Sistemas Triangulares e Método de eliminação de Gauss

MS211 – Cálculo Numérico

Giuseppe Romanazzi

13 Outubro 2020

Conteúdo

Sistemas Triangulares

Seja $Ax = b$ um sistema linear de dimensão n
(ou seja com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$)

Definição

$Ax = b$ diz-se:

sistema triangular superior $\iff a_{ij} = 0, \ \forall i, j = 1, \ldots, n$ *com* $i > j$

sistema triangular inferior $\iff a_{ij} = 0, \ \forall i, j = 1, \ldots, n$ *com* $i < j$

As associadas matrizes se dizem respectivamente triangular superior ou triangular inferior.

Propriedades dos sistemas triangulares

- A transposta de uma matriz triangular superior é inferior, e vale também o vice-versa, a transposta de uma matriz triangular inferior é superior.
- As matrizes diagonais, ou seja tais que $a_{ij} = 0$ por cada $i \neq j$, são triangulares inferiores e superiores ao mesmo tempo.
- O determinante de matrizes triangulares é igual ao produto dos elementos diagonais

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} := a_{11} * a_{22} * \cdots * a_{nn}$$

Exemplos

- $\begin{cases} x & +2y & +z = 2 \\ & y & -z = 1 \\ & & z = -2 \end{cases}$ é um sistema triangular superior
- $\begin{cases} x = 2 \\ 2x - y = 1 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$ é um sistema triangular inferior
- $\begin{cases} x + z = 2 \\ y + 4z = 1 \\ -3z = 2 \end{cases}$ tem $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ é portanto triangular superior
- $\begin{cases} x = 2 \\ x + 4y = 1 \\ -y = 2 \end{cases}$ é triangular inferior, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Método direto para sistema triangulares superiores

Resolução do sistema com matriz triangular superior não singular

$$\left\{\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 + & \cdots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 + & \cdots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{n-1n-1}x_{n-1} & + a_{n-1n}x_n & = b_{n-1} \\ & & & & a_{nn}x_n & = b_n \end{array}\right.$$

Para poder resolver este sistema A é não singular, e então

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0.$$

Portanto temos que por cada i, $a_{ii} \neq 0$.

Método direto para sistema triangulares superiores

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 + & \cdots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 + & \cdots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{n-1n-1}x_{n-1} & + a_{n-1n}x_n & = b_{n-1} \\ & & & & a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

Começa obtendo x_n da última equação e depois x_{n-1} da penúltima, até chegar a obter x_1 :

Passo 1: $a_{nn}x_n = b_n \longrightarrow x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$, sabemos que $a_{nn} \neq 0$;

Passo 2: Usamos a equação $n-1$ do sistema, e x_n do passo 1 para obter $x_{n-1} = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1n} \cdot x_n}{a_{n-1n-1}}$;

Passo k: Usamos a equação $n-k+1$ e obtemos

$$x_{n-k+1} = \frac{b_{n-k+1} - \displaystyle\sum_{j=n-k+2}^{n} a_{n-k+1,j} \cdot x_j}{a_{n-k+1,n-k+1}}$$

Passo $n-1$: Usando a primeira equação: $x_1 = \dfrac{b_1 - \displaystyle\sum_{j=2}^{n} a_{1j} \cdot x_j}{a_{11}}$

Algoritmo

Require: n, $A = (a_{ij})$, $b = (b_i)$

$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$ ▷ 1 divisão

$k = n$

for $k > 1$ **do** ▷ Ciclo termina quando $k = 1$, tem $n - 1$ iterações

  $k \leftarrow k - 1$ ▷ atualização do indez é desconsiderada na conta das operações

  $soma = b_k$

  $j = k$

  for $j < n$ **do** ▷ Ciclo termina quando $j = n$, tem $n - k$ iterações

    $j \leftarrow j + 1$

    $soma = soma - a_{kj} x_j$ ▷ uma soma(subtração) e uma multiplicação

  end for

  $x_k = \frac{soma}{a_{kk}}$ ▷ $x_k = \dfrac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j}{a_{kk}}$ ▷ uma divisão

end for

Número de operações do algoritmo

Número de operações (flop) :

n divisões

$$1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)=\sum_{j=1}^{n-1} j=\frac{n(n-1)}{2} \text{ adições}$$

$$1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)=\sum_{j=1}^{n-1} j=\frac{n(n-1)}{2} \text{ multiplicações}$$

Numero total de operações: $n(n-1)+n=n^2$ operações.
Custo computacional é da ordem $O(n^2)$.

Usamos a regra de Gauss $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Qual é o método e o algoritmo no caso de resolver um sistema triangular inferior? E o seu custo computacional?

Sistemas equivalentes

Definição

Um sistema $Ax = b$ diz se equivalente ao sistema $By = c$ se os dois sistemas admitem a mesma solução.

Exemplo:
Os sistemas $Ax = b$, $-Ax = -b$, $0.3Ax = 0.3b$
são sistemas equivalentes.

Transformações em sistemas equivalentes

Existem principalmente três processos que transformam um sistema linear consistente num sistema equivalente.

1) Troca das equações do sistema. Por exemplo:

$$\begin{cases} 5x - 4y = -6 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases} \tag{1}$$

e $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 5x - 4y = -6 \end{cases}$ tem a mesma solução $(x, y) = (2, 4)$

2) Multiplicação de uma equação por uma constante.
Por exemplo
$\begin{cases} 2.5x - 2y = -3 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases}$ tem a mesma solução do problema (1),
porque a sua primeira equação é obtida multiplicando por 0.5 a primeira equação de (1).

Transformações em sistemas equivalentes

3) Adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação do sistema.

$\begin{cases} 5x - 4y = -6 \\ -7x + 6y = 10 \end{cases}$ tem a mesma solução do sistema (1).

Notamos que a sua segunda equação é obtida do sistema (1) somando a segunda equação com a primeira equação multiplicada por -2, ou seja:

$$\text{segunda eq. do novo sistema} = \\ [\text{segunda eq. do sistema (1)}] - 2 * [\text{primeira eq. do sistema (1)}]$$

Transformação num sistema triangular superior

O objetivo do método de Eliminação de Gauss é de transformar o sistema de partida $Ax = b$, com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não singular, num sistema triangular superior equivalente do tipo $Ux = c$, para poder achar depois facilmente a solução de $Ax = b$ resolvendo somente o sistema $Ux = c$.
Este sistema será obtido usando uma sequencia de transformações do tipo 1, 2, 3 vistas nas duas slides anteriores.

A ideia base é de transformar o sistema anulando em cada passo os elementos de uma coluna por baixo da diagonal até chegar a um sistema equivalente triangular superior.

Primeiro passo do método de eliminação de Gauss

Dado o sistema $Ax = b$ de dimensão n, denotado com

$$A^{(0)}x = b^{(0)} \tag{s0}$$

vamos construir um sistema equivalente $A^{(1)}x = b^{(1)}$ que tem a matriz dos coeficientes $A^{(1)}$ com elementos nulos na primeira coluna por baixo da diagonal ou seja $a_{i1}^{(1)} = 0, pori = 2, \ldots, n.$
O novo sistema equivalente $A^{(1)}x = b^{(1)}$ é obtido subtraindo as equações $i = 2, \ldots, n$, a primeira equação de $A^{(0)}x = b^{(0)}$ multiplicada por $m_{i1} := \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$, ou seja ,

por cada $i = 2, \ldots, n$:

$$\text{eq. i do novo sistema} =$$
$$[\text{eq. i do sistema (s0)}] - m_{i1} * [\text{primeira eq. do sistema (s0)}]$$

A primeira equação de (s0) não é modificada.

Primeiro passo do método de eliminação de Gauss

Este primeiro passo permite de construir a partir da estrutura algébrica $(A^{(0)}|b^{(0)})$ a estrutura $(A^{(1)}|b^{(1)})$ do novo sistema, onde os elementos da matriz $A^{(1)}$ e do vetor $b^{(1)}$ são

$$
\begin{array}{lll}
a_{1j}^{(1)} = a_{1j}^{(0)}, & b_1^{(1)} = b_1^{(0)} & j = 1, \ldots, n; \\
a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - m_{i1} a_{1j}^{(0)}, & b_i^{(1)} = b_i^{(0)} - m_{i1} b_1^{(0)} & i = 2, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

onde $m_{i1} = \dfrac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$. Note que das equações em cima

- $a_{i1}^{(1)} = a_{i1}^{(0)} - \dfrac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{11}^{(0)} = 0$ por $i = 2, \ldots, n$, portanto os elementos da primeira coluna de $A^{(1)}$por baixo da diagonal são nulos.
- Para poder definir m_{i1} estamos supondo que $a_{11}^{(0)} \neq 0$. Se este elemento for nulo será suficiente encontrar um coeficiente da primeira coluna de $A^{(0)}$ que seja não nulo, e depois temos de trocar a primeira linha com a linha de A associada a este coef. não nulo. Este valor não nulo tem de existir porque A é não singular.

Primeiro passo do método de eliminação de Gauss

O primeiro passo gera portanto o sistema

$$A^{(1)}x = b^{(1)} \tag{s1}$$

com

$$(A^{(1)}|b^{(1)}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right)$$

Segundo passo do método de eliminação de Gauss

No segundo passo obtemos o sistema $A^{(2)}x = b^{(2)}$ equivalente ao sistema (s1), que tem a matriz dos coeficientes $A^{(2)}$ com valores nulos por baixo da diagonal na segunda coluna, ou seja com $a_{i2}^{(2)} = 0$ por $i = 3, \ldots, n$.
Este sistema será obtido subtraindo as linhas $i = 3, \ldots, n$ a segunda linha multiplicada por $m_{i2} = \dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$, ou seja, por $i = 3, \ldots, n$ temos

$$\text{eq. i do novo sistema} =$$
$$[\text{eq. i do sistema (s1)}] - m_{i2} * [\text{segunda eq. do sistema (s1)}]$$

As primeira duas equações de (s1) ficam em vez invariadas.

Segundo passo do método de eliminação de Gauss

Os elementos da matriz $A^{(2)}$ e do vetor $b^{(2)}$ são

$$
\begin{array}{lll}
a_{\ell j}^{(2)} = a_{\ell j}^{(1)} & b_{\ell}^{(2)} = b_{\ell}^{(1)} & \ell = 1, 2;\ j = 1, \ldots, n; \\
a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i2} a_{2j}^{(1)}, & b_{i}^{(2)} = b_{i}^{(1)} - m_{i2} b_{2}^{(1)} & i = 3, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

onde $m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$. Note que das equações em cima

- $a_{i2}^{(2)} = a_{i2}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{22}^{(1)} = 0$ por $i = 3, \ldots, n$, portanto os elementos da segunda coluna de $A^{(2)}$ por baixo da diagonal são nulos. Claramente também $a_{i1}^{(2)} = a_{i1}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{21}^{(1)} = 0$ sendo que $a_{i1}^{(1)} = 0$ por $i = 3, \ldots, n$ e $a_{21}^{(1)} = 0$
- Estamos supondo que $a_{22}^{(1)} \neq 0$ para poder definir m_{i2}. Se este elemento for nulo será suficiente encontrar pelo menos uma linha de $A^{(1)}$ que tem o segundo elemento não nulo. Este valor tem de existir porque a matriz $A^{(1)}$ é não singular, sendo que o sistema (s1) é equivalente a (s0) que admite solução.

Segundo passo do método de eliminação de Gauss

O segundo passo gera portanto o sistema

$$A^{(2)}x = b^{(2)} \tag{s2}$$

com

$$(A^{(2)}|b^{(2)}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right)$$

Passo k geral do método

Indo em frente no método, depois $k-1$ passos obteremos o sistema

$$A^{(k-1)}x = b^{(k-1)}$$

com a matriz $A^{(k-1)}$ que terá elementos nulos por baixo da diagonal nas primeiras $k-1$ colunas, e para transformar ele num sistema com matriz $A^{(k)}$ com elementos nulos também na coluna k por baixo da diagonal,
temos **no passo** k:
subtrair às linhas $i = k+1, \ldots, n$ a linha k de $A^{(k-1)}$ multiplicada por $m_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$ e assim obteremos o sistema equivalente

$$A^{(k)}x = b^{(k)} \tag{sk}$$

com ...

Passo k geral do método

$$(A^{(k)}|b^{(k)}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & a_{k+1\ k+1}^{(k)} & \cdots & a_{k+1n}^{(k)} & b_{k+1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & a_{n\ k+1}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)} \end{array}\right)$$

Note que temos anulado k colunas por baixo da diagonal depois k passos.

Passo k geral do método, coeficientes

Os coeficientes da matriz $A^{(k)}$ e do vetor independentes $b^{(k)}$ são, por $j = 1, \ldots, n$

$$
\begin{array}{lll}
a_{\ell j}^{(k)} = a_{\ell j}^{(k-1)}, & b_{\ell}^{(k)} = b_{\ell}^{(k-1)} & \ell = 1, \ldots, k \\
a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik} a_{kj}^{(k-1)}, & b_{i}^{(k)} = b_{i}^{(k-1)} - m_{ik} b_{k}^{(k-1)} & i = k+1, \ldots, n.
\end{array}
\tag{2}
$$

onde $m_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$.

Passo final $n-1$ do método

Sendo que em cada passo eliminamos os elementos de uma coluna, para eliminar todos aqueles por baixo da diagonal precisamos fazer $n-1$ passos com operações do tipo (2) (veja slide anterior). Assim **depois $n-1$ passos obtemos um sistema triangular superior equivalente ao sistema inicial** $Ax = b$ que é

$$A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}$$

com

$$(A^{(n-1)}|b^{(n-1)}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k-1)} & \cdots & a_{kn}^{(k-1)} & b_k^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right)$$

Algoritmo do método de eliminação de Gauss

Require: $n,\ A = (a_{ij}),\ b = (b_i)$
  for $k = 1, \ldots, n-1$ **do**
    for $i = k+1, \ldots, n$ **do**
      $m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}};$ ▷ 1 divisão
      $b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - m_{ik} b_k^{(k-1)};$ ▷ 1 soma e 1 produto
      for $j = k+1, \ldots, n$ **do**
        $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik} a_{kj}^{(k-1)}$ ▷ 1 soma e 1 produto
      end for
    end for
  end for

Algoritmo do método de eliminação de Gauss

- Note que no algoritmo, o ciclo **for** automaticamente incrementa o relativo índex.
- Na atualização da $a_{ij}^{(k)}$ desconsideremos as primeira k colunas sendo que sabemos, das contas descritas anteriormente, que são nulas. Este fato permite nos de um lado de poupar operações e de outro de não ter erros de cancelamento subtrativo no código associado.
  Em geral, cada vez que já se conhece um valor teórico de um qualquer método é bom evitar ao algoritmo de fazer as operações necessarias para obter este valor.