
  for $k = 1, \ldots, n-1$ **do**
    for $i = k+1, \ldots, n$ **do**
      $m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}};$ ▷ 1 divisão
      $b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - m_{ik} b_k^{(k-1)};$ ▷ 1 soma e 1 produto
      for $j = k+1, \ldots, n$ **do**
        $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik} a_{kj}^{(k-1)}$ ▷ 1 soma e 1 produto
      end for
    end for
  end for

Algoritmo do método de eliminação de Gauss

- Note que no algoritmo, o ciclo **for** automaticamente incrementa o relativo índex.
- Na atualização da $a_{ij}^{(k)}$ desconsideremos as primeira k colunas sendo que sabemos, das contas descritas anteriormente, que são nulas. Este fato permite nos de um lado de poupar operações e de outro de não ter erros de cancelamento subtrativo no código associado.
  Em geral, cada vez que já se conhece um valor teórico de um qualquer método é bom evitar ao algoritmo de fazer as operações necessarias para obter este valor.

Algoritmo otimizado no uso da memoria

Require: n, $A = (a_{ij})$, $b = (b_i)$
  for $k = 1, \ldots, n-1$ **do**
    for $i = k+1, \ldots, n$ **do**
      $m = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$;
      $a_{ik} \leftarrow m$; ▷ Poderiámos por $a_{ik} = 0$ mas é preferível $a_{ik} \leftarrow m$ para gravar todos os m_{ik} que vão ser uteis para determinar a fatoração LU de A
      $b_i = b_i - mb_k$;
      for $j = k+1, \ldots, n$ **do**
        $a_{ij} = a_{ij} - m \cdot a_{kj}$
      end for
    end for
  end for

Este algoritmo permite de gravar todos os passos na mesma estrutura $(A|b)$ sem necessidade de ocupar nova memoria respeito aquela disponível no input. Este pode ser feito sempre que não precisarmos de reutilizar sucessivamente os dados de input A e b.

Custo Computacional do método de eliminação de Gauss

Note que em cada um dos $n-1$ macro-passos k:

- temos $(n-k)$ iterações no ciclo **for** $i = k+1, \ldots, n$;
- em cada uma destes iterações temos $(n-k)$ iterações no ciclo **for** $j = k+1, \ldots, n$.
- Neste ciclo em j temos em cada iteração duas operações, assim em total no ciclo **for** $j = k+1, \ldots, n$ temos $2(n-k)$ operações.
- No ciclo **for** $i = k+1, \ldots, n$ temos em cada iteração, além destes $2(n-k)$, também 3 outras operações (1 divisão, 1 produto e 1 soma), assim podemos dizer de ter totalmente $2(n-k+1)+1$ operações em cada iteração i do ciclo **for** $i = k+1, \ldots, n$.

Podemos concluir que o numero total das operações é

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} [2(n-k+1)+1]$$

Custo Computacional do método de eliminação de Gauss

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=k+1}^{n}[2(n-k+1)+1] = \sum_{k=1}^{n-1}[\sum_{i=k+1}^{n} 1 + 2\sum_{i=k+1}^{n}(n-k+1)] =$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}[(n-k)+2\sum_{i=k+1}^{n}(n-k+1)] = \sum_{k=1}^{n-1}[(n-k)+2(n-k+1)(n-k)] =$$

$$\sum_{\ell=1}^{n-1}\ell + 2\sum_{\ell=1}^{n-1}(\ell+1)\ell, \text{ onde } \ell = n-k.$$

Usando a regra de Gauss $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n-1}\ell = \frac{n(n-1)}{2}, \sum_{\ell=1}^{n-1}\ell^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

O custo computacional do método é

$$\sum_{\ell=1}^{n-1}\ell + 2\sum_{\ell=1}^{n-1}(\ell+1)\ell = \sum_{\ell=1}^{n-1}\ell + 2\sum_{\ell=1}^{n-1}\ell^2 + 2\sum_{\ell=1}^{n-1}\ell =$$

$$3\frac{n(n-1)}{2} + 2\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{2}{3}n^3 + \frac{n^2}{2} - \frac{7}{6}n.$$

Eliminação de Gauss tem custo computacional da ordem $O(n^3)$.

Exemplo de aplicação do método

Desejamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 & = & -4 \\ -5x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 & = & \frac{5}{2} \end{cases}$$

Primeiro verificamos se o sistema admite solução única. Sendo que $\det(A) = 2 - 10 + 3 + 10 + 6 + 1 = 12 \neq 0$ então o sistema é consistente e admite uma única solução. Observamos que o sistema tem a matriz A e b de dimensão $n = 3$ portanto são esperados somente $n - 1 = 2$ passos da eliminação de Gauss.
A matriz A e o termo b serão indicado com $A^{(0)}$ e $b^{(0)}$ respetivamente

$$(A^{(0)}|b^{(0)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ -5 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

Exemplo de aplicação do método, Primeiro passo $k = 1$

Usando $(A^{(0)}|b^{(0)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ -5 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right)$ geramos os m_{i1} com $i = 2, 3$ para poder anular os termos a_{i1}, sendo que $a_{11} \neq 0$ não precisamos trocar alguma linha. Obtemos $m_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \frac{1}{2}$, $\quad m_{31} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = -\frac{5}{2}$.

Usamos m_{21} para gerar a linha 2 de $A^{(1)}$ e $b^{(1)}$:

$$a_{22}^{(1)} = a_{22}^{(0)} - m_{21}a_{12}^{(0)} = 1 - \tfrac{1}{2}(-1) = \tfrac{3}{2}; \qquad a_{23}^{(1)} = a_{23}^{(0)} - m_{21}a_{13}^{(0)} = -2 - \tfrac{1}{2}(2) = -3$$
$$b_2^{(1)} = b_2^{(0)} - m_{21}b_1^{(0)} = -4 - \tfrac{1}{2}(1) = -\tfrac{9}{2}.$$

Usamos m_{31} para gerar a linha 3 de $A^{(1)}$ e $b^{(1)}$:

$$a_{32}^{(1)} = a_{32}^{(0)} - m_{31}a_{12}^{(0)} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{5}{2}(-1) = -1; \quad a_{33}^{(1)} = a_{33}^{(0)} - m_{31}a_{13}^{(0)} = 1 + \tfrac{5}{2}(2) = 6;$$
$$b_3^{(1)} = b_3^{(0)} - m_{31}b_1^{(0)} = \tfrac{5}{2} + \tfrac{5}{2}(1) = 5.$$

Exemplo de aplicação do método, Segundo passo $k = 2$

Do primeiro passo obtemos então o sistema

$$(A^{(1)}|b^{(1)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -3 & -\frac{9}{2} \\ 0 & -1 & 6 & 5 \end{array}\right).$$

Agora usando a $m_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = -\frac{2}{3}$ no segundo passo anularemos os elementos (só a_{32}) por baixo da segunda coluna:

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - m_{32}a_{23}^{(1)} = 6 + \tfrac{2}{3}(-3) = 4; \quad b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - m_{32}b_2^{(1)} = 5 + \tfrac{2}{3}(-\tfrac{9}{2}) = 2.$$

O sistema final triangular superior será $A^{(2)}x = b^{(2)}$, com

$$(A^{(2)}|b^{(2)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -3 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right).$$

Exemplo, resolução do sistema triangular superior final

O sistema final $A^{(2)}x = b^{(2)}$ resulta ser portanto

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ \tfrac{3}{2}x_2 - 3x_3 &= -\tfrac{9}{2} \\ 4x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Se resolvemos este sistema usando o método descrito na aula anterior teremos começando da última equação

$$\begin{aligned} &4x_3 = 2 \longrightarrow x_3 = \tfrac{1}{2} \\ &\tfrac{3}{2}x_2 - 3x_3 = -\tfrac{9}{2} \longrightarrow x_2 = \frac{-\frac{9}{2}+3x_3}{\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{9}{2}+\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = -2 \\ &2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \longrightarrow x_1 = \frac{1+x_2-2x_3}{2} = -1 \end{aligned}$$

A solução é portanto $(x_1, x_2, x_3) = (-1, -2, \dfrac{1}{2})$.
Com uma simples verifica podemos também confirmar que esta é a solução do sistema dado $Ax = b$.

Instabilidade no método de eliminação de Gauss

O método de eliminação de Gauss, resulta ser instável quando pelo menos um dos coeficientes $a_{kk}^{(k-1)}$ é próximo de zero.

Isso acontece porque o calculo dos multiplicadores $m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$ pode levar a um grande erro de arredondamento no calculo dos coeficientes da matriz $A^{(k)}$.

Quando $y = a_{kk}^{(k-1)}$ é próximo de zero, o multiplicador m_{ik} usado para transformar a matriz $A^{(k-1)}$ na matriz $A^{(k)}$ pode ser demais grande respeito os outros valores da matriz, e isso pode levar a um sistema $A^{(k)}x = b^{(k)}$ que não é equivalente ao sistema inicial.

Instabilidade no método de eliminação de Gauss

Em particular o produto $m_{ik}a_{kj}^{(k-1)}$ pode resultar demais grande respeito o $a_{ij}^{(k-1)}$, levando a ter na aritmetica finita considerada $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik}a_{kj}^{(k-1)} \approx -m_{ik}a_{kj}^{(k-1)}$. Analogamente $b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - m_{ik}b_k^{(k-1)} \approx -m_{ik}b^{(k-1)}$
É como se estivessemos resolvendo um sistema com $a_{ij}^{(k-1)} = 0$ e $b_i^{(k-1)} = 0$, ou seja um sistema singular porque é como se a linha i de $A^{(k)}$, e $b^{(k)}$ for nula...
O método neste caso falhará no encontrar a solução de $Ax = b$.

Elementos pivot

Definição

Chamamos elemento de pivot, ou simplesmente pivot, do método de eliminação de Gauss, o coeficiente $a_{kk}^{(k-1)}$ *usado no passo* k *para computar os multiplicadores*

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \text{ com } i = k+1, \ldots, n,$$

Lembre que a operação que usa os m_{ik} é

$$[\text{eq. i do sistema } A^{(k)}x = b^{(k)}] \; = \\ [\text{equação i de } A^{(k-1)}x = b^{(k-1)}] - m_{ik} * [\text{equação k de } A^{(k-1)}x = b^{(k-1)}]$$

Método de eliminação de Gauss com pivotamento

Neste método com pivot no passo k, dado o sistema com

$$A^{(k-1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & a_{k\,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{kn}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & a_{n\,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{nn}^{(k-1)} \end{pmatrix}; \quad b^{(k-1)} = \begin{pmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_k^{(k-1)} \\ \vdots \\ b_n^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

1. **Determina** o valor máximo em valor absoluto na coluna k e nas linhas $i = k, \dots, n$ ou seja determine o indez $\tilde{i}$ tal que $|a_{\tilde{i}k}^{(k-1)}| = \max_{i=k,\dots,n} |a_{ik}^{(k-1)}|$
2. **Troca** a equação $\tilde{i}$ do sistema $A^{(k-1)}x = b^{(k-1)}$ com a equação k do mesmo sistema.
3. Aplica o passo k do método classico de eliminação

Exemplo

$$(A^{(0)}|b^{(0)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ -5 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

Notamos que $|a_{31}| = 5 > \{|a_{11}|, |a_{21}|\}$.

Portanto o método com pivotamento precisa trocar a linha 3 com a linha 1, a nova estrutura do sistema é

$$(A^{(0)}|b^{(0)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Depois podemos aplicar o passo 1:

computamos $m_{21} = -\frac{1}{5}$, $m_{31} = -\frac{2}{5}$,

aplicamos o passo 1 nas linhas 2 e 3

$(0 \; a_{22}^{(1)} \; a_{23}^{(1)} \; b_2^{(1)}) = (1 \;\; 1 \; -2 \; -4) - m_{21}(-5 \;\; \frac{3}{2} \;\; 1 \;\; \frac{5}{2}) = \ldots$

$(0 \; a_{32}^{(1)} \; a_{33}^{(1)} \; b_3^{(1)}) = (2 \; -1 \;\; 2 \;\; 1) - m_{31}(-5 \;\; \frac{3}{2} \;\; 1 \;\; \frac{5}{2}) = \ldots$

A troca pode ser necessária também nos outros passos, se for $|a_{32}^{(1)}| > |a_{22}^{(1)}|$

Vantagens do pivotamento

- Obtemos que os m_{ik} em cada passo k são limitados, em particular teremos que $|m_{ik}| = \left|\dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\right| \leq 1$. Porque após a troca $|a_{kk}^{(k-1)}|$ será maior dos $|a_{ik}^{(k-1)}|$, com $i = k+1, \dots, n$.

- O pivotamento permite de diminuir a possibilidade de dividir por numero pequenos e assim teremos um método mais estável do método clássico de eliminação de Gauss.

Redução do erro numérico em output

No exemplo a seguir mostramos como o método de eliminação com pivotamento pode efetivamente reduzir
o erro em output respeito ao que acontece sem pivotamento, quando trabalharmos em aritmética finita.

Este acontece por exemplo quando temos algum valor próximo de zero na coluna k e os outros valores na mesma coluna bastante grandes, ou seja se tem dimensão diferente de valores nas colunas das matrizes $A^{(k)}$.

Exemplo

Deseja-se resolver o seguinte sistema na aritmética finita $FP(10, 3, -9, 9, A)$ (com arredondamento com três dígitos significativos, ver aula 2-3)

$$\begin{cases} 0.0002x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

$$(A^{(0)}|b^{(0)}) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.2 \cdot 10^{-3} & 0.2 \cdot 10^{1} & 0.5 \cdot 10 \\ 0.2 \cdot 10 & 0.2 \cdot 10 & 0.6 \cdot 10 \end{array} \right)$$ O pivot é $a_{21} = 0.2 \cdot 10$ porque $|a_{21}| > |a_{11}|$.

Mas atuamos como se não conhecemos a estrategia do pivotamento. Portanto usaremos o multiplicador $m_{21} = \frac{0.2 \cdot 10}{0.2 \cdot 10^{-3}} = 10^4$ que é grande respeito aos coeficientes do sistema!

Assim

$a_{22}^{(1)} = a_{22}^{(0)} - m_{21} a_{12}^{(0)} = 0.2 \cdot 10 - 0.2 \cdot 10^5 = -0.19998 \cdot 10^5 \approx -0.2 \cdot 10^5$

na aritmética finita com três dígitos.

$b_2^{(1)} = b_2^{(0)} - m_{21} b_1^{(0)} = 0.6 \cdot 10 - 0.5 \cdot 10^5 = -0.49994 \cdot 10^5 \approx -0.5 \cdot 10^5$.

Exemplo

Portanto obtemos

$$(A^{(1)}|b^{(1)}) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.2\cdot 10^{-3} & 0.2\cdot 10^{1} & 0.5\cdot 10 \\ & -0.2\cdot 10^{5} & -0.5\cdot 10^{5} \end{array} \right).$$

Resolvendo este sistema triangular superior $A^{(1)}x = b^{(1)}$ obtemos

$$x_2 = \frac{-0.5\cdot 10^5}{-0.2\cdot 10^5} = \frac{5}{2} = 2.5 = 0.25\cdot 10;$$

$$x_1 = \frac{0.5\cdot 10 - 0.2\cdot 10 x_2}{0.2\cdot 10^{-3}} = \frac{0.5\cdot 10 - 0.5\cdot 10}{0.2\cdot 10^{-3}} = 0.$$

Ou seja chegamos a solução $x = (x_1, x_2) = (0, 2.5)$.

Mas esta não é solução do sistema de partida! E' suficiente constatar que estes x_1, x_2 não satisfazem o sistema inicial. Note que a segunda equação computada com as recém obtidas x_1, x_2 é $2x_1 + 2x_2 = 2\cdot 0 + 2\cdot 2.5 = 5$ que é diferente de 6, **o método falhou!**

O que aconteceu?

- O arredondamento nos cálculos dos $a_{ij}^{(k)}$ e $b_i^{(k)}$ levou a erros (de output) relevantes no calculo dos x_i. O método de eliminação de Gauss resulta ser instável.
- Poderemos esperar isso porque o termo m_{ik} ficou demais grandes respeitos os coeficientes do sistema
- Este poderia ser evitado usando o pivotamento, ou seja através uma simples troca, ver slide seguinte

Mesmo exemplo mas com pivotamento

Queremos resolver em $FP(10, 3, -9, 9, A)$ o sistema

$$\begin{cases} 0.0002x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

Sendo que $|a_{21}| > |a_{11}|$ trocamos a linha 1 com a linha 2, obtemos
$(A^{(0)}|b^{(0)}) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.2 \cdot 10 & 0.2 \cdot 10 & 0.6 \cdot 10 \\ 0.2 \cdot 10^{-3} & 0.2 \cdot 10^{1} & 0.5 \cdot 10 \end{array} \right)$
Agora temos: $m_{21} = \dfrac{0.2 \cdot 10^{-3}}{0.2 \cdot 10^{1}} = 10^{-4} = 0.1 \cdot 10^{-3}$ que é pequeno,
Assim $a_{22}^{(1)} = a_{22}^{(0)} - m_{21} a_{12}^{(0)} = 0.2 \cdot 10^{1} - 0.1 \cdot 10^{-3} * 0.2 \cdot 10 =$
$0.2 \cdot 10^{1} - 0.2 \cdot 10^{-3} = 0.19998 \cdot 10^{1} \approx 0.2 \cdot 10^{1}$;
$b_2^{(1)} = b_2^{(0)} - m_{21} b_1^{(0)} = 0.5 \cdot 10 - 0.6 \cdot 10^{-3} = 0.49994 \cdot 10 \approx 0.5 \cdot 10.$
Note que foi preciso um arredondamento em $a_{22}^{(1)}$, e $b_2^{(1)}$ também neste caso mas com um erro da ordem de 10^{-3} em vez antes sem pivotamento tivemos um erro da ordem de 10, este significa que estamos num caminho melhor respeito antes para não ter erros significativos nos cálculos finais.

$$(A^{(1)}|b^{(1)}) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.2\cdot 10 & 0.2\cdot 10 & 0.6\cdot 10 \\ & 0.2\cdot 10^1 & 0.5\cdot 10^1 \end{array}\right).$$

Assim obtemos resolvendo este sistema triangular superior,

$$x_2 = \frac{0.5\cdot 10}{0.2\cdot 10} = 2.5$$

$$x_1 = \frac{0.6\cdot 10 - 0.2\cdot 10x_2}{0.2\cdot 10} = \frac{0.6\cdot 10 - 0.5\cdot 10}{0.2\cdot 10} = \frac{0.1}{0.2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Agora verificamos se estes $(x_1, x_2) = (2.5, 0.5)$ satisfazem as equações do sistema:

$0.2\cdot 10^1 x_1 + 0.2\cdot 10^1 x_2 = 0.1\cdot 10 + 0.5\cdot 10 = 0.6\cdot 10 = 6$

é ok!

$0.2\cdot 10^{-3}x_1 + 0.2\cdot 10^1 x_2 = 0.1\cdot 10^{-3} + 0.5\cdot 10^1 = 0.50001\cdot 10 \approx 0.5\cdot 10 = 5$

é ok!