Problema de Valor Inicial com Equações Diferenciais de ordem superior a um. Métodos de Euler, Crank Nicolson, Euler aperfeiçoado. Problemas de valor de contorno e Formulas de Diferenças Finitas

MS211 – Cálculo Numérico

Giuseppe Romanazzi

17 Novembro 2020

Conteúdo

Introdução e Exemplo

Os problemas de valor inicial (PVI) com condições iniciais não somente na função solução $y(x)$ que $y(x_0) = y_0$ mas também nas suas derivadas $y'(x_0) = y_0'$, $y''(x_0) = y_0''$, $\ldots y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}$, resolvem equações diferenciais de alta ordem.
Se por exemplo conhece a velocidade inicial do carro v_0 além da sua posição inicial x_0, somente se sabe como varia a sua aceleração $x''(t)$ (que mede a variação da velocidade) pode saber onde o carro está posicionado no instante t, $x(t) =$?... A posição $x(t)$ do carro no instante t satisfaz

$$\begin{cases} x''(t) = a(t, x(t), x'(t)) \\ x'(t_0) = v_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

PVI associado a equações diferenciais ordinárias de ordem superior

Problema de valor inicial associado a uma equação diferencial de ordem m:
$y^{(m)}(x) = f(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)})$
necessita, para ter solução única, de m condições iniciais no mesmo ponto:
$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, $y''(x_0) = y''_0$, $\ldots, y^{(m-1)}(x_0) = y_0^{(m-1)}$, onde os valores $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(m-1)} \in \mathbb{R}$ são dados.
Este problema pode ser escrito assim

$$\begin{cases} y^{(m)}(x) = f(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \ldots \\ y^{(m-1)}(x_0) = y_0^{(m-1)} \end{cases}$$

Transformação num sistema de equações diferenciais de primeira ordem

Podemos sempre transformar a equação diferencial de ordem superior $y^{(m)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)})$ num sistema de m equações diferenciais de primeira ordem. Isso porque, se usarmos as m funções auxiliares $z_i(x) = y^{(i-1)}(x)$, onde $i = 1, \dots, m$ obtemos que $y^{(m)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}) \iff y^{(m)} = f(x, z_1, z_2, \dots, z_m)$ Note que $z_1' = y' = z_2$, $z_2' = y'' = z_3, \dots, z_m' = y^{(m)} = f(x, z_1, z_2, \dots, z_m)$ e assim obtemos o seguinte sistema de m equações diferenciais nas m incógnitas z_i com $i = 1, \dots, m$.

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \vdots \\ z_{m-1}' = z_m \\ z_m' = f(x, z_1, z_2, \dots, z_{m-1}, z_m) \end{cases}$$

Este sistema é fornecido das m condições iniciais $z_1(x_0) = y_0, z_2(x_0) = y_0', \dots, z_m(x_0) = y_0^{(m-1)}$

Equivalência da PVI associada a uma equação diferencial de ordem m com uma equação diferencial vetorial de primeira ordem

Indicado com $Y = Y(x)$ a função vetor que tem como componentes as funções auxiliares $z_i(x)$ do problema, ou seja que é defina como $Y(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ \dots \\ z_m(x) \end{pmatrix}$ teremos a seguinte equivalência dos sistema diferenciais

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \vdots \\ z_{m-1}' = z_m \\ z_m' = f(x, z_1, z_2, \dots, z_{m-1}, z_m) \end{cases} \iff Y'(x) = F(x, Y)$$

onde $F(x, Y) := \begin{pmatrix} z_2 & z_3 & \dots & f(x, z_1, z_2, \dots, z_m) \end{pmatrix}^t$

Sendo

$$Y(x_0) = \begin{pmatrix} z_1(x_0) & z_2(x_0) & \dots & z_m(x_0) \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} y_0 & y_0' & \dots & y_0^{(m-1)} \end{pmatrix}^t,$$

a PVI inicial associada a uma equação diferencial de ordem m

$$\begin{cases} y^{(m)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ \dots \\ y^{(m-1)}(x_0) = y_0^{(m-1)} \end{cases}$$

pode ser então rescrita como um PVI vetorial de ordem 1

$$\begin{cases} Y'(x) = F(x, Y) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

onde recapitulando temos

$Y = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_m \end{pmatrix}^t = (y \; y' \; \dots \; y^{(m-1)})^t$,

$Y_0 = \begin{pmatrix} y_0 & y_0' & \dots & y_0^{(m-1)} \end{pmatrix}^t$,

$F(x, Y) := \begin{pmatrix} z_2 & z_3 & \dots & f(x, z_1, z_2, \dots, z_m) \end{pmatrix}^t$

onde as funções auxiliares incógnitas são $z_i = y^{(i-1)}$, $i = 1, \dots, m$.

Exemplo de transformação num sistema de EDO de primeira ordem

Resolvemos o problema de valor inicial com equação de terceira ordem

$$\begin{cases} y'''(x) = \sin(y^2) + 3y'y'' + 4xy' \\ y(2) = 1 \\ y'(2) = -3 \\ y''(2) = 5 \end{cases}$$

Precisamos de três funções auxiliares,
$z_1 := y,\ z_2 := y' = z_1',\ z_3 := y'' = z_2'$, notamos que então
$z_3' = y''' = \sin(y^2) + 3y'y'' + 4xy' = \sin(z_1^2) + 3z_2z_3 + 4xz_2$. Portanto as três funções $z_1(x), z_2(x), z_3(x)$ satisfazem o seguinte sistema de três equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ z_3' = \sin(z_1^2) + 3z_2z_3 + 4xz_2 \end{cases}$$

Este sistema será fornecido das condições iniciais

$$\begin{cases} z_1(2) = 1 \\ z_2(2) = -3 \\ z_3(2) = 5 \end{cases}$$

Note que o ponto inicial deste problema é $x_0 = 2$. Aqui tem de ser definidas todas as derivadas iniciais. O problema PVI equivalente obtido é então

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ z_3' = \sin(z_1^2) + 3z_2z_3 + 4xz_2 \\ z_1(2) = 1, \quad z_2(2) = -3, \quad z_3(2) = 5 \end{cases}$$

que pode ser rescrito como $\begin{cases} Y'(x) = F(x, Y) \\ Y(2) = Y_0 \end{cases}$ onde

$Y(x) = (z_1, z_2, z_3)$, com $z_i(x) = y^{(i-1)}(x)$, $Y_0 = (1, -3, 5)^t$, e $F(x, Y) = (z_2, z_3, \sin(z_1^2) + 3z_2z_3 + 4xz_2)^t$.

Solução vetorial $Y(x)$

Note que se resolvemos o sistema $\begin{cases} Y'(x) = F(x, Y) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$ obteremos o vetor solução

$$Y(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x), \ldots, z_m(x))^t$$

$$= (y(x), y'(x), y''(x), \ldots y^{(m-1)}(x))^t$$

ou seja não só obteremos a solução do problema inicial $y = y(x)$ mas também todas as suas derivadas até ordem $m - 1$ para cada x. Sendo que $y^{(m)}(x) = f(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)})$ obteremos facilmente também a derivada de ordem m da solução y.

Métodos numéricos aplicados a PVI de ordem m

Dada a PVI de ordem m $\begin{cases} y^{(m)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots \\ y^{(m-1)}(x_0) = y_0^{(m-1)} \end{cases}$ Podemos encontrar uma aproximação da solução $y(x)$ num qualquer $x > x_0$ aproximando a solução vetorial $Y(x)$ do equivalente problema vetorial PVI de primeira ordem (sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem) $\begin{cases} Y'(x) = F(x, Y) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$
Utilizamos uma extensão dos método númericos vistos para resolver a PVI escalar $\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Métodos de Euler e Crank Nicolson para PVI de ordem m

Estes métodos são aplicados ao PVI vetorial de ordem 1 equivalente visto anteriormente.

Métodos de Euler Explícito

$$Y_{n+1} = Y_n + hF(x_n, Y_n)$$

Método de Euler aperfeiçoado

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}(F(x_n, Y_n) + F(x_{n+1}, Y_n + hF(x_n, Y_n)))$$

Métodos de Euler Implícito

$$Y_{n+1} = Y_n + hF(x_{n+1}, Y_{n+1})$$

Métodos de Crank-Nicolson

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}(F(x_n, Y_n) + F(x_{n+1}, Y_{n+1})).$$

Note que este dois últimos métodos implícitos necessitam em cada iteração de resolver um sistema não linear. Portanto em cada passo pode necessitar de implementar o método de Newton para sistemas não lineares visto na aula 14.

Euler explicito aplicado a uma PVI

$$\begin{cases} y'''(x) = \sin(y^2) + 3y'y'' + 4xy' \\ y(2) = 1 \\ y'(2) = -3 \\ y''(2) = 5 \end{cases}$$

Usando $z = y'$ e $w = y'' = z'$

obtemos $\begin{cases} Y'(x) = F(x, Y) \\ Y(2) = Y_0 \end{cases}$ com $Y = (y, z, w)^t$, $Y' = (y', z', w')^t$ e

então $F(x, Y) = \begin{pmatrix} z \\ w \\ \sin(y^2) + 3zw + 4xz \end{pmatrix}$

O passo genérico é

$$Y_{n+1} = Y_n + hF(x_n, Y_n) = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \\ w_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \\ \sin(y_n^2) + 3z_n w_n + 4x_n z_n \end{pmatrix}$$

Se quiséssemos fazer somente um passo de tamanho h com o método de Euler explícito para aproximar $y(2+h)$ obtemos usando $Y_0 = (y_0, z_0, w_0) = (1, -3, 5)^t$ que

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = Y_0 + hF(2, Y_0) =$$

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \\ w_0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} z_0 \\ w_0 \\ \sin(y_0^2) + 3z_0 w_0 + 4x_0 z_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ \sin(1) - 45 - 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ \sin(1) - 69 \end{pmatrix}$$

Então $y(2+h) \approx y_1 = 1 - 3h$.

Euler implícito aplicado a PVI anterior

Se consideramos a mesma PVI da slide anterior temos que o passo genérico de Euler implícito é $Y_{n+1} = Y_n + hF(x_{n+1}, Y_{n+1}) = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \\ w_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} z_{n+1} \\ w_{n+1} \\ \sin(y_{n+1}^2) + 3z_{n+1}w_{n+1} + 4x_{n+1}z_{n+1} \end{pmatrix}$.

Ou seja temos o seguinte sistema não linear em $y_{n+1}, z_{n+1}, w_{n+1}$ para resolver em cada passo n

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ z_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \\ w_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} z_{n+1} \\ w_{n+1} \\ \sin(y_{n+1}^2) + 3z_{n+1}w_{n+1} + 4x_{n+1}z_{n+1} \end{pmatrix}$$

Crank Nicolson aplicado a PVI anterior

Usando os resultados de Euler explicito e implícito é fácil, usando a média $\frac{1}{2}(F(x_n, Y_n) + F(x_{n+1}, Y_{n+1})))$, ver que uma iteração genérica de Crank Nicolson para resolver a PVI é

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ z_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \\ w_n \end{pmatrix} +$$

$$\frac{h}{2}\begin{pmatrix} z_n + z_{n+1} \\ w_n + w_{n+1} \\ \sin(y_n^2) + \sin(y_{n+1}^2) + 3(z_n w_n + z_{n+1} w_{n+1}) + 4(x_n z_n + x_{n+1} z_{n+1}) \end{pmatrix}$$

Euler aperfeiçoado aplicado a PVI anterior

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}(F(x_n, Y_n) + F(x_{n+1}, Y_n + hF(x_n, Y_n))) \text{ onde}$$

$$F(x_n, Y_n) = \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \\ \sin(y_n^2) + 3z_n w_n + 4x_n z_n \end{pmatrix}$$

e

$$F(x_{n+1}, Y_n + hF(x_n, Y_n)) = F\left(x_{n+1}, \begin{matrix} y_n + hz_n \\ z_n + hw_n \\ w_n + h(\sin(y_n^2) + 3z_n w_n + 4x_n z_n) \end{matrix}\right) =$$

$$\begin{pmatrix} z_n + hw_n \\ w_n + h(\sin(y_n^2) + 3z_n w_n + 4x_n z_n) \\ \sin((y_n + hz_n)^2) + 3(z_n + hw_n)(w_n + h(\sin(y_n^2) + 3z_n w_n + 4x_n z_n)) + 4x_{n+1}(z_n + hw_n) \end{pmatrix}$$

Introdução ao Problemas de valor de contorno

Os problemas de valor de contorno (PVC) são referidos a problemas estacionários onde a variável independente x atua no espaço e a variável dependente indicada com u refere a uma quantidade que varia no espaço. Portanto não se falará mais de tempo mas somente de variações no espaço. Nos problemas num domínio físico espacial precisamos definir condições no contorno (ou fronteira) do domínio Ω.
Vamos analisar os problemas de contorno associados a equações diferenciais de segunda ordem num domínio espacial unidimensional. Estes problemas necessitam portanto de duas condições no contorno. O contorno será a fronteira do nosso domínio que será um intervalo $[a, b]$.

$$\begin{cases} u''(t) = f(x, u(t), u'(t)) \\ u(a) = u_a \\ u(b) = u_b \end{cases}$$

Este problema PVC diz-se de ter condições de Dirichlet na fronteira.

Outros problemas de valor de contorno são associados a duas condições sempre nos extremos a e b mas com o valor da derivada conhecida num dos dois extremos por exemplo

$$\begin{cases} u''(t) = f(x, u(t), u'(t)) \\ u(a) = u_a \\ u'(b) = u'_b \end{cases}$$

A condição $u'(b) = u'_b$ é dita de "Neumann". Outra possibilidade é ter condições de "Robin" num ou nos dois extremos

$$\begin{cases} u''(t) = f(x, u(t), u'(t)) \\ c_1 u(a) + c_2 u'(a) = c \\ d_1 u(b) + d_2 u'(b) = d \end{cases}$$

Não são aceites em vez duas condições de Neumann nos dois extremos do intervalo

$$\begin{cases} u''(t) = f(x, u(t), u'(t)) \\ u'(a) = c \\ u'(b) = d \end{cases}$$

Pois neste caso não existirá uma única solução do problema.

Exemplo da Física, equação do calor

Imagine de ter uma barra de um metal que é aquecida nos dois extremos a e b com temperatura constante u_a e u_b. A temperatura da barra no seu cumprimento satisfaz o seguinte problema de contorno

$$\begin{cases} -u''(x) = 0 \\ u(a) = u_a \\ u(b) = u_b \end{cases}$$

Se a barra fosse ligada a um gerador de calor que distribui o calor ao longo do seu cumprimento seguindo a lei $h(x)$ é o calor fornecido a barra no ponto x então para saber a temperatura da barra temos de resolver

$$\begin{cases} -u''(x) = h(x) \\ u(a) = u_a \\ u(b) = u_b \end{cases}$$

Se for deixado um fluxo de calor constante u'_b em saída do extremo b então $u'_b > 0$ e forçada a temperatura constante noutro extremo a, então a temperatura na barra satisfaz o problema

$$\begin{cases} -u''(x) = h(x) \\ u(a) = u_a \\ u'(b) = u'_b \end{cases}$$

Formulas de Diferenças Finitas

É possível aproximar a derivada $u'(x)$ de uma $u(x)$, uma vez que se conhecem os valores da função no seu redor usando as seguintes formulas de diferenças finitas

$$D_+u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \quad \text{(Diferença finita avançada)}$$

$$D_-u(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} \quad \text{(Diferença finita atrasada)}$$

$$D_0u(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \quad \text{(Diferença finita centrada)}$$

Conhecemos os erros de truncamento destas formulas no aproximar $u'(x)$

$$D_+u(x) - u'(x) = \frac{h}{2}u''(x) + O(h^2)$$

D_+ é portanto uma formula de primeira ordem

$$D_-u(x) - u'(x) = -\frac{h}{2}u''(x) + O(h^2) \quad (D_- \text{ é uma formula de primeira ordem})$$

$$D_0u(x) - u'(x) = \frac{h^2}{6}u'''(x) + O(h^4) \quad (D_0 \text{ é uma formula de segunda ordem})$$

Formula de diferenças finitas $D_+u(x)$ e erro

Seja $h > 0$,podemos aproximar a derivada $u'(x)$ usando a formula

$$D_+u(x) := \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

Temos que $D_+u(x)$ **aproxima** $u'(x)$ com o erro

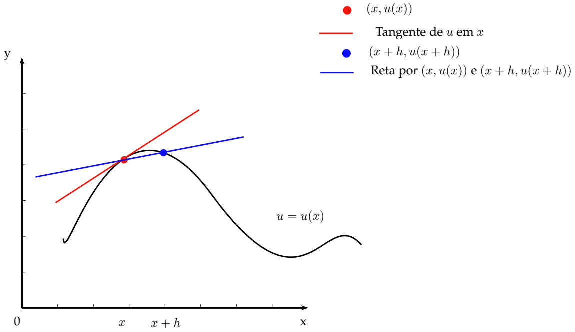
$$D_+u(x) - u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u'(x) = O(h).$$

Uma expressão mais detalhada do erro de truncamento é

$$D_+u(x) - u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u'(x) = \frac{h}{2}u''(x) + O(h^2).$$

$D_+u(x)$ é chamada **formula de diferenças finitas avançada de u no ponto x.**

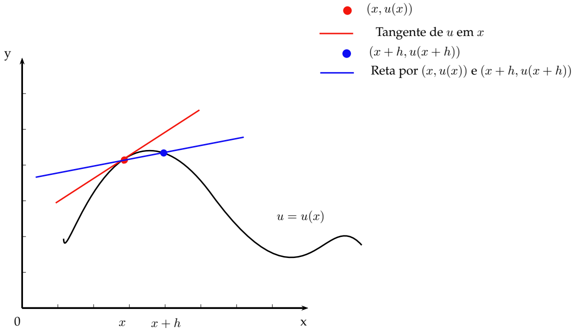
Interpretação Geométrica de $D_+u(x)$



- $u'(x)$ é a inclinação (ou coeficiente angular) da tangente (em vermelho) de u no ponto x
- $D_+u(x)$ é a inclinação da reta (em azul) passante por $(x, u(x))$ e $(x+h, u(x+h))$

Lembre que a reta que passa por dois pontos (x_a, y_a), (x_b, y_b) tem como inclinação $m = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$.

Interpretação Geométrica de $D_+u(x)$



- $D_+u(x) = \dfrac{u(x+h) - u(x)}{h}$ aproxima $u'(x)$, graficamente a inclinação da reta aproxima a inclinação da tangente,
- A reta azul aproximará sempre mais a tangente quanto mais $x+h$ é perto de x ou seja quanto mais h é próximo a zero
- Vale que $\lim\limits_{h \to 0} D_+u(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x)$

Formula de diferenças finitas $D_-u(x)$

Seja $h > 0$,a formula

$$D_-u(x) := \frac{u(x) - u(x-h)}{h}$$

chamada **formula de diferenças finitas atrasada de u no ponto x**, como aproximante de $u'(x)$. Temos que $D_-u(x)$ **aproxima** $u'(x)$ com o erro

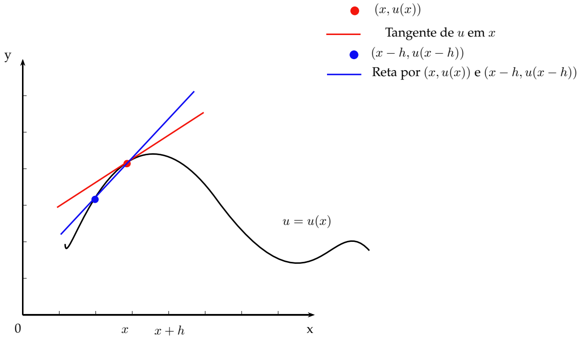
$$D_-u(x) - u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} - u'(x) = O(h).$$

Uma expressão mais detalhada do erro é

$$D_-u(x) - u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} - u'(x) = -\frac{h}{2}u''(x) + O(h^2).$$

- $D_-u(x)$, $D_+u(x)$ tem erros similares. É indiferente usar entre uma delas.
- O erro destes formulas diz-se que é de ordem 1, porque é um infinitésimo por $h \to 0$ do tipo $O(h)$.

Interpretação Geométrica de $D_{-}u(x)$



- $u'(x)$ é a inclinação da tangente (em vermelho) de u no ponto x
- $D_{-}u(x)$ é a inclinação da reta passante por $(x-h, u(x-h))$ e $(x, u(x))$ esta reta aproximará a tangente tanto mais quando h é proximo de zero, temos

$$\lim_{h \to 0} D_{-}u(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x) - u(x-h)}{h} = u'(x).$$

Formulas melhores: formulas de diferenças finitas centradas

É possível aperfeiçoar as formulas de primeira ordem usando formulas de segunda ordem. Uma famílias de formulas de segunda ordem são aquelas centradas que como as D_+, D_- usam somente duas avaliações de u para aproximar a derivada $u'(x)$.
As formulas centradas consideradas aqui são do tipo

$$D_c u(x) = \frac{u(x+\ell h) - u(x-\ell h)}{2\ell h},$$

$h > 0$ é sempre o espaçamento entre os pontos
$x - \ell h < \ldots < x - h < x < x + h < \ldots < x + \ell h$.

- $D_c u(x)$ aproxima $u'(x)$ e diz-se **centrada** porque o ponto x é centrado (mantem a mesma distancia) respeito aos dois pontos: $x - \ell h, x + \ell h$. A seguir usaremos a formula com $\ell = 1$.
- $D_c u(x)$ **é de segunda ordem**: $D_c u(x) - u'(x) = O(h^2)$
- D_+ e D_- não são centradas
- $D_c u(x)$ **é mais acurada de** $D_+ u(x)$ **e** $D_- u(x)$

Formula centrada $D_0 u(x)$

$$D_0 u(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$$

Esta formula de aproximação de $u'(x)$ e o seu erro deriva da expansão em serie de Taylor de $u(x+h)$ e $u(x-h)$ até a ordem 4:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) + \frac{h^3}{3!}u'''(x) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(x) + O(h^5)$$

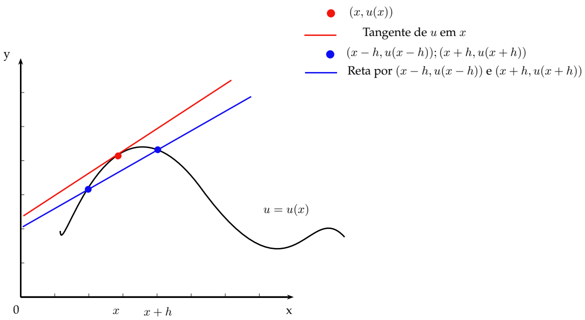
$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) - \frac{h^3}{3!}u'''(x) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(x) + O(h^5)$$

Subtraindo as duas equações, dividindo por $2h$ e levando $u'(x)$ no primeiro membro

$$\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - u'(x) = \frac{h^2}{6}u'''(x) + O(h^4) = O(h^2)$$

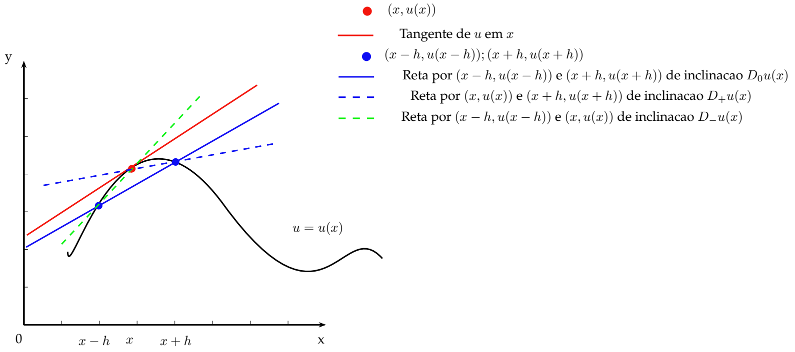
Portanto $D_0 u(x)$ **é uma formula de diferenças finitas de segunda ordem.**

Interpretação Geométrica de $D_0 u(x)$



- $u'(x)$ é a inclinação da tangente de u no ponto x
- $D_c u(x)$ é a inclinação da reta passante por $(x-h, u(x-h))$ e $(x+h, u(x+h))$ esta reta aproximará a tangente tanto mais quando h é próximo de zero, temos $\lim_{h \to 0} D_0 u(x) = u'(x)$.

Comparação gráfica das formulas de diferenças finitas



- $D_0u(x)$ é a formula mais acurada, porque a inclinação $D_0u(x)$ da reta azul aproxima melhor a inclinação $u'(x)$ da tangente (em vermelho).
- Outras retas(a tratos) associadas as formulas D_+ e D_- tem inclinações mais distantes daquela da tangente.

D_2, Formula centrada de diferenças finitas para aproximar $u''(x)$

Desenvolvendo em Serie de Taylor $u(x+h)$ e $u(x-h)$ até o termo $O(h^6)$:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \tfrac{h^2}{2}u''(x) + \ldots + \tfrac{h^5}{5!}u^{(5)}(x) + O(h^6)$$
$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \tfrac{h^2}{2}u''(x) + \ldots + (-1)^5\tfrac{h^5}{5!}u^{(5)}(x) + O(h^6)$$

podemos obter uma formula de ordem 2 para par aproximar a derivada segunda $u''(x)$:

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - u''(x) = \frac{h^2}{12}u^{(4)}(x) + O(h^6) = \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi)$$

com $\xi \in (x-h, x+h)$.

Resolução de um PVC com os métodos de diferenças finitas de segunda ordem

Dado o problema

$$\begin{cases} u''(x) = f(x, u(x), u'(x)) \\ u(a) = u_a \\ u(b) = u_b \end{cases}$$

Suponhamos de querer aproximar a solução num número finito de pontos $x_i \in [a, b]$ que distam homogeneamente entre eles $x_i - x_{i-1} = h$ com $i = 1, \ldots, n$ e tais que $x_0 = a$ e $x_n = b$. Portanto queremos determinar uma sequencia de valores $\{u_i\}_{i=1,\ldots,n-1}$ tais que $u_i \approx u(x_i)$.

A ideia analisada na proxima aula é de usar as formulas de diferenças finitas para aproximar cada derivada do problema e obter assim um sistema linear nos valores u_i.