

Problema de Valor ao Contorno. Métodos de Diferenças Finitas

MS211 – Cálculo Numérico

Giuseppe Romanazzi

19 Novembro 2020

Conteúdo

- 1 Problema de valor contorno e métodos de diferenças finitas
 - Métodos de Diferenças Finitas
- 2 Uso das formulas de diferenças finitas para resolver PVC
 - Revisão do Método de Thomas para resolver sistemas tridiagonais
 - Resolvendo o problema PVC

Problemas de valor de contorno

Os problemas de valor de contorno (PVC) são referidos a problemas estacionários onde a variável independente x atua no espaço e a variável dependente indicada com u refere a uma quantidade que varia no espaço. Nos problemas num domínio físico espacial precisamos definir condições no contorno (ou fronteira) do domínio Ω .

Resolveremos problemas de contorno associados a equações diferenciais de segunda ordem num domínio espacial unidimensional. Estes problemas necessitam portanto de duas condições no contorno. O contorno será a fronteira do nosso domínio que será um intervalo $[a, b]$.

$$\begin{cases} u''(x) = f(x, u(x), u'(x)) \\ u(a) = u_a \\ u(b) = u_b \end{cases}$$

Podemos usar também condições sobre a derivada $u'(a) = u'_a$ ou combinações lineares do tipo $c_1 u(a) + c_2 u'(a) = c_3$

Formulas de Diferenças Finitas

Como visto na aula anterior (aula 18), é possível aproximar a derivada $u'(x)$ de uma $u(x)$, uma vez que se conhecem os valores da função no seu redor e usando uma formula de diferenças finitas

$$D_+ u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \quad (\text{Diferença finita avançada})$$

$$D_- u(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} \quad (\text{Diferença finita atrasada})$$

$$D_0 u(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \quad (\text{Diferença finita centrada})$$

De que conhecemos também os erros de truncamento no aproximar $u'(x)$

$$D_+ u(x) - u'(x) = \frac{h}{2} u''(x) + O(h^2)$$

D_+ é portanto uma formula de primeira ordem

$$D_- u(x) - u'(x) = -\frac{h}{2} u''(x) + O(h^2) \quad (D_- \text{ é uma formula de primeira ordem})$$

$$D_0 u(x) - u'(x) = \frac{h^2}{6} u'''(x) + O(h^4) \quad (D_0 \text{ é uma formula de segunda ordem})$$

D_2 , Formula centrada de diferenças finitas para aproximar $u''(x)$

Desenvolvendo em Serie de Taylor $u(x+h)$ e $u(x-h)$ até o termo $O(h^6)$:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \dots + \frac{h^5}{5!}u^{(5)}(x) + O(h^6)$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \dots + (-1)^5 \frac{h^5}{5!}u^{(5)}(x) + O(h^6)$$

podemos obter uma formula de ordem 2 para par aproximar a derivada segunda $u''(x)$:

$$D_2u(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

que aproxima $u''(x)$ com o erro

$$D_2u(x) - u''(x) = \frac{h^2}{12}u^{(4)}(x) + O(h^6) = \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi)$$

com $\xi \in (x-h, x+h)$.

Resolução de um PVC com os métodos de diferenças finitas de segunda ordem

Dado o problema

$$\begin{cases} u''(x) = f(x, u(x), u'(x)) \\ u(a) = u_a \\ u(b) = u_b \end{cases}$$

Suponhamos de querer aproximar a solução num número finito de pontos $x_i \in [a, b]$ equidistantes: $h = x_i - x_{i-1}$ com $i = 1, \dots, n$ e tais que $x_0 = a$ e $x_n = b$. Portanto queremos determinar uma sequencia de valores $\{u_i\}_{i=1, \dots, n-1}$ tais que $u_i \approx u(x_i)$.

Se aproximássemos cada derivada $u'(x)$, $u''(x)$ da PVC com formulas de diferenças finitas de segunda ordem **será esperada** ter uma aproximação $\{u_i\}$ da solução $u(x)$.

Definição

Um método das diferenças finitas para PVC consiste no aplicar formulas de diferenças finitas para aproximar cada derivada do problema PVC dado.

Se aproximássemos cada derivada $u'(x)$, $u''(x)$ do problema em cima com formulas de diferenças finitas de segunda ordem **será esperada** ter uma aproximação $\{u_i\}$ da solução $u(x)$ de segunda ordem ou seja tal que o aproximante u_i aproxima $u(x_i)$ a menos de um erro $O(h^2)$.

Vamos provar numericamente que o método obtido usando formulas de segunda ordem gera efetivamente um erro de segunda ordem (ou seja $|u(x_i) - u_i| = O(h^2)$).

Este será provado no seguinte problema com condições de Dirichlet.

A conservação da ordem das formulas aplicadas em cada derivada também no erro global vale sempre se as condições são de Dirichlet, em vez se usassemos condições de Neumann ou de Robin esta conservação da ordem não é sempre satisfeita.

Resolução do PVC, Exemplo

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x \\ y(0) = 0 \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

Se queremos aproximar a solução em $n + 1$ pontos equidistantes com distanciamento $h > 0$

$$x_0 = 0, x_1 = h, \dots, x_{n-1} = 1 - h, x_n = 1$$

temos de utilizar o espaçamento $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$.

Notamos que sendo que são conhecidos os valores de y nos pontos $x_0 = a$ e $x_n = b$, precisamos determinar somente aproximações y_i da solução do problema nos pontos internos x_i com $i = 1, \dots, n - 1$. Portanto temos $n - 1$ incógnitas $\{y_i\}_{i=1, \dots, n-1}$ para determinar.

Usando a formula centrada de segunda ordem $D_2y(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$ para aproximar a derivada $y''(x_i)$ no ponto x_i , e usando a formula centrada de segunda ordem $D_0y(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$ obteremos um método de diferenças finitas de segunda ordem para o PVC dado

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + 2\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + y_i = x_i.$$

Esta equação tem de ser resolvida para $i = 1, \dots, n - 1$ e com $y_0 = 0$ e $y_n = -1$ as duas condições no contorno.

Notamos que a primeira equação de diferenças finitas associada a $i = 1$ corresponde a equação seguinte em y_0, y_1, y_2

$$\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + 2\frac{y_2 - y_0}{2h} + y_1 = x_1$$

Notamos que sendo y_0 dada como condição ao contorno, a equação em cima tem somente duas incógnitas: y_1, y_2 . Podemos rescrever esta equação numa forma mais simples, multiplicando-la para h^2 e agrupando os termos de y_1 e y_2

$$(h^2 - 2)y_1 + (1 + h)y_2 = h^2x_1 - (1 - h)y_0 = h^3 - (1 - h)0 = h^3$$

A segunda equação será

$$\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} + 2\frac{y_3 - y_1}{2h} + y_2 = x_2$$

aqui serão y_1, y_2, y_3 as incógnitas e como antes multiplicando por h^2 (desaparece o denominador) e obteremos

$$(1 - h)y_1 + (h^2 - 2)y_2 + (1 + h)y_3 = h^2x_2 = 2h^3.$$

Repetindo estes passos nas restantes equações associadas aos pontos x_i com $i = 2, \dots, n - 2$, obtemos

$$(1 - h)y_{i-1} + (h^2 - 2)y_i + (1 + h)y_{i+1} = h^2x_i = ih^3 \quad \text{com } i = 2, \dots, n - 2$$

Associado ao ponto x_{n-1} temos a última equação do método em y_{n-2}, y_{n-1}, y_n :

$$(1 - h)y_{n-2} + (h^2 - 2)y_{n-1} + (1 + h)y_n = h^2x_{n-1}$$

sendo que $y_n := y(x_n) = y(1) = -1$ é conhecida esta ultima equação pode ser escrita como segue

$$(1 - h)y_{n-2} + (h^2 - 2)y_{n-1} = h^2x_{n-1} - (1 + h)y_n = (n - 1)h^3 + (1 + h).$$

Sistema linear obtido da aplicação do método de diferenças finitas

Obtém-se o sistema de $n - 1$ equações nas $n - 1$ incógnitas $\{y_i\}_{i=1, \dots, n-1}$

$$\begin{pmatrix} h^2 - 2 & 1 + h & & & \\ 1 - h & h^2 - 2 & 1 + h & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 - h & h^2 - 2 & 1 + h \\ & & & 1 - h & h^2 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^3 \\ 2h^3 \\ \vdots \\ (n-2)h^3 \\ (n-1)h^3 + 1 + h \end{pmatrix}$$

É um problema do tipo $Ay = b$

com $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $b \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Escolha do método para resolver o sistema linear

Para resolver o sistema linear podemos usar o método direto de Eliminação de Gauss, mas para aplicar em vez um método iterativo precisaremos de verificar se eles convergem. Notamos que $|h^2 - 2| = 2 - h^2 < 2 = 1 + h + 1 - h = |1 + h| + |1 - h|$ portanto o critério das linhas e das colunas não é satisfeito. E então pode ser que Jacobi e Gauss Seidel não convergem. Se for em vez para resolver a PVC associada a equação $-y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x$ obteremos apos aplicar o método de diferenças finitas de ordem 2, um sistema linear com a matriz dos coeficientes com a diagonal estritamente dominante por linhas e portanto o critério das linhas será satisfeito e poderemos resolver o sistema com os métodos iterativos de Jacobi ou de Gauss-Seidel.

Método de Thomas

Porém, existe um método direto chamado método ou algoritmo de Thomas que têm custo computacional de $O(n)$ para resolver sistemas lineares tridiagonais de dimensão n qualquer. Este método pode ser visto como o método de eliminação de Gauss aplicado a matrizes tridiagonais, que por causa dos muitos zeros da matriz foi otimizado para ter um custo computacional baixo $O(n)$.

Matrizes e Sistemas Tridiagonais

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que tem três diagonais como na figura em baixo

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & & \\ & b_3 & a_3 & c_3 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

chama-se **matriz tridiagonal**. Estas matrizes são caracterizadas em ter $a_{ij} = 0$ para cada $i, j \in 1, \dots, n$ tal que $|i - j| > 1$.

Um sistema linear $Ax = b$ com A matriz triadiagonal é dito **sistema tridiagonal**.

Método de Thomas

O método (ou algoritmo) de Thomas é um método direto para resolver sistemas tridiagonais.

Este método pode ser visto como uma estratégia para determinar rapidamente a fatoração LU de matrizes tridiagonais.

Por causa da presença de muitos zeros (esparsidade) na matriz A este método a diferença do método de eliminação de Gauss tem um custo computacional baixo de $O(n)$.

Fatoração LU de matrizes tridiagonais usando o Método de Thomas

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \beta_2 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \beta_{n-1} & 1 & \\ & & & & \beta_n & 1 \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & c_1 & & & & \\ & \alpha_2 & c_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \alpha_{n-1} & c_{n-1} & \\ & & & & \alpha_n & \end{pmatrix}}_U$$

onde

$$\alpha_1 = a_1,$$

$$\beta_i = \frac{b_i}{\alpha_{i-1}} \quad \text{e} \quad \alpha_i = a_i - \beta_i c_{i-1}, \quad \text{por } i = 2, \dots, n$$

Método de Thomas

Dado o sistema linear $Ax = \bar{b}$ onde $\bar{b} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)^t$ é o vetor dos termos independentes, a solução do sistema pode ser obtida resolvendo os sistemas lineares triangulares:

$$Ly = \bar{b} \quad \text{e} \quad Ux = y$$

Usando as matrizes L e U obtidas na slide anterior, concluímos que

$$y_1 = \bar{b}_1, \quad y_i = \bar{b}_i - \beta_i y_{i-1}, \quad \text{com } i = 2, \dots, n$$
$$x_n = \frac{y_n}{\alpha_n}, \quad x_i = \frac{y_i - c_i x_{i+1}}{\alpha_i}, \quad i = n-1, \dots, 1$$

Este método de Thomas, permite de calcular a solução de sistemas lineares tridiagonais com $O(n)$ operações aritméticas.

Regressando ao sistema linear obtido aplicando os métodos de diferenças finitas

Reescrevemos o sistema de $n - 1$ equações nas $n - 1$ incógnitas

$$\{y_i\}_{i=1, \dots, n-1}$$

$$\begin{pmatrix} h^2 - 2 & 1 + h & & & \\ 1 - h & h^2 - 2 & 1 + h & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 - h & h^2 - 2 & 1 + h \\ & & & 1 - h & h^2 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^3 \\ 2h^3 \\ \vdots \\ (n-2)h^3 \\ (n-1)h^3 + 1 + h \end{pmatrix}$$

É um problema do tipo $Ay = b$

com $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}, b \in \mathbb{R}^{n-1}.$

Aplicando o algoritmo de Thomas

Depois $n - 2$ passos do método de Thomas (porque a nossa matriz tem dimensão $n - 1$) obtemos um sistema triangular superior com somente duas diagonais

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & c_1 & & & & \\ & \alpha_2 & c_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \alpha_{n-2} & c_{n-2} & \\ & & & & \alpha_{n-1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ -\beta_2 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & & -\beta_{n-2} & 1 & \\ & & & & -\beta_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^3 \\ 2h^3 \\ \vdots \\ (n-1)h^3 + 1 + h \end{pmatrix}$$

onde $\alpha_1 = h^2 - 2$, $\beta_i = \frac{1-h}{\alpha_{i-1}}$ e $\alpha_i = h^2 - 2 - \beta_i(1 + h)$

Erros, usando $h = 0.1$

Após ter obtido a solução do sistema linear $Ay = b$ da aplicação das formulas de diferenças finitas de ordem dois, e depois ter resolvendo o sistema com Thomas, verificamos se o nosso método é efetivamente de segunda ordem, ou seja se:

$$\|y_{teo} - y\|_{\infty} < Ch^2, \text{ ou analogamente } |y(x_i) - y_i| \leq Ch^2$$

onde com y é a solução numérica do método e com y_{teo} é o vetor da solução exata do problema $y_{teo} := (y(x_1), \dots, y(x_n))^t$.

Conhecemos a solução teórica do problema que é

$y(x) = 2e^{-x}(1 - x) + x - 2$. Portanto com $h = 0.1$, $n = 10$ obteremos os seguintes resultados e erros

x_i	y_i	$y(x_i)$	$ y(x_i) - y_i $
$x_1 = 0.1$	-0.272	-0.2713	0.0007
$x_2 = 0.2$	-0.4941	-0.4900	0.0011
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$x_5 = 0.5$	-0.8947	-0.8935	0.0012
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$x_9 = 0.9$	-1.019	-1.0187	0.0003

Notamos que o erro maior está no centro no ponto $x = 0.5$.

Este é comum nos métodos de diferenças finitas aplicados a problemas de contorno, porque nos extremos temos erro nulo, sendo que y_0 e y_n são tomados iguais aos valores dados, em vez no centro, que é o ponto mais distante dos extremos, temos que os erros de arredondamento irão acumular-se mais.

Erros, usando $h = 0.05$

Para verificar numericamente se o nosso método tem ordem 2, dividimos por metade o espaçamento h e obteremos então $h = 0.05$, $n = 20$, ou seja teremos a aproximação da função $y(x)$ solução do problema em 21 pontos $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, \dots, 20$. O sistema linear para resolver será de dimensão 19 e o vetor das incógnitas $y = \{y_i\}_{i=1, \dots, 19}$ obtido tem os seguintes erros

x_i	y_i	$y(x_i)$	$ y(x_i) - y_i $
$x_1 = 0.05$	-0.1428	-0.1427	0.0001
$x_2 = 0.1$	-0.2715	-0.2713	0.0002
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$x_{10} = 0.5$	-0.8938	-0.8935	0.0003
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$x_{18} = 0.9$	-1.0188	-1.0187	0.0001
$x_{19} = 0.95$	-1.0114	-1.0113	0.0001

Notamos como o erro é um quarto dos erros nos mesmos pontos da tabela anterior, com $h = 0.1$, portanto é verificado que o erro $\|y_{teo} - y\|_{\infty} \leq Ch^2$, o método é efetivamente de segunda ordem.

Resolução de PCV não lineares

Considera o seguinte problema de contorno com $f(x, y)$ não linear em y

$$\begin{cases} y''(x) = y \sin(y) + xy \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 5 \end{cases}$$

Aplicando o método das diferenças finita de segunda ordem usaremos a formula $D_2y(x_i)$ para aproximar a $y''(x_i)$ e portanto obteremos um sistema não linear formado das equações

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = y_i \sin y_i + x_i y_i, \quad \text{com } i = 1, \dots, n-1$$

multiplicando por h^2 e reagrupando os termos

$$\begin{cases} 1 - y_1[2 + h^2 \sin(y_1) + h] + y_2 = 0 \\ y_{i-1} - y_i[2 + h^2 \sin(y_i) + ih] + y_{i+1} = 0, \quad i = 2, \dots, n \\ y_{n-2} - y_{n-1}[2 + h^2 \sin(y_{n-1}) + (n-1)h] + 5 = 0 \end{cases}$$

onde usamos que $y_0 = 1$, $y_n = 5$.

Este sistema sendo não linear pode ser resolvido com o método de Newton para sistemas não lineares, que vai construir uma sequencia de vetores $y^{(k)} \in \mathbb{R}^{n-1}$ que vêm dos passos $k = 1, 2, \dots$, de Newton

$$J_F(y^{(k-1)})s = -F(y^{(k-1)})$$

$$y^{(k)} = y^{(k-1)} + s$$

onde a solução $s \in \mathbb{R}^{n-1}$, e $F : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ descreve o sistema não linear $F(y) = 0$ da slide anterior e $J_F(y)$ é a matriz Jacobiana de F calculada no vetor y . Este método precisará de um vetor inicial $y^{(0)} \in \mathbb{R}^{n-1}$, que pode ser escolhido perto da solução para puder garantir a convergência... Uma maneira de fazer isso é escolher $y^{(0)}$ obtido dos valores que a reta $r(x)$ que passa por os pontos do contorno (x_0, y_0) (x_n, y_n) toma nos pontos x_i . Ou seja podes tomar $y_i^{(0)} = r(x_i)$, e verificar se obtiver convergência.

PVC com condições de Neumann ou de Robin

Considere o problema de valor de contorno

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = x \\ y(0) + y'(0) = e - 3 \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

Podemos usar métodos de diferenças finitas para a equação do problema como antes, mas agora podemos usar uma formula também para aproximar a condição de Robin assim o nosso problema continuará a ser resolvido respeito as y_i . Se por exemplo usássemos a formula de diferenças finitas avançada de primeira ordem $D_+y(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{h}$ para aproximar $y'(x_0)$ obteremos uma equação a mais

$$y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h} + 3 = e \quad (1)$$

no sistema linear obtido aplicado o método de diferenças finitas. Então teremos um sistema de n equações lineares em n incógnitas

$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$.

Mas isolando y_0 na equação obtida antes teremos

$$y_0 = \frac{h(e - 3) - y_1}{h - 1}.$$

Este valor de y_0 em função de y_1 pode ser inserido no sistema linear, substituindo y_0 na sua primeira linha

$$(1 - h)y_0 + (h^2 - 2)y_1 + (1 + h)y_2 = h$$

ontendo assim

$$(h^2 - 1)y_1 + (1 + h)y_2 = h^3 + h(e - 3).$$

O sistema resultante será assim ainda de dimensão $n - 1$

$$\begin{pmatrix} h^2 - 1 & 1 + h & & & & \\ 1 - h & h^2 - 2 & 1 + h & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 - h & h^2 - 2 & 1 + h & \\ & & & 1 - h & h^2 - 2 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^3 + h(e - 3) \\ 2h^3 \\ \vdots \\ (n - 2)h^3 \\ (n - 1)h^3 + 1 + h \end{pmatrix}$$

Estratégias para ter segunda ordem com condições de contorno de Neumann ou de Robin

Aproximar somente uma equação do problema PVC de primeira ordem e deixar as outras usando formulas de segunda ordem não garante a segunda ordem do método, portanto para ter a segunda ordem do método precisaremos usar uma formula de segunda ordem também para aproximar a condição ao contorno

$$y(0) + y'(0) = e - 3. \quad (1)$$

Para fazer isso há duas estratégias

- Podemos considerar um ponto a mais a esquerda de x_0 , indicado com x_{-1} , onde podemos ter informação da $y(x)$, por exemplo no caso da barra de metal conhecemos a temperatura num ponto que dista h do ponto x_0 da barra, (temperatura ambiente por exemplo) e assim podemos aproximar $y'(0)$ com a formula centrada de segunda ordem $\frac{y_1 - y_{-1}}{2h}$. Esta levará a adicionar ao sistema original a equação

$$(1 - h)y_{-1} + (h^2 - 2)y_0 + (1 + h)y_1 = h^2 x_0 = 0$$

Obtendo assim o sistema de dimensão n

$$\begin{pmatrix} h^2 - 2 & 1 + h & & & \\ 1 - h & h^2 - 2 & 1 + h & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 - h & h^2 - 2 & 1 + h \\ & & & 1 - h & h^2 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1 - h)y_{-1} \\ h^3 \\ 2h^3 \\ \vdots \\ (n - 2)h^3 \\ (n - 1)h^3 + 1 + h \end{pmatrix}$$

Se não conhecemos y_{-1} usando que

$y_0 + \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = e - 3 \rightarrow y_{-1} = y_1 + 2hy_0 - 2h(e - 3)$ obteremos o seguinte sistema linear de dimensão n

$$\begin{pmatrix} h^2 + 2h - 2 & 2 & & & & \\ 1 - h & h^2 - 2 & 1 + h & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 - h & h^2 - 2 & 1 + h & \\ & & & 1 - h & h^2 - 2 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2h(e - 3)(1 - h) \\ h^3 \\ 2h^3 \\ \vdots \\ (n - 2)h^3 \\ (n - 1)h^3 + 1 + h \end{pmatrix}$$

Segunda estratégia para ter um método de ordem 2 para um PVC com condições de Neumann ou de Robin

- Utilizar uma formula de diferenças finitas de segunda ordem não centrada. No nosso caso que temos a condição de Robin no ponto x_0 a esquerda podemos aproximar $y'(x_0)$ com a formula de segunda ordem

$$y'(x_0) \approx -\frac{1}{2h}(3y_0 - 4y_1 + y_2)$$

assim substituindo esta aproximação na condição

$$y_0 + y'(x_0) = e - 3 \text{ poderemos isolar a } y_0: y_0 = \frac{y_2 - 4y_1 + (e-3)h}{2h-3}$$

e substituir ela na equação

$$(1-h)y_0 + (h^2-2)y_1 + (1+h)y_1 = h^3$$

e obter assim um sistema linear de dimensão $n-1$ nas incógnitas y_1, y_2, \dots, y_{n-1} que terá soluções que distam da solução de problema com um erro de ordem 2.