Métodos de Bissecção e da Falsa Posição

MS211 – Cálculo Numérico

Giuseppe Romanazzi

29 Setembro 2020

Contéudo

Conteúdo

Procedimento para achar os zeros

O Procedimento divide-se em duas fases

1. Fase 1: Localização ou isolamento das regiões que contem os zeros (Aula anterior)
2. Fase 2: Aplicação de métodos numéricos para refinar tais regiões e achar com mais precisão os zeros

O sucesso da Fase 1, no localizar regiões restritas no entorno do zero, permite de resolver a Fase 2 mais rapidamente.

Critérios de precisão na aproximação do zero

Quando podemos dizer de estar perto ao zero procurado?
Seja $\bar{x}$ uma aproximação da raiz z obtida de um método, e $\varepsilon > 0$ a acurácia (ou a precisão) requerida do problema, podemos dizer de achar (ou aproximar) o zero a menos de uma tolerância ε se

i) $|\bar{x} - z| < \varepsilon$

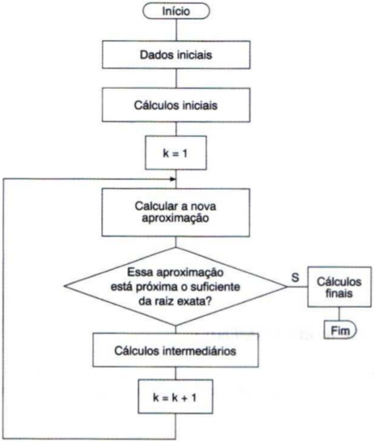
ou

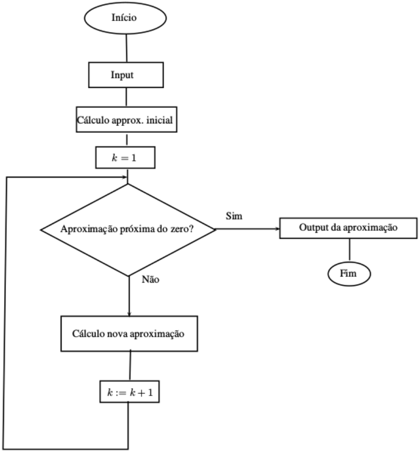
ii) $|f(\bar{x})| < \varepsilon$.

Em qualquer método iterativo podemos escolher o critério do saída baseando-se numa das duas condições ou em ambas.

Métodos com Algoritmos Iterativos

Usaremos métodos que usam algoritmos com iterações para aproximar os zeros. Em cada iteração (conjunto de operações que se repetem) aproximaremos sempre melhor o zero. Dois algoritmos possíveis:





Algoritmos Iterativos

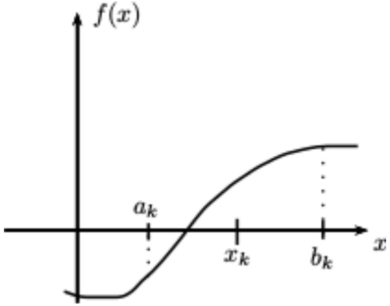
- Os critérios de precisão vistos antes são os critérios suficientes para ter uma boa aproximação, serão portanto também chamados **critérios de paragem** dos algoritmos.
- Sendo que z é desconhecido (por isso é procurado!) não é possível aplicar diretamente o critério $|\bar{x} - z| < \varepsilon$.
  Este critério é substituído do critério $|b_k - a_k| < \varepsilon$ onde $[a_k, b_k]$ é o intervalo, que contem o zero, obtido na iteração k do método, junto a aproximação x_k do zero com $x_k \in (a_k, b_k)$.

  Portanto se verificamos $|b_k - a_k| < \varepsilon$ então vale com certeza $|x_k - z| < \varepsilon$.
- Note que a seguir os algoritmos usados podem usar $k = 0$ ou $k = 1$ para indicar a primeira iteração.

Método de Bissecção

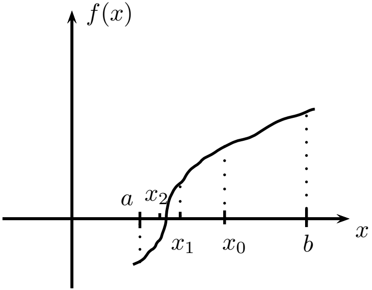
Descrição

Parte-se de um intervalo $[a, b]$ tal que a função tem sinais contrários nos seus extremos. Divide-se o intervalo a meio, escolhe-se o subintervalo onde a função tem sinais contrários nos extremos e assim sucessivamente. Em cada iteração o aproximante do zero, é o ponto médio do intervalo analisado $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$.



Método da Bissecção: Algoritmo

Inicialização	$[a_0, b_0] = [a, b]$
Repetir	1. $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$; 2. Se $f(x_k)f(a_k) < 0$ Então $a_{k+1} = a_k,\ b_{k+1} = x_k$ Senão $a_{k+1} = x_k,\ b_{k+1} = b_k$
Até	Verificar o critério de paragem escolhido



Exemplo de aplicação do método da bissecção

$f(x) = x \log x - 1$ onde $\log \equiv \log_{10}$.
Achar o zero a menos de um erro (tolerância) $\varepsilon = 10^{-4}$.
Observamos que:

- $f(2) \approx -0.3979 < 0$ e $f(3) \approx 0.4314 > 0$ portanto existe um zero em $[2, 3]$.
- O zero é único em $[2, 3]$? Sim, porque $f'(x) = \log x + x(\log x)' = \log x + x(\frac{\ln x}{\ln 10})' = \log x + \frac{1}{\ln 10} = \frac{\ln(x)+1}{\ln 10} > 0$, se $x > 1$.
- Usamos o critério de paragem $|b_k - a_k| < \varepsilon$, com $\varepsilon = 10^{-4}$.

Exemplo de aplicação do método da bissecção

$[a_0, b_0] = [2, 3]$ com $f(a_0)f(b_0) < 0$, $|b_0 - a_0| > \varepsilon$

$$x_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = 2.5 \begin{cases} f(x_0) = -5.1510^{-3} < 0 \\ f(a_0) = -0.3979 < 0 \\ f(b_0) = 0.4314 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} z \in (x_0, b_0) \\ a_1 = x_0 = 2.5 \\ b_1 = b_0 = 3 \\ |b_1 - a_1| > \varepsilon ...alg.continua \end{array}$$

$$x_1 = \frac{a_1+b_1}{2} = 2.75 \begin{cases} f(x_1) = 0.2082 > 0 \\ f(a_1) = -5.1510^{-3} < 0 \\ f(b_1) = 0.4314 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} z \in (a_1, x_1) \\ a_2 = a_1 = 2.5 \\ b_2 = x_1 = 2.75 \\ |b_2 - a_2| > \varepsilon ...alg.continua \end{array}$$

$x_2 = \frac{a_2+b_2}{2} = 2.625 \ldots$

Se for $\varepsilon = 0.3$ o método obtêm o aproximante $x_2 = 2.625$.
Se $\varepsilon = 10^{-4}$ obtemos em vez como aproximante $x_{14} \approx 2.506195$, que for obtido depois 14 iterações. Note que o zero real é $z \approx 2.506184$.

Observações

- No fim de cada iteração k toma-se como aproximante do zero o valor x_k.
- O método correu bem. Isso era esperado porque sendo que refinemos sempre mais o intervalo inicial determinando em cada iteração um intervalo menor que contem o zero, conseguimos sempre localizar bem o zero.
- Sempre que necessitaremos uma precisão maior (ou tolerância menor) o método numérico requererá mais iterações.

Convergência

Teorema de Convergência do método da bissecção

Seja f contínua em $[a, b]$ *tal que* $f(a)f(b) < 0$ *e seja z o único zero de f nesse intervalo. Então o método da bissecção gera uma sucessão* x_k *que converge para z. Ou seja* $\lim_{k\to\infty} x_k = z$

Demonstração no livro "Cálculo Numérico - aspectos teórico e computacionais" páginas 44-46

Estimativas do número de iterações

Dada a tolerância ε, é possível saber a priori em quantas iterações obtemos com o método da bissecção uma aproximação x_k do zero z tal que satisfaz o critério

$$|x_k - z| < \varepsilon \tag{1}$$

? Sim, ... sendo que $x_k := \frac{a_k+b_k}{2}$ é o aproximante do método após k iterações, e que $|x_k - z| < |b_k - a_k|$, então é suficiente encontrar k tal que

$$|b_k - a_k| < \varepsilon.$$

Observamos que

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_{k-2} - a_{k-2}}{2 \cdot 2} = \frac{b_{k-3} - a_{k-3}}{2^3} = \ldots = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

Sendo que por hipótese do método $a_0 = a$, $b_0 = b$. O número de iterações k para que seja verdadeira a condição (1) é tal que $\frac{b-a}{2^k} < \varepsilon$. Ou seja equivale a determinar o menor k inteiro positivo tal que

$$k > \frac{\log(b-a) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}.$$

Exemplo, Estimativas do número de iterações

$f(x) = x\log(x) - 1$, $[a, b] = [2, 3]$.

- Se $\varepsilon = 10^{-2}$, observamos que

$$k > \frac{\log(3-2) - \log(10^{-2})}{\log(2)} = \frac{0 - (-2)}{0.30103} \approx 6.64$$

Portanto o número mínimo de iterações para ter

$$|x_k - z| < 10^{-2}$$

é 7, e temos $x_7 = 2.50390625$.

- Se $\varepsilon = 10^{-4}$, temos $\frac{\log(b-a)-\log(\varepsilon)}{\log(2)} = \frac{4}{0.30103} \approx 13.288$.
  O número mínimo de iterações para que $|x_k - z| < 10^{-4}$ é 14, e temos como aproximante $x_{14} \approx 2.5062$.

Implemente o código do método e verifique estes resultados

Propriedades do método da bissecção

Propriedades Positivas

- É um método global e geral, no sentido que converge sempre a uma raiz $z \in [a, b]$, dependendo somente do intervalo $[a, b]$ e que função f seja tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Outros métodos dependerão também de um chute inicial x_0 para poder convergir à raiz.
- Envolve poucas operações $\rightarrow$ tem custo computacional baixo.
- Sabe se a priori até quantas iterações k são necessárias para ter $|x_k - z| < \varepsilon$. Outros métodos não têm esta propriedade.

Propriedades Negativas

- É um método geralmente lento. Se como acontece frequentemente $b - a >> \varepsilon$ o método requer bastantes iterações para ter $|x_k - z| < \varepsilon$. Imagine de usar $b = a + 3$ e $\varepsilon = 10^{-7}$, então precisaremos de $k > \frac{log(3)+7}{\log(2)} = 24.8$ iterações. Ou seja somente depois 25 iterações acharemos o zero a menos de uma tolerância de 10^{-7}. Outros métodos são bem mais rápidos para uma grande classe de funções.

Melhorar o método da bissecção

Não sempre a média $x_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$ é a melhor opção para achar o zero em $[a_k, b_k]$.

Por exemplo se $|f(a_k)|$ for mais próximo a zero de $|f(b_k)|$ (ou seja se $|f(a_k)| < |f(b_k)|$) é mais provável que o zero z seja mais próximo a a_k que a b_k.
Usando os valores $f(a_k), f(b_k)$, podemos localizar o aproximante mais próximo do extremo onde a f é mais próxima de zero, esta é a ideia do método da Falsa Posição.

Método da Falsa Posição (regula falsi)

É um método geral e pode-se aplicar quando f for continua em $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$.

É semelhante ao método da bisseçao, mas com o cálculo de x_k dado por

$$x_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}.$$

Este valor corresponde a uma media “pesada”de a_k e b_k com peso respetivamente $|f(b_k)|$ e $|f(a_k)|$, sendo que

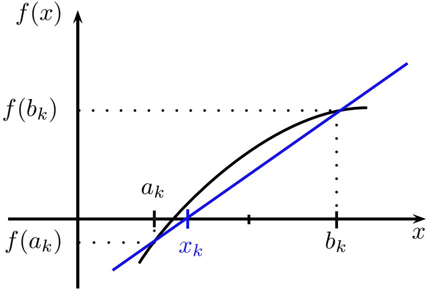
$$\frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)} = \frac{|f(b_k)|a_k + |f(a_k)|b_k}{|f(b_k)| + |f(a_k)|}.$$

Por isso, quanto mais $|f(b_k)|$ for menor de $|f(a_k)|$ tanto mais a iteração x_k será mais perta a b_k que a a_k.

Método da Falsa Posição

Notamos que o valor obtido na iteração k: $x_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$ corresponde à interseção com o eixo das x da recta que une os pontos $(a_k, f(a_k))$ e $(b_k, f(b_k))$

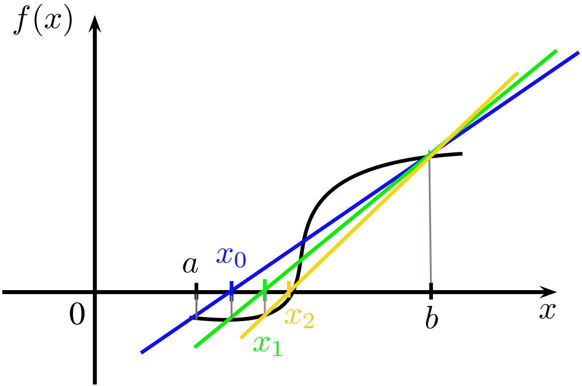
$$\begin{cases} \dfrac{y - f(a_k)}{x - a_k} = \dfrac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k} & \text{(equação da reta)} \\ y = 0 & \text{(equação do eixo das x)} \end{cases} \rightarrow x = x_k$$



Método da Falsa Posição: Algoritmo

Inicialização	$[a_0, b_0] = [a, b]$
Repetir	1. $x_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$; 2. Se $f(x_k) f(a_k) < 0$ então $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_k$ senão $a_{k+1} = x_k$, $b_{k+1} = b_k$
Até	Verificar o critério de paragem

Algoritmo similar à Bissecção, muda só o valor de x_k em cada iteração.


$f(x)$
a
x_0
0
x_2
b
x
x_1

Convergência

Teorema de Convergência do método da falsa posição

Seja f contínua em $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$ e seja ξ o único zero de f nesse intervalo. Então o método da falsa posição gera uma sucessão x_k que converge para z. Ou seja $\lim_{k \to \infty} x_k = \xi$

Exemplo de aplicação do método da falsa posição

$f(x) = x \log x - 1$ onde $\log \equiv \log_{10}$. Achar o zero a menos de uma tolerância de $\varepsilon = 10^{-4}$. Observamos que

- $f(2) \approx -0.3979 < 0$ e $f(3) \approx 0.4314 > 0$
  portanto existe um zero em $[2, 3]$.
- O zero é único em $[2, 3]$, porque $f'(x) > 0$, se $x > 1$.
- Usamos o critério de paragem $|b_k - a_k| < \varepsilon$, com $\varepsilon = 10^{-4}$.
- O método da falsa posição resulta ser mais rápido em geral da bissecção.

Exemplo de aplicação do método da falsa posição

$[a_0, b_0] = [2, 3]$ com $f(a_0)f(b_0) < 0$, $|b_0 - a_0| > \varepsilon$

$$x_0 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} \approx 2.4798 \begin{cases} f(x_0) = -0.0219 < 0 \\ f(a_0) = -0.3979 < 0 \\ f(b_0) = 0.4314 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} z \in (x_0, b_0) \\ a_1 = x_0 = 2.4798 \\ b_1 = b_0 = 3 \\ |b_1 - a_1| > \varepsilon ... alg.continu \end{array}$$

$$x_1 = \frac{a_1 f(b_1) - b_1 f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} \approx 2.505 \begin{cases} f(x_1) = -0.001 < 0 \\ f(a_1) = -0.0219 < 0 \\ f(b_1) = 0.4314 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} z \in (x_1, b_1) \\ a_2 = x_1 = 2.50496 \\ b_2 = b_1 = 3 \\ |b_2 - a_2| > \varepsilon ... alg.continua \end{array}$$

$$x_2 = \frac{a_2 f(b_2) - b_2 f(a_2)}{f(b_2) - f(a_2)} = 2.5061 \ldots$$

No fim de cada iteração k toma se x_k como aproximante corrente

Resultados

- Com $\varepsilon = 10^{-4}$, o algoritmo para na iteração $x_{11} = 2.506184$. Note que chegamos ao zero real pois: $z \approx 2.506184$. Usamos menos iterações da bissecção (precisava de 14 iterações).
- Se for $\varepsilon = 10^{-8}$, o método para sempre apos 11 iterações, em vez a bisseção precisa de 27 iterações.
- Menor é a tolerância requerida no aproximar o zero, melhor será o método da falsa posição.
- Note porem que uma iteração da falsa posição requer mais operações da bisseção (custo computacional maior).

Considere a função $x^3 - 9x + 3$, procure os dois zeros em $[0, 3]$ com Bisseção e Falsa Posição, qual método resulta ser melhor?