Sistemas Lineares e resolução

MS211 – Cálculo Numérico

Giuseppe Romanazzi

8 Outubro 2020

Introdução

Nesta aula vamos apresentar exemplos práticos e a teoria sobre a solução de sistemas lineares gerais do tipo $Ax = b$ com $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$ qualquer. Depois vamos analisar a resolução dos sistemas quadrados ($m = n$).

Conteúdo

Onde aparecem, donde vêm os sistemas lineares?

- Interseção entre retas, planos.
  Problemas associados

- Determinar os $x \in \mathbb{R}^n$ solução dos problemas lineares

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x) = 0 \end{cases}$$

onde $f_i(x) := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i$ é uma função linear em $x_1, \ldots, x_n$.

Onde aparecem, donde vêm os sistemas lineares?

- Problemas descritos das equações não lineares $f_i(x) = 0$ onde $f_i(x)$ é não linear. Por exemplo:
  encontrar x, y, z tais que

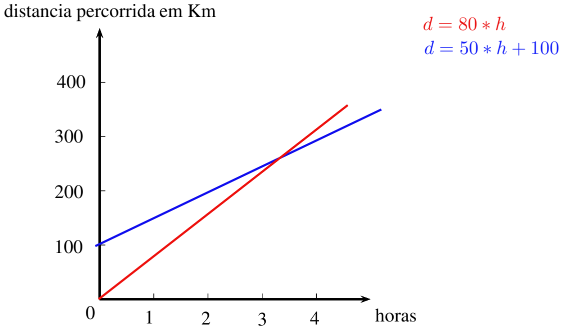
$$\begin{cases} sin(x) + e^{xy+3} + z - 3 = 0 \\ cos(x) + log(x+y) - 4 = 0 \\ 2^x + y - z * y + 2 = 0 \end{cases}$$

- Na resolução de problemas diferenciais do tipo encontrar a função $g(x)$ tal que: $g'(x) + -x \cdot g(x) + x \sin(x) = 4x$

Aplicando especificos métodos numéricos para resolver os problemas em cima aparecem sistemas lineares que necessitam de ser resolvidos. Estes métodos numéricos e os associados sistemas lineares vão ser analisado nesta disciplina mais em frente

Interseção de retas

Seja $C1$ um carro vermelho que corre com velocidade constante de 80 km/h e $C2$ um carro azul que tem velocidade constante 50 km/h.
Se $C2$ está 100 Km em frente respeito a $C1$ na mesma pista, em quantas horas o carro $C1$ passará o carro $C2$?



Sistema linear geral (retangular)

Dados $b \in \mathbb{R}^m$ e a matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de m linhas e n colunas, o problema de determinar $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = b$,
é chamado **sistema linear** de m equações e n incógnitas. O vetor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ é chamado solução do sistema linear, o vetor $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$
é chamado vetor independente, e enfim $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n}$ também indicada com

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

é chamada matriz dos coeficientes do sistema linear $Ax = b$.

Vetores e vetores transpostos

- Um vetor $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ é chamado vetor coluna de n elementos.
- Um vetor $w = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{pmatrix}$ é chamado vetor linha de n elementos.
- Uma sequencia $x = (x_i)_{i=1,\dots,n}$ é chamado simplesmente vetor de n elementos.
- Dado um vetor y denotaremos com y^t o vetor transposto de y, então se z for um vetor coluna de n elementos $z^t = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{pmatrix}$ é um vetor linha de n elementos.

  Vice-versa se w for um vetor linha de n elementos então $w^t = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ é um vetor coluna de n elementos.

Matriz transposta

A transposta de uma matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, indicada com A^t é a matriz de dimensão $n \times m$ obtida transferindo cada linha i na coluna i ou seja

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

Vetores linearmente independentes

- Dados dois vetores $y, z \in \mathbb{R}^n$ de n elementos, diremos que são *linearmente independentes* **se não existir algum** $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ tal que $y = \alpha z$.
- Diremos que dois vetores y, z são *linearmente dependentes* **se existir um** $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ tal que $y = \alpha z$.
- Um conjunto de k vetores $\{\bar{v}_i\}_{i=1,\ldots,k}$ onde cada $\bar{v}_i \in \mathbb{R}^n$ é um vetor em $\mathbb{R}^n$ dizem linearmente independentes se uma combinação linear deles é nula somente se as constantes que os multiplicam são todas nulas. Ou seja se $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \bar{v}_i = 0$ acontece somente se $\alpha_i = 0$ por cada $i = 1, \ldots, k$.
- Se existir algum $\alpha_i \neq 0$ para que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \bar{v}_i = 0$ os vetores não são linearmente independentes
- Exemplo de três vetores linearmente independentes: (1 2 3), (4 5 5), (1 1 1)
- Outros vetores lin. indep. : $(1\ 2\ 3)^t$, $(4\ 5\ 6)^t$, $(1\ 1\ 2)^t$

Vetores não linearmente independentes (linearmente dependentes)

- Se existir algum $\alpha_i \neq 0$ para que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \bar{v}_i = 0$ os vetores não são linearmente independentes, ou seja são linearmente dependentes. Podemos exprimir um vetor deles como cobinação linear dos outros.
- Exemplo de três vetores não linearmente independentes :
  $\bar{v}_1 = (1\ 2\ 3)$, $\bar{v}_2 = (4\ 5\ 5)$, $\bar{v}_3 = (-1 \quad -0.5 \ \ 0.5)$.
  Isso porque o terceiro vetor é obtido como a combinação dos primeiro dois:
  $\bar{v}_3 = \bar{v}_1 - \frac{1}{2}\bar{v}_2$. Note que cada dupla destes três vetores é em vez linearmente independentes.

Vetores linearmente independentes e o Determinante da matriz associada

Proposição

n vetores linha $\bar{\ell}_i$, com $i = 1, \ldots, n$, são linearmente independentes se e só se a matriz $A = \begin{pmatrix} \bar{\ell}_1 \\ \vdots \\ \bar{\ell}_n \end{pmatrix}$ *tem determinante não nulo*

Proposição

n vetores columna $\bar{c}_i$ com $i = 1, \ldots, n$ são linearmente independentes se e só se a matriz $A = \begin{pmatrix} \bar{c}_1 & \cdots & \bar{c}_n \end{pmatrix}$ *tem determinante não nulo.*

Matriz não singular

Definição

Uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diz se não singular se tem n linhas (ou colunas) linearmente independentes.

Proposição

Se uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tem n linhas linearmente independentes então tem n colunas linearmente independentes (e vale o vice-versa também).

Proposição

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é não singular se e só se o determinante da matriz A é não nulo, $\det(A) \neq 0$.

A não singular $\iff$ $\{n$ linhas (ou colunas) lin. independentes $\}$
$\iff \det(A) \neq 0$

Sistemas lineares consistentes

Um sistema linear diz-se **consistente** se admite pelo menos uma solução.

Exemplo de sistemas consistentes

$$\begin{cases} 2x+4y &= 6 \\ x-y &= -1 \\ 2x+y &= 2 \end{cases} \quad \textit{admite solução } (x,y) = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{4}{3}\right).$$

$$\begin{cases} 2x+4y &= 1 \\ x-2y &= 0 \end{cases} \quad \textit{admite solução } \left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}\right).$$

Exemplo de sistemas não consistentes

Os sistemas $\begin{cases} 2x+4y &= 1 \\ x-y &= -1 \\ 2x+y &= 2 \end{cases}$, $\begin{cases} 2x+4y &= 1 \\ x+2y &= -2 \end{cases}$
não admitem solução, não são consistentes.

Posto de uma matriz

Denotamos com $(A|b)$ a matriz que se obtêm colocando o vetor b ao lado das colunas de A. Para saber se $Ax = b$ admite solução é necessário conhecer o posto (ou rank) das matrizes A e $(A|b)$

Definição

Chama se posto (ou rank) de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ o numero máximo de linhas linearmente independentes (ou equivalentemente de colunas lin. indep.) de A. É denotado com posto(A).

Exemplo

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 5 \\ 6 & 10 & 10 \end{pmatrix}$ *tem máximo 2 linhas linearmente independentes, que são a dupla* $(1\ ,2\ ,3)$, $(3\ ,5\ ,5)$ *e a dupla* $(2\ ,4\ ,6)$, $(6\ ,10\ ,10)$.

Note que se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ então $posto(A) \leq \min\{m, n\}$.

Verificar se um sistema é consistente usando o posto

Proposição

O sistema $Ax = b$ é consistente (admite pelo menos uma solução) se e só se: $posto(A) = posto(A|b)$

Exemplo: $\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x - y = -1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ tem $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ com posto 2, porque cada dupla de linhas é linearmente independente. Não tem 3 linhas lin. indep. Porque note que a $(2\ ,1) = 0.5(2\ ,4) + (1\ ,-1)$, por isso o máximo numero de linhas lin. indep. é dois.

Também a matriz $(A|b) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ tem posto 2, note que $(2, 1, 2) = 0.5(2, 4, 6) + (1, -1, -1)$.

Por isso este sistema admite solução, que será $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{4}{3}$.

Solução de sistemas gerais ($m > n$)

$Ax = b$ com $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, incógnita $x \in \mathbb{R}^n$

Se $m > n$ O sistema tem **mais equações que incógnitas**, pode admitir solução somente se: tem pelo menos $m - n$ equações que podem ser deduzidas das outras.
Ou equivalentemente se tem no máximo n equações linearmente independentes, ou seja se $posto(A|b) \leq n$.

Depois temos sempre de verificar se $posto(A) = posto(A|b)$ **para ter a certeza de ter solução.**
Se $r := posto(A) = posto(A|b) < n$, teremos ∞^{n-r} soluções.
Se temos em vez $posto(A) = posto(A|b) = n$, temos uma única solução.

Solução de sistemas gerais ($m > n$), Exemplos

- $\begin{cases} 2x + 4y &= 1 \\ x - y &= -1 \\ 2x + y &= 2 \end{cases}$ tem $m = 3$, $n = 2$ não admite solução porque
$(A|b) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ tem determinante não nulo, por isso $posto(A|b) = 3 > n$
logo o sistema não pode admitir solução.

- $\begin{cases} 2x + 4y &= 6 \\ x - y &= -1 \\ 2x + y &= 2 \end{cases}$ admite solução porque $posto(A|b) = posto(A) = 2$, que é $(x, y) = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$.

- $\begin{cases} 2x + 4y &= 1 \\ x + 2y &= 0.5 \\ -x - 2y &= 2 \end{cases}$ tem $posto(A|b) = 2 = n$ mas este não me garante de ter solução, verificando
temos $posto(A) = 1 \neq posto(A|b)$, por isso não temos solução.

- $\begin{cases} 2x + 4y &= 1 \\ x + 2y &= 0.5 \\ -x - 2y &= -0.5 \end{cases}$ tem $posto(A|b) = 1 < n$ e sendo também que $posto(A) = 1$ então o
sistema admite infinitas soluções ($\infty^{2-1} = \infty^1$ soluções),
são todas aquelas do tipo $(-2y + 0.5, y)$ por cada $y \in \mathbb{R}$.

Solução de sistemas gerais ($m < n$)

$Ax = b$, com $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, incógnita $x \in \mathbb{R}^n$

Se $m < n$ O sistema tem **mais incógnitas que equações**.
Se admitir solução (ou seja se $posto(A) = posto(A|b)$) pode admitir somente um número infinito de soluções, de numero ∞^{n-r} onde $r = posto(A) = posto(A|b)$.

Isso porque r será sempre menor de n, sendo que vale (ver slide 15) $r \leq \min\{m, n\} = m < n$.

Notamos que se $posto(A) = m$ necessariamente também $posto(A|b) = m$ e por isso o sistema admitirá neste caso sempre ∞^{n-m} soluções.

Solução de sistemas gerais ($m < n$), Exemplos

- $\begin{cases} 2x - y + z & = & -2 \\ -3x + y + 2z & = & 1 \end{cases}$
  $m = 2, n = 3$, a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ tem posto $r = 2 = m$ e também $posto(A|b) = 2$ então o sistema é consistente e tem $\infty^{n-2} = \infty^1$ soluções do tipo $(1 + 3z, 4 + 7z, z)$ por cada $z \in \mathbb{R}$

- $\begin{cases} 2x - y + z & = & -2 \\ -4x + 2y - 2z & = & +4 \end{cases}$
  admite ∞^2 soluções porque $r = posto(A) = posto(A|b) = 1$. As soluções são do tipo $(x, y, -2x + y - 2)$

- $\begin{cases} 2x - y + z & = & -2 \\ -4x + 2y - 2z & = & +3 \end{cases}$
  é inconsistente (não admite solução). Isso porque $posto(A) = 1$ e $posto(A|b) = 2$.

Sistemas lineares com $m = n$

$Ax = b$, com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b, x \in \mathbb{R}^n$

Se $m = n$ Sistema com n equações e n incógnitas
Teremos sempre $posto(A) \leq posto(A|b) \leq n$

- Se $\det(A) = 0$
  - Se $posto(A) < posto(A|b)$ o sistema não admite solução (sistema inconsistente).
  - Se $r = posto(A) = posto(A|b)$ o sistema admite ∞^{n-r} soluções onde $r := posto(A)$. Note que neste caso sendo $det(A) = 0$ temos necessariamente que $r < n$
- Se $\det(A) \neq 0$ O sistema admite uma única solução e tem $posto(A) = n$. Note que
  $\det(A) \neq 0 \rightarrow posto(A) = posto(A|b) = n$

Sistemas lineares com $m = n$, Exemplos

- $$\begin{cases} x + 2y - 3z & = & 1 \\ -2x - y + 2z & = & 1 \\ -x + y - z & = & 1 \end{cases}$$
  não admite solução.
  Note que $posto(A) = 2$, porque a última linha de A é obtida como soma das primeira duas.
  Em vez $posto(A|b) = 3$, porque $\det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$

- $$\begin{cases} x & +2y - 3z & = & 1 \\ -2x & +3y + 2z & = & 2 \\ & 7y - 4z & = & 4 \end{cases}$$
  admite ∞^1 soluções.
  Porque $\det(A) = 0$ e $posto(A) = 2 = posto(A|b)$ porque a última equação é igual a soma 2*(eq.1)+(eq.2).

- $$\begin{cases} x + 2y - 3z & = & 1 \\ -2x + 3y + 2z & = & 2 \\ -x + y + z & = & 3 \end{cases}$$
  admite uma única solução porque $\det(A) = -4 \neq 0$

Métodos Diretos para a resolução de sistemas lineares

Chamamos método direto para a resolução de um sistema linear: um qualquer método ou regra que num numero finito de passos permite de obter a solução certa do sistema linear.
Esta solução é exata na aritmética infinita (sem usar algum tipo de aproximação).

Um método direto é por exemplo a regra de Cramer.

Regra de Cramer

Dado o sistema $Ax = b$ com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$, com $det(A) \neq 0$ podemos achar a solução $x \in \mathbb{R}^n$ usando a seguinte regra (formula) chamada Regra de Cramer:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \text{por cada } j = 1 \ldots, n$$

onde $A_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz obtida de A substituindo a coluna j de A, ou seja $(a_{ij})_{i=1,\ldots,n}$, com o vetor b.

Exemplo: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x - y - 2z = 2 \\ x + z = 0 \end{cases}$

Note que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, tem $\det(A) = -6$.

$b = (2\ 2\ 0)^t$ e o vetor das incógnitas é $\bar{x} = (x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3$. Aplicando Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-6}{-6} = 1;\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-12}{-6} = 2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{6}{-6} = -1.$$ Note que usamos a notação $|B| := \det(B)$. Se computamos o determinante usando formulas/regras diretas então a regra de Cramer será um método direto.

Regra de Laplace

$$\det A = \begin{cases} a_{11} & \text{se } n = 1 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Onde $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$ é a matriz que se obtém eliminando a linha i e coluna j de A.

A regra de Laplace é direta portanto usando ela dentro a regra de Cramer obtemos um método direto.