Convergência dos métodos iterativos para a procura dos zeros. Método da secante. Problema do ponto fixo

MS211 – Cálculo Numérico

Giuseppe Romanazzi

1 Outubro 2020

Conteúdo

Contéudo

Conteúdo

Convergência e erro ao passo k

Como já vimos dada uma sucessão $\{x_k\}$ de um método numérico usado para procurar o zero z (ou também denotado com ξ) de uma função f

Definição (Convergência do método)

O método que gera a sucessão $\{x_k\}$ diz se **convergente** *à raiz z se vale $\lim_{k\to\infty} x_k = z$.*

Como já vimos o método da bisseção e da falsa posição são convergentes quando f é continua e admite um único zero em $[a, b]$.

A seguir usamos a notação $e_k := |x_k - z|$, (ou $e_k := |x_k - \xi|$) então e_k é o **erro do método no passo(iteração)** k.
Observamos que se o método for convergente então a sucessão dos erros converge a zero

$$\lim_{k\to\infty} e_k = 0.$$

Convergência linear

Determinar a ordem de convergência dos métodos, é útil para comparar a rapidez dos métodos convergentes

Definição (Convergência linear)

Se existir $0 < C < 1$ *tal que* $\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = C$ *onde* $e_k = |x_k - z|$, *então o método, que gera os* $\{x_k\}$, *é dito* **linear**. *Os métodos lineares tem ordem de convergência 1.*

Notamos que se $\{x_k\}$ for gerada de um método linear vale que: por k suficientemente grande ($\exists \nu > 0$ tal que $\forall k > \nu$): $e_{k+1} \approx Ce_k$, e então $e_{k+1} < e_k$ para k suficientemente grande.

Convergência de ordem superior

Definição (Convergência de ordem p)

Um método é dito ser **convergente de ordem** *p, com $p > 1$, se existir um $C > 0$ tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{{e_k}^p} = C$$

A constante C é chamada constante assintótica de convergência. Vale que por k suficientemente grande $e_{k+1} \approx C e_k^p$.

Definição (Convergência superlinear)

Se $\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = 0$ *o método diz-se que converge mais que linearmente (ou que é superlinear).*

Neste ultimo caso é esperável que a ordem de convergência seja superior de 1.

Convergência dos métodos de Bisseção e Falsa Posição

- Sabemos que o método da bisseção é convergente, porem não se conhece a sua ordem de convergência, porque esta dependerá da função e do intervalo $[a, b]$ utilizado. Sabemos só que para a bisseção vale sempre que $e_k < \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b-a}{2^{k+1}}$, que é útil para estimar o erro cometido no passo k.

- O método da falsa posição em vez pode ser linear nalgum caso comum, como quando a função for convexa ou concava. Ver teorema seguinte.

Teorema (Convergência linear do método da falsa posição)

Seja f tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$ com um único zero z em $[a, b]$, se f for convexa ou concava em $[a, b]$ (ou seja $f'' > 0$ ou $f'' < 0$ respetivamente) então o método da falsa posição converge e é linear

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = M,$$

com $0 < M < 1$ obtida da formula $M = \ 1 - \frac{f'(z)}{f'(w)}$ com

$$\begin{cases} w \in (z, b), \text{se } f \text{ for convexa} \\ w \in (a, z), \text{se } f \text{ for concava} \end{cases}$$

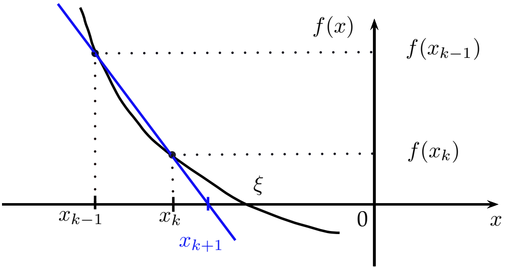
Proposição (Estimativa do erro da falsa posição)

Se a derivada f' for continua em $[a, b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Sejam $m_1 = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ e $M_1 = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ então vale a seguinte estimativa do erro ao passo $k + 1$:

$$e_{k+1} \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_{k+1} - x_k|$$

Método da Secante

Este método usa duas aproximaçõe x_{k-1} e x_k do zero de uma função f para poder achar uma aproximação melhor x_{k+1}. A aproximação é obtida através a interseção com o eixo das x da linha "secante"que passa pelos pontos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_k, f(x_k))$



Notamos que este método não usa, diferentemente da bisseção e falsa posição, os extremos do intervalo $[a, b]$ onde é procurado o zero.

Formula do Método da Secante

A iteração $k+1$ do método da secante, ou seja x_{k+1}, é obtida portanto como a solução x do sistema

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{y - f(x_{k-1})}{x - x_{k-1}} = \dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} & \text{(equação reta secante)} \\ & \\ y = 0 & \text{(equação do eixo das x)} \end{array}\right. \quad \rightarrow x_{k+1} = x$$

Temos três possíveis expressões de x_{k+1}

$$x_{k+1} = \frac{f(x_k)x_{k-1} - f(x_{k-1})x_k}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \tag{1}$$

$$x_{k+1} = x_{k-1} - f(x_{k-1})\frac{(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \tag{2}$$

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \tag{3}$$

Observações

- Note como a formula (expressão) (1) do método da secante é similar a aquela da falsa posição
- Onde evitar erros de cancelamento subtrativo que acontecem com esta formula (1) quando $x_k \approx x_{k-1}$ prefere-se usar a formula (2) ou (3).

Algoritmo e critérios de precisão (ou de paragem)

Inicialização	x_0, x_1 dados de input
Repetir	1. $x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$; 2. $k = k + 1$;
Até	Verificar o critério de paragem

Dois critérios de paragem do algoritmo são possíveis:

i) $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$

ii) $|f(x_k)| < \varepsilon$

- O critério i) garante a saída do algoritmo quando duas iterações sucessivas são próximas a menos de ε, isso porem não garante que $|x_k - \xi| < \varepsilon$. Mas se for ε muito pequeno e temos garantia da convergência (ver teorema na slide 14), é esperável que, satisfeito o critério i), o x_k seja próximo do zero.
- O critério ii) pode ser usado junto com o critério i).
  É também possível usar dois ε diferentes, por exemplo $|x_k - x_{k-1}| < 10^{-4}$ e $|f(x_k)| < 10^{-2}$

Exemplo

Procurar o zero de $f(x) = x \log x - 1$ em $[2,3]$. Sabemos já que em $[2,3]$ tem um único zero, escolho de usar como $x_0 = 2$ e $x_1 = 3$, poderia também ter usado $x_0 = 2$ e $x_1 = 2.5$, porque a escolha é livre, porem no teorema a seguir vamos ver como é importante usar x_0, x_1 perto do zero. Com $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, e usando como condição de paragem $(|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon_1$ e $|f(x_k)| < \varepsilon_2)$ do algoritmo com $\varepsilon_1 = 10^{-4}$, $\varepsilon_2 = 10^{-6}$, obtemos usando $f(x_0) = -0.39794, f(x_1) = 0.431367$ as seguintes iterações:

$$
\begin{array}{lll}
x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \approx 2.504964 & \text{com } f(x_2) \approx -0.001016 \\
x_3 = x_2 - f(x_2)\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \approx 2.506188 & \text{com } f(x_3) \approx 2.80210^{-6} \\
x_4 = x_3 - f(x_3)\frac{x_3 - x_2}{f(x_3) - f(x_2)} \approx 2.506184 & \text{com } f(x_4) \approx -3.55510^{-10}
\end{array}
$$

x_4 satisfaz ambas as condições de paragem:

$$|x_4 - x_3| \approx 4 \cdot 10^{-6} < 10^{-4}; \quad |f(x_4)| < 10^{-6},$$

por isso o algoritmo para nesta iteração.

Métodos Globais e Locais

- Os **métodos globais** convergem a um zero da função sempre que existir um único zero na região considerada. Os métodos da bisseção e da falsa posição são globais.
- Os **métodos locais** para convergir precisam usar iterações iniciais perto da raiz procurada e somente neste caso os métodos locais têm a garantia de convergir a raiz. Os métodos da secante e de Newton-Raphson são locais.

Convergência

Teorema (Convergência do método da secante)

Seja f com pelo menos um zero ξ em $[a,b]$, e tal que $f'(x) \neq 0$ por cada $x \in [a,b]$, e tal que admite derivada segunda continua em $[a,b]$. Se os pontos x_0 e x_1 foram tomados bastantes perto do zero ξ então o método da secante é convergente e tem ordem $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} (\approx 1.618)$:

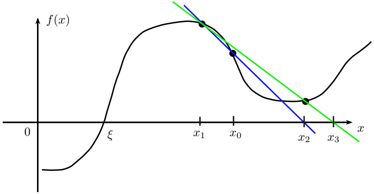
$$\lim_{k\to\infty} e_k = 0 \quad , \quad \lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = C$$

Propriedades:

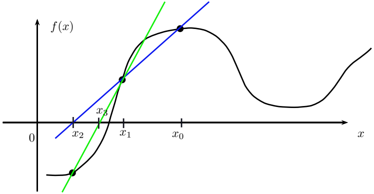
- Vale que o erro ao passo $k+1$ satisfaz
$$e_{k+1} \leq M e_k e_{k-1}$$
onde $M = \frac{M_2}{2M_1}$ com $M_1 \leq \inf_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ e $\sup_{x\in[a,b]} |f''(x)| \leq M_2$.
- x_0 e x_1 **"bastantes perto ao zero"** significa por este método que: $|x_0 - \xi| \leq \frac{1}{M}$ e $|x_1 - \xi| < \frac{1}{M}$

Interpretação geométrica da escolha de x_0, x_1

Mostramos graficamente a importância de tomar x_0 e x_1 perto da raiz ξ. Se x_0, x_1 foram distantes da raiz pode acontecer que $\{x_k\}$ não converge a ξ, e pode até ir ao infinito se não existem mais zeros além de ξ.



Se em vez x_0, x_1 foram perto do zero e tomados na região da curva com a mesma concavidade ou monotonocidade da região que contem o zero, teremos convergência



Ponto fixo de uma função φ

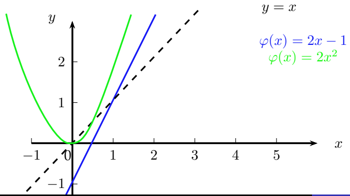
Definição (Ponto fixo)

Um ponto $\xi \in \mathbb{R}$ é chamado ponto fixo da função φ se: $\varphi(\xi) = \xi$

Para determinar os ponto fixos de φ é suficiente achar as interseções da função φ com a bissetriz $y = x$, ou seja resolver a equação

$$\varphi(x) = x.$$

Por exemplo $\varphi(x) = 2x$ tem como ponto fixo $\xi = 0$, porque de $2x = x$ obtemos $x = 0$. Em vez $\varphi(x) = 2x - 1$ tem como ponto fixo $\xi = 1$, porque $2x - 1 = x$ implica que $x = 1$. Não sempre o ponto fixo é único: $\varphi(x) = 2x^2$ tem dois pontos fixos $\xi_1 = 0$ e $\xi_2 = \frac{1}{2}$.



Métodos do ponto fixo

Um método iterativo do tipo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ é dito método do ponto fixo, ou também método iterativo simples.
O método de Newton-Raphson é do ponto fixo, em vez todos os métodos vistos até agora não são do ponto fixo.

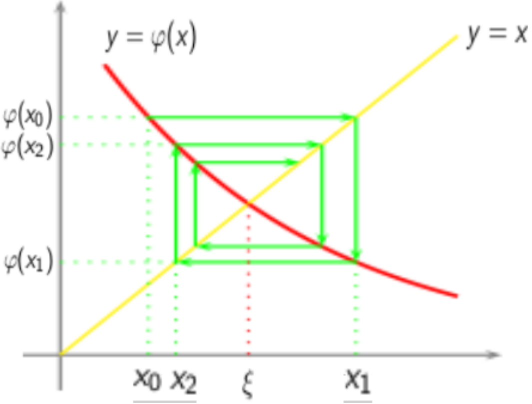
É fácil construir um método do ponto fixo, dada uma qualquer função $\varphi(x)$ e um ponto x_0 pode sempre construir o método :

$$x_1 = \varphi(x_0) \longrightarrow x_2 = \varphi(x_1) \longrightarrow \cdots x_k = \varphi(x_{k-1}) \longrightarrow x_{k+1} = \varphi(x_k) \longrightarrow \cdots$$

Porém pode não convergir...

Determinação gráfica dos métodos do ponto fixo

Dado x_0 e a função φ temos que $x_1 = \varphi(x_0)$, x_1 é portanto achado no eixo das x como a abscissa da interseção da reta $y = \varphi(x_0)$ com a bissetriz $y = x$. De x_1 computamos $\varphi(x_1)$ e determinamos x_2 como a abscissa da interseção de $y = \varphi(x_1)$ com a bissetriz ...



Métodos do ponto fixo, convergência

Não todos os métodos do ponto fixo convergem .... Por exemplo, considere $\varphi(x) = 2x + 1$ e pega $x_0 = 3$ tem $x_1 = 7, x_2 = 15, x_3 = 31$, a sucessão x_k diverge (vá ao infinito).

Mas, se convergir o método convergirá a um ponto fixo de $\varphi(x)$. Por exemplo se for $\varphi(x) = \dfrac{x}{3} + 2$ obtemos, dada a iteração inicial $x_0 = 5$, os valores:

$x_1 = \dfrac{5}{3} + 2 = 3.667$, $x_2 = \dfrac{x_1}{3} + 2 = 3.222$, $x_3 = 3.0741$,
$x_4 = 3.0247, \ldots x_8 = 3.0003$, $x_9 = 3.0001$, $x_{10} = 3.000003, \ldots$
$\lim\limits_{k \to \infty} x_k = 3.$

Então a sucessão $\{x_k\}$ converge a 3. Notamos que $x = 3$ é mesmo o ponto fixo de $\varphi(x) = \frac{x}{3} + 2$. Este não acontece por caso ...

Convergência ao ponto fixo

Na verdade qualquer método do ponto fixo, ou seja do tipo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, se convergir, pode convergir somente ao ponto fixo de φ.

Teorema de Convergência ao ponto fixo

Seja φ uma função continua e $\{x_k\}$ a sucessão gerada do associado método do ponto fixo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$. Se existir $c \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_k = c$, então c é um ponto fixo de φ.

Demonstração.

Se $\lim_{k\to\infty} x_k = c$ temos também que $\lim_{k\to\infty} x_{k+1} = c$ mas sendo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ então

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = c. \tag{4}$$

Sendo φ uma função contínua e por a hipótese de convergência ($\lim_{k\to\infty} x_k = c$) temos que

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \varphi(\lim_{k\to\infty} x_k) = \varphi(c). \tag{5}$$

Por isso obtemos de (4) e (5), que $\varphi(c) = c$. O ponto c é portanto um ponto fixo de φ. □

Teorema de convergência dos métodos do ponto fixo

Teorema

Seja I um intervalo que contem um ponto fixo ξ de φ. Se valem as seguintes condições:

i) φ *e a sua derivada* φ' *são funções continuas em* I;

ii) $\exists M > 0$ *tal que* $|\varphi'(x)| \leq M < 1 \; \forall x \in I$;

iii) $x_0 \in I$;

então a sucessão $\{x_k\}$ *gerada de* φ *(ou seja com* $x_k = \varphi(x_{k-1})$*) converge ao ponto fixo* ξ *(*$\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$*).*

O intervalo I é chamado intervalo de contração.

Teorema de convergência dos métodos do ponto fixo

Demonstração.

Provamos o teorema em dois passos

1. Se $x_0 \in I$ então cada x_k continua a estar em I, $\forall k > 0$ $x_k \in I$.
2. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \xi$

Seja $x_k \in I$ usando a expansão em serie de Taylor de φ obtemos:
$x_{k+1} - \xi = \varphi(x_k) - \varphi(\xi) = \varphi'(c_k)(x_k - \xi)$ com
$c_k \in [\min(x_k, \xi), \max(x_k, \xi)] \subset I$.
Portanto $|x_{k+1} - \xi| = |\varphi'(c_k)||x_k - \xi|$, e por a hipótese ii) $|\varphi'(c_k)| < 1$, obtemos $|x_{k+1} - \xi| < |x_k - \xi|$ e então x_{k+1} é mais perto a ξ respeito a x_k e continuará portanto a estar no intervalo I, $x_{k+1} \in I$.
Provamos agora o ponto 2. Usando ii):
$|x_1 - \xi| = |\varphi(x_0) - \varphi(\xi)| = |\varphi'(c_0)||x_0 - \xi| \leq M|x_0 - \xi|$
$|x_2 - \xi| = |\varphi'(c_1)||x_1 - \xi| \leq M|x_1 - \xi| \leq M^2|x_0 - \xi|$
No passo k temos $|x_k - \xi| \leq M^k|x_0 - \xi|$. Agora sendo por hipótese que $0 < M < 1$ obtemos que $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k - \xi| \leq \lim\limits_{k\to\infty} M^k|x_0 - \xi| = 0$ e portanto $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \xi$. $\square$

Estimativa do erro ao passo $k+1$

Teorema da Estimativa do erro do método do ponto fixo

Com a hipoteses i) ii) iii) do teorema anterior vale que $|x_k - \xi| < \dfrac{M}{1-M}|x_k - x_{k-1}|$ *onde lembramos que no intervalo de contração* I, $|\varphi'(x)| \leq M < 1$, $\forall x \in I$.

Demonstração.

Usando que $x_k = \varphi(x_{k-1})$ e que $\varphi(\xi) = \xi$ obtemos
$|x_k - \xi| \leq |x_k - x_{k+1}| + |x_{k+1} - \xi| \leq M|x_k - x_{k-1}| + M|x_k - \xi|$
Portanto $(1-M)|x_k - \xi| \leq M|x_k - x_{k-1}|$ e sendo $1 - M > 0$ e dividindo por $1 - M$ temos a tese. $\square$