

Problema de Valor Inicial. Métodos de Alta Ordem: Taylor, Runge-Kutta, Euler aperfeiçoado

MS211 – Cálculo Numérico

Giuseppe Romanazzi

12 Novembro 2020

Introdução

Apresentaremos métodos de alta ordem explícitos para resolver problemas de valor inicial (PVI). Falaremos de métodos de alta ordem para indicar métodos de ordem (de convergência do erro global) superior a 1. Diferentemente do método implícito de Crank-Nicolson, estes métodos tem alta ordem mas não precisam de um processo iterativo do ponto fixo em cada passo.

Estes métodos dividem em duas famílias: métodos da Serie de Taylor e métodos de Runge Kutta.

Entre os métodos de Runge Kutta é costume usar um método simples de segunda ordem chamado simplesmente método de Euler aperfeiçoado, ou método de Heun.

Além de analisar o erro e a convergência, implementaremos estes métodos para resolver alguns PVI.

Conteúdo

- 1 Métodos da Série de Taylor
- 2 Métodos de Runge-Kutta
- 3 Método de Euler aperfeiçoado

Métodos da Série de Taylor

Já vimos como os métodos de Euler e o método de Crank-Nicolson derivam da expansão em serie de Taylor da função $y = y(x)$ solução do problema genérico de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

A ideia dos métodos da Serie de Taylor é de usar a expressão de $y(x_{i+1})$ em função de $y(x_i)$ e de rescrever a derivada em x , $y'(x)$, e as suas derivadas de ordem superior, em função da $f(x, y(x))$.

Note por exemplo que para deduzir Euler explícito partimos de

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + T_h$$

e obtemos a formula

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Este método de Euler explicito é de primeira ordem (ou seja o erro global converge de ordem 1) porque o resto, que é o erro de truncamento local,

$T_h = \frac{h^2}{2}y''(\xi)$ é de segunda ordem. O que pode acontecer se desenvolvemos ainda mais em Serie de Taylor o termo $y(x_{i+1})$?

Se expandirmos ainda mais a $y(x_{i+1})$ em função de $y(x_i)$ obtemos uma aproximação de ordem ainda superior porque o resto da série de Taylor, que será o erro de truncamento do novo método, será um infinitésimo de ordem ainda superior. Lembrando que $h = x_{i+1} - x_i > 0$ é suposto fixo para cada i , obtemos quando paramos a expansão até o termo de ordem $k + 1$:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + (x_{i+1} - x_i)y'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2}y''(x_i) + \dots \\ + \frac{(x_{i+1} - x_i)^k}{k!}y^{(k)}(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^{k+1}}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\xi_i) \quad (1)$$

onde $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$. Agora se quissemos encontrar uma sucessão $\{y_i\}$ que aproxime os valores $\{y(x_i)\}$ com um erro de truncamento de ordem $k + 1$, parece razoável escrever a sucessão $\{y_i\}$ gerada da seguinte formula

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2}y''_i + \dots + \frac{h^k}{k!}y_i^{(k)}$$

Este método é chamado **método da serie de Taylor de ordem k** .

Note que em (1) desconsideramos o resto $T_h = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\xi_i)$ que será então o erro de truncamento local do método.

Truncamento local, ordem de convergência, e os $y_i^{(k)}$

Sendo que

$$|T_h| = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} |y^{(k+1)}(\xi)| \leq \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} \max_{z \in (x_i, x_{i+1})} |y^{(k+1)}(z)|$$

então T_h converge a zero com ordem $k+1$ por isso o método

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2} y''_i + \dots + \frac{h^k}{k!} y_i^{(k)}$$

tem ordem k . Efetivamente o erro global dos métodos da Serie de Taylor de ordem k satisfaz $|y(x_i) - y_i| = O(h^k)$. Isso porque o teorema de convergência visto na aula anterior ainda vale

$$|y(x_i) - y_i| \leq C \frac{T_h}{h}$$

Mas o que são as derivadas $y_i^{(k)}$?

Estes são aproximações das derivadas $y^{(k)}(x_i)$, que são incógnitas! Nos métodos da Serie de Taylor explícitos estas derivadas são conhecidas (explicitamente), porque são funções de $f(x_i, y_i)$ e das derivadas parciais $\frac{\partial^l f}{\partial x \partial y}(x_i, y_i)$ e então são conhecidas, isso porque a função f é dada e y_i vem do passo anterior.

Método da Serie de Taylor de ordem 2

Regressamos a como deduzimos o método de Euler explícito,

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + hy'(x_i) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i))$$

onde usamos a hipótese do problema $y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$. Daí supondo que $y_i \approx y(x_i)$, obtemos o método de Euler Explícito

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

que é efetivamente um método da Serie de Taylor de primeira ordem. Usando a mesma ideia de parar a serie de Taylor, de supor $y_i \approx y(x_i)$, podemos rescrever numa forma explicita o método da serie de Taylor de ordem 2:

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2}y''_i.$$

Este método será bem definido uma vez que encontramos boas aproximações: $y'_i \approx y'(x_i)$ e $y''_i \approx y''(x_i)$.

Notamos como antes que $y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$ e portanto podemos usar

$$y'_i := f(x_i, y_i) \quad (1)$$

Agora para deduzir y''_i observamos que

$$y''(x) = \frac{d}{dx}y'(x) = \frac{d}{dx}f(x, y(x)) = f_x + f_y \cdot y'(x) = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x)) \cdot f(x, y(x))$$

onde usamos a notação $f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.
 Portanto usamos

$$y''_i := f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i) \cdot f(x_i, y_i) \quad (2)$$

Com os valores y'_i, y''_i em (1), (2) podemos escrever o **método da Serie de Taylor de ordem 2** na sua forma final

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}(f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i)).$$

Método da série de Taylor de ordem 3

Se quissemos ter um método de Taylor de ordem 3 temos de encontrar também um aproximante y_i''' de $y'''(x_i)$ usando a mesma estratégia de antes obtemos

$y'''(x) = \frac{d}{dx}y''(x) = \frac{d}{dx}f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x)) \cdot f(x, y(x)) = f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_x f_y + (f_y)^2 f$. Assim computando estas últimas derivadas parciais de segunda ordem f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} em (x_i, y_i) obteremos o **método da série de Taylor de ordem 3**

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}(f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i)) + \frac{h^3}{3!}y_i'''$$

onde

$$y_i''' := [f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_x f_y + (f_y)^2 f](x_i, y_i) \quad (3)$$

Este método terá ordem 3 porque o seu erro de truncamento $\frac{y^{(4)}(\xi)}{4!}h^4$ é de ordem 4.

Em geral então podemos aproximar como vimos cada $y^{(k)}(x_i)$ e por isso podemos deduzir métodos de ordem $k > 0$ com k inteiro qualquer.

Resolução do problema PVI linear com o método da Serie de Taylor de 2ª ordem

$$\begin{cases} y' = 0.04y \\ y(0) = 1000 \end{cases}$$

Sabemos que a solução $y(x) = 1000e^{0.04x}$ toma o valor $y(1) = 1040.8108$ no ponto $\bar{x} = 1$. Verificamos se o método da Serie de Taylor de ordem 2 aproxima $y(\bar{x})$ e se a sua aproximação é mesmo de ordem 2. O método é

$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}(f_x + f \cdot f_y)(x_i, y_i) = \dots$ Observamos que no nosso PVI $f(x, y) = 0.04y$ portanto temos:

$$f_x(x_i, y_i) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) = 0; \quad f_y(x_i, y_i) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i) = 0.04$$

Então podemos escrever o método da série de Taylor como segue

$$y_{i+1} = y_i + h0.04y_i + \frac{h^2}{2}(0 + 0.04 \cdot 0.04y_i) = \left(1 + 0.04h + \frac{(0.04h)^2}{2}\right) y_i$$

Implementando o método, com um passo de tamanho $h = 1$

Lembramos que e quiséssemos fazer somente um passo para chegar a aproximar $y(1)$ começando de $x_0 = 0$ precisaremos de usar $h = 1$. Se em vez usássemos mais passos n , com $n > 1$, temos de usar $h = \frac{\bar{x} - x_0}{n} = \frac{1}{n}$ que se bem leva a fazer mais operações é esperado ter uma precisão maior sendo que

$e_h(\bar{x}) = y(\bar{x}) - y_n = O(h^2)$ porque o método é de segunda ordem. Começamos no avaliar que valor aproxima $y(1)$ usando somente um passo. Precisamos então $n = 1, h = 1$, o valor do método obtido será

$$y_1 = \left(1 + 0.04h + \frac{(0.04h)^2}{2}\right) y_0 = \left(1 + 0.04 + \frac{(0.04)^2}{2}\right) 1000 = (1.04 + 8 \cdot 10^{-4})1000 = 1.0408 \cdot 1000 = 1040.8.$$

O erro cometido é então

$$|e_h(\bar{x})| = |e_1(1)| = |1040.8108 - 1040.8| = 0.0108 = 1.08 \cdot 10^{-2}$$

Implementação do método com mais passos

Com $h = 0.5$ fazemos dois passos ($n = 2$): $y_0 \rightarrow y_1 \rightarrow y_2$.

$$y_1 = \left(1 + 0.04 \cdot 0.5 + \frac{(0.04 \cdot 0.5)^2}{2}\right) 1000;$$

$$y_2 = \left(1 + h0.04 + \frac{(0.04h)^2}{2}\right) y_1 = \left(1 + 0.02 + \frac{0.02^2}{2}\right)^2 1000 = (1.02 + 0.0002)^2 1000 = 1040.80804.$$

O erro cometido é $|e_h(\bar{x})| = |e_{0.5}(1)| =$

$$|1040.8108 - 1040.80804| = 0.00276 = 2.76 \cdot 10^{-3}.$$

Notamos que este erro é aproximadamente um quarto do erro feito usando $h = 1$. Isso era esperado porque o método é de segunda ordem então $e_h(\bar{x}) \approx Ch^2$ quando h for pequeno. Então o erro medido do método está "já" portando se como Ch^2 .

Sabemos da teoria que o erro para $h \rightarrow 0$ porta se como Ch^2 mas as vezes para problemas lineares simples este pode acontecer já logo para h relativamente grande.

Com $h = 0.25$,

$y_4 = \left(1 + 0.04 \cdot 0.25 + \frac{1}{2}(0.04 \cdot 0.25)^2\right)^4 1000 = 1040.8101$. Se for $h = 0.1$, precisamos de 10 passos para chegar a $\bar{x} = 1$, então será y_{10} a aproximar $y(1)$

$$y_{10} = \left(1 + 0.04 \cdot 0.1 + \frac{0.04 \cdot 0.1}{2}\right)^{10} 1000 \approx 1040.81066$$

$|e_{0.1}(1)| = 1 \cdot 10^{-4}$ então o erro é quase $\frac{1}{100}$ do erro feito com $h = 1$.

n	h	h^2	erro global $ e_h(\bar{x}) $	valor achado y_n
1	1	1	$1.08 \cdot 10^{-2}$	1040.8
2	0.5	0.25	$2.76 \cdot 10^{-3}$	1040.80804
4	0.25	0.125	$7.1 \cdot 10^{-4}$	1040.81009
10	0.1	0.01	$1.4 \cdot 10^{-4}$	1040.81066

Erro e custo computacional dos métodos da série de Taylor

Os métodos da série de Taylor podem ser gerados para ser muito acurados porque podemos usar um k alto (a prazer) no erro de truncamento,

$$T_h = h^{k+1} \frac{y^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}$$

que será então muito pequeno.

Vale também a seguinte estimativa do erro, já vista para os métodos de um passo

$$|y(x_n) - y_n| \leq \frac{T_h}{\tilde{L}h} (e^{\tilde{L}(x_n - x_0)} - 1)$$

que garante a convergência de ordem k dos métodos da serie de Taylor. Note que este estimativa é valida porque os método da serie de Taylor são métodos de um passo.

O limite destes métodos é que para ter um método de alta ordem é preciso fazer muitas operações, pense por exemplo de implementar o método de ordem 3 visto antes

$$y_{i+1} = y_i + hf + \frac{h}{2}(f_x + f_y f) + \frac{h^3}{3!}(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_y y f^2 + f_x f_y + (f_y)^2 f)$$

com a função $f(x, y) = \sin(x + y) + xye^{(y-x)}$ e pode ver quantas operações são necessária num único passo. Note que pode ser as vezes difícil mesmo achar as derivadas.

Por isso surge a necessidade de construir métodos de alta ordem com custo computacional baixo que não necessitam de determinar as derivadas da f . Estes métodos serão os métodos de Runge-Kutta.

Métodos de Runge-Kutta

Os métodos de Runge Kutta

- podem ser construídos para ter uma ordem p alta
- não necessitam o cálculo das derivadas parciais da $f(x, y)$ que descrevem o problema de valor inicial
- as derivadas de f são aproximadas através combinações lineares de termos recursivos $K_i = f(x_n + c_i h, y_n + \sum_j \lambda_{ij} K_j)$. Estes termos K_i são chamados estágios do método.
- existem métodos da série de Taylor equivalentes aos métodos de Runge Kutta
- os métodos de Euler são métodos de Runge-Kutta.

Nos vamos analisar somente os métodos de Runge-Kutta explícitos, mas existem também métodos de Runge-Kutta implícitos.

Métodos de Runge-Kutta (RK) explícito de s estágios

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s a_i K_i$$

com $K_1 = f(x_n, y_n)$, $K_i = f(x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{ij} K_j)$, $i \geq 2$

(1) $\sum_{i=1}^s a_i = 1$, esta condição garante que o erro de truncamento converge a zero quando h tende a zero.

(2) condição (1) e $c_i = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{ij}$ com $i \geq 2$ garantem pelo menos a primeira ordem do método

(3) condição (1) e (2) e $\sum_{i=2}^s a_i c_i = \frac{1}{2}$ garantem pelo menos a segunda ordem do método.

Ordem de convergência máximo dos métodos RK de s estágios

$1 \leq s \leq 4$ a ordem máxima é s

$5 \leq s \leq 7$ a ordem máxima é $s - 1$

$s \in \{8, 9\}$ a ordem máxima é $s - 2$

$s \geq 10$ a ordem máxima é menor ou igual de $s - 2$

Assim notamos que para construir os métodos Runge-Kutta de ordem 2, o menor número de estágios que podemos usar é 2 ($s = 2$). Claramente se usássemos mais estágios o custo computacional de cada passo do método aumentaria.

Métodos de Runge Kutta explícito de segunda ordem

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^2 a_i K_i$$

com $K_1 = f(x_n, y_n)$

$$K_2 = f(x_n + c_2 h, y_n + h \sum_{j=1}^{2-1} \lambda_{2j} K_j) = f(x_n + c_2 h, y_n + h \lambda_{21} K_1)$$

com os coeficientes que tem de satisfazer as seguintes condições para ter convergência de ordem 2:

$$(1) \quad a_1 + a_2 = 1$$

$$(2) \quad c_2 = \lambda_{21}$$

$$(3) \quad a_2 c_2 = \frac{1}{2}.$$

Vamos usar a seguir um método de Runge Kutta de segunda ordem, chamado método de Euler aperfeiçoado que tem $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ e $c_2 = \lambda_{21} = 1$. Note que satisfazemos as condições (1),(2),(3) portanto este método será de segunda ordem

Método de Euler aperfeiçoado

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)$$

com $K_1 = f(x_n, y_n)$ e $K_2 = f(x_n + h, y_n + hK_1)$ pode ser rescrito numa forma compacta como segue

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)))$$

Este método é muito similar ao método de Crank-Nicolson

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$$

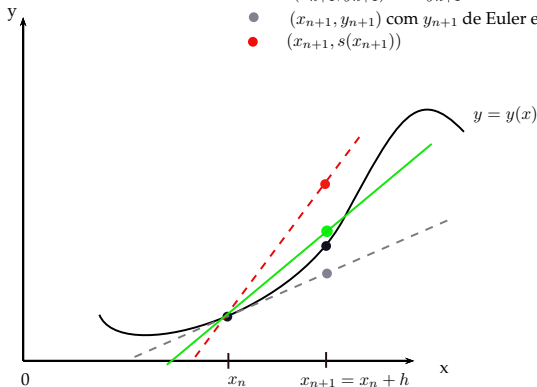
a única diferença é que em vez de usar y_{n+1} como argumento de $f(x_{n+1}, \cdot)$, ele usa uma sua aproximação (aquele obtida com Euler explícito):

$$y_{n+1} \approx y_n + hf(x_n, y_n)$$

Interpretação gráfica

É similar a aquela de Crank-Nicolson, porque
 $y'(x_{n+1}) \approx f(x_{n+1}, y_{n+1}) \approx f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))$.

- $(x_n, y(x_n))$ e $(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$
- - - reta $s(x)$ passante por $(x_n, y(x_n))$ e com inclinação $f(x_{n+1}, y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))) \approx y'(x_{n+1})$
- - - reta $r(x)$ tangente a $y(x)$ no ponto $(x_n, y(x_n))$
- reta passante por $(x_n, y(x_n))$ e com inclinação $\frac{1}{2}(f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))))$
- (x_{n+1}, y_{n+1}) com y_{n+1} de Euler aperfeiçoado
- (x_{n+1}, y_{n+1}) com y_{n+1} de Euler explícito
- $(x_{n+1}, s(x_{n+1}))$



O método de Euler aperfeiçoado

- é de segunda ordem
- é explícito
- porta-se numa maneira similar a Crank-Nicolson, a vantagem é que sendo um método explícito é de fácil implementação e não requer em cada passo de implementar sub-iterações para resolver equações não lineares usando um método do ponto fixo, como acontecia com Crank-Nicolson.

Resolução da PVI usando o método de Euler aperfeiçoado

$$\begin{cases} y'(x) = 0.04y \\ y(0) = 1000 \end{cases}$$

Aproximamos a solução em $\bar{x} = 1$, $y(1) = 1080.8108$ ao variar de h :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))] =$$

$$= y_n + \frac{h}{2}[0.04y_n + 0.04(y_n + h0.04y_n)] = (1 + 0.04h + \frac{(0.04h)^2}{2})y_n$$

Note que obtemos a mesma iteração do método da Serie de Taylor de ordem 2 isso acontece sempre quando $f_x = 0$ e f_y é uma constante.

Se for $h = 1$ obtemos

$$y_1 = (1 + 0.04 + \frac{1}{2}0.04^2)1000 = 1.0408 \cdot 1000 = 1040.8$$

Com $h = 0.5$ obtemos depois dois passos

$$y_2 = (1 + 0.04 \cdot 0.5 + \frac{1}{2}(0.04 \cdot 0.5)^2)^2 1000 = 1.0408 \cdot 1000 = 1040.80804.$$

Com $h = 0.25$ precisamos 4 passos

$$y_4 = (1 + 0.04 \cdot 0.25 + \frac{1}{2}(0.04 \cdot 0.25)^2)^4 1000 = 1040.81009.$$

Com $h = 0.1$ precisamos 10 passos

$$y_{10} = (1 + 0.04 \cdot 0.1 + \frac{1}{2}(0.04 \cdot 0.1)^2)^{10} 1000 = 1040.81066.$$

n	h	h^2	erro global $ e_h(\bar{x}) $	valor achado y_n
1	1	1	$1.08 \cdot 10^{-2}$	1040.8
2	0.5	0.25	$2.76 \cdot 10^{-3}$	1040.80804
4	0.25	0.125	$7.1 \cdot 10^{-4}$	1040.81009
10	0.1	0.01	$1.4 \cdot 10^{-4}$	1040.81066

Estes dados confirmam que Euler aperfeiçoado é um método de segunda ordem porque verificamos que $e_h(\bar{x}) = O(h^2)$

Implementação de Euler aperfeiçoado para resolver um problema PVI não linear

$$\begin{cases} y' = \sin(y) + x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Comparamos a solução $y(1) = 2.412875$ com os resultados obtidos com o método de Euler aperfeiçoado.

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))) = \\ &= y_n + \frac{h}{2}(\sin(y_n) + x_n + \sin(y_n + h(\sin(y_n) + x_n)) + x_{n+1}) \end{aligned}$$

Se for $h = 1$ necessitamos um só passo para chegar a $\bar{x} = 1$:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{1}{2}(\sin(y_0) + x_0 + \sin(y_0 + h(\sin(y_0) + x_0)) + x_1) = \\ &= 1 + \frac{1}{2}(\sin(1) + \sin(1 + \sin(1)) + 1) = 2.40253 \end{aligned}$$

O erro será então $|e_h(\bar{x})| = |y(1) - y_1| = 0.010345 = 1.0345 \cdot 10^{-2}$.

Se for $h = 0.5$ precisamos dois passos para aproximar $y(1)$:

$$y_1 = 1 + \frac{0.5}{2}(\sin(1) + 0.5 + \sin(1 + 0.5 \cdot \sin(1))) = 1.582558$$

$$y_2 = y_1 + \frac{0.5}{2}(\sin(y_1) + h + 1 + \sin(y_1 + 0.5(\sin(y_1) + 0.5))) = 2.38845$$

O erro global é $|e_{0.5}(\bar{x})| = |y(1) - y_2| = 1.408 \cdot 10^{-2}$.

Este erro é maior do erro com $h = 1$.

Note que a teoria diz me que somente para h suficientemente pequeno o erro porta-se como $C \cdot h^2$. Vamos então prosseguir usando um h menor...

Usando h menor, fazendo mais passos

Com $h = 0.25$ precisamos 4 passos, obteremos implementando o método $y_4 = 2.404642$, o erro é $|e_{0.25}(\bar{x})| = |y(1) - y_4| = 8.233 \cdot 10^{-3}$.

Com $h = 0.125$ precisamos 8 passos obteremos implementando 8 passos do método $y_8 = 2.410582$, o erro é $|e_{0.125}(\bar{x})| = |y(1) - y_8| = 2.293 \cdot 10^{-3}$.

O erro é quase 1/4 do erro cometido para $h = 0.25$.

Se usássemos 16 passos, $h = 0.0625$ temos $y_{16} = 2.412273$, $|e_{0.0625}(\bar{x})| = 6.02 \cdot 10^{-4}$.

Com 32 passos e $h = 0.03125$ obtemos uma aproximação ainda melhor $y_{32} = 2.412722$ com um erro $|e_{0.03125}(\bar{x})| = 1.53 \cdot 10^{-4}$.

n	h	erro global $ e_h(\bar{x}) $	valor achado y_n
4	0.25	$8.233 \cdot 10^{-3}$	2.404642
8	0.125	$2.293 \cdot 10^{-3}$	2.410582
16	0.0625	$6.02 \cdot 10^{-4}$	2.412273
32	0.03125	$1.53 \cdot 10^{-4}$	2.412722

O método escala com ordem 2